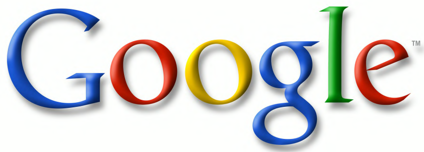






SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

JAHRGANG 1889.

ERSTER HALBBAND. JANUAR BIS MAI.

STÜCK I—XXVIII MIT ZWEI TAFELN.

BERLIN, 1889.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

INHALT.

Inhalt.

VERZEICHNISS

DER

MITGLIEDER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

AM 1. JANUAR 1889.

I. BESTÄNDIGE SECRETARE.

Hr. *du Bois-Reymond*, Secr. der phys.-math. Classe.
- *Curtius*, Secr. der phil.-hist. Classe.
- *Mommsen*, Secr. der phil.-hist. Classe.
- *Auwers*, Secr. der phys.-math. Classe.

II. ORDENTLICHE MITGLIEDER

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königlichen Bestätigung.	
	Hr. *Wilhelm Schott*	1841	März 9.
Hr. *Emil du Bois-Reymond*		1851	März 5.
	- *Heinrich Kiepert*	1853	Juli 25.
- *Heinrich Ernst Beyrich*		1853	Aug. 15.
- *Julius Wilhelm Ewald*		1853	Aug. 15.
- *Karl Friedr. Rammelsberg*		1855	Aug. 15.
- *Ernst Eduard Kummer*		1855	Dec. 10.
- *Karl Weierstraſs*		1856	Nov. 19.
	- *Albrecht Weber*	1857	Aug. 24.
	- *Theodor Mommsen*	1858	April 27.
	- *Adolf Kirchhoff*	1860	März 7.
- *Leopold Kronecker*		1861	Jan. 23.
	- *Ernst Curtius*	1862	März 3.
- *August Wilhelm von Hofmann*		1865	Mai 27.
- *Arthur Auwers*		1866	Aug. 18.
- *Justus Roth*		1867	April 22.
- *Nathanael Pringsheim*		1868	Aug. 17.
- *Hermann von Helmholtz*		1870	Juni 1.

Ordentliche Mitglieder

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königlichen Bestätigung.	
	Hr. *Eduard Zeller*	1872	Dec. 9.
Hr. *Werner von Siemens*		1873	Dec. 22.
- *Rudolph Virchow*		1873	Dec. 22.
	- *Johannes Vahlen*	1874	Dec. 16.
	- *Eberhard Schrader*	1875	Juni 14.
	- *Heinrich von Sybel*	1875	Dec. 20.
	- *August Dillmann*	1877	März 28.
	- *Alexander Conze*	1877	April 23.
- *Simon Schwendener*		1879	Juli 13.
- *Hermann Munk*		1880	März 10.
	- *Adolf Tobler*	1881	Aug. 15.
	- *Wilhelm Wattenbach*	1881	Aug. 15.
	- *Hermann Diels*	1881	Aug. 15.
- *Hans Landolt*		1881	Aug. 15.
- *Wilhelm Waldeyer*		1884	Febr. 18.
	- *Alfred Pernice*	1884	April 9.
	- *Heinrich Brunner*	1884	April 9.
	- *Johannes Schmidt*	1884	April 9.
- *Lazarus Fuchs*		1884	April 9.
- *Franz Eilhard Schulze*		1884	Juni 21.
	- *Otto Hirschfeld*	1885	März 9.
- *Wilhelm von Bezold*		1886	April 5.
	- *Eduard Sachau*	1887	Jan. 24.
	- *Gustav Schmoller*	1887	Jan. 24.
	- *Julius Weizsäcker*	1887	Jan. 24.
	- *Wilhelm Dilthey*	1887	Jan. 24.
- *Karl Klein*		1887	April 6.
- *Karl August Möbius*		1888	April 30.
- *August Kundt*		1888	Mai 29.
	- *Ernst Dümmler*	1888	Dec. 19.
	- *Ulrich Koehler*	1888	Dec. 19.

(Die Adressen der Mitglieder s. S. IX.)

III. AUSWÄRTIGE MITGLIEDER

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königlichen Bestätigung.	
	Sir *Henry Rawlinson* in London	1850	Mai 18.
Hr. *Franz Neumann* in Königsberg		1858	Aug. 18.
- *Robert Wilhelm Bunsen* in Heidelberg		1862	März 3.
	Hr. *Franz* Ritter *v. Miklosich* in Wien	1862	März 24.
- *Wilhelm Weber* in Göttingen		1863	Juli 11.
- *Hermann Kopp* in Heidelberg		1874	Mai 13.
	- *Giovanni Battista de Rossi* in Rom	1875	Juli 9.
Sir *Richard Owen* in London		1878	Dec. 2.
- *George Biddell Airy* in Greenwich		1879	Febr. 8.
Hr. *Charles Hermite* in Paris		1884	Jan. 2.
- *August Kekulé* in Bonn		1885	März 2.
	- *Otto von Boehtlingk* in Leipzig	1885	Nov. 30.

IV. EHREN-MITGLIEDER.

	Datum der Königlichen Bestätigung.	
Hr. *Peter von Tschichatschef* in Florenz	1853	Aug. 22.
- Graf *Helmuth von Moltke* in Berlin	1860	Juni 2.
Don *Baldassare Boncompagni* in Rom	1862	Juli 21.
Hr. *Georg Hanssen* in Göttingen	1862	März 3.
S. M. Dom *Pedro,* Kaiser von Brasilien	1882	Oct. 18.
Earl *of Crawford and Balcarres* in Dunecht, Aberdeen	1883	Juli 30.
Don *Carlos Ibañez* in Madrid	1887	April 1.
Hr. *Max Lehmann* in Marburg	1887	Jan. 24.
- *Ludwig Boltzmann* in Graz	1888	Juni 29.

V. CORRESPONDIRENDE MITGLIEDER.

Physikalisch-mathematische Classe.

	Datum der Wahl.	
Hr. *Adolf von Baeyer* in München	1884	Jan. 17.
- *C. H. D. Buys-Ballot* in Utrecht	1887	Nov. 3.
- *Friedrich Beilstein* in Petersburg	1888	Dec. 6.
- *Eugenio Beltrami* in Pavia	1881	Jan. 6.
- *Eduard van Beneden* in Lüttich	1887	Nov. 3.
- *P. J. van Beneden* in Löwen	1855	Juli 26.
- *Enrico Betti* in Pisa	1881	Jan. 6.
- *Francesco Brioschi* in Mailand	1881	Jan. 6.
- *Ole Jacob Broch* in Christiania	1876	Febr. 3.
- *Ernst von Brücke* in Wien	1854	April 27.
- *Hermann Burmeister* in Buenos Aires	1874	April 16.
- *Auguste Cahours* in Paris	1867	Dec. 19.
- *Alphonse de Candolle* in Genf	1874	April 16.
- *Stanislao Cannizzaro* in Rom	1888	Dec. 6.
- *Felice Casorati* in Pavia	1886	Juli 15.
- *Arthur Cayley* in Cambridge	1866	Juli 26.
- *Michel-Eugène Chevreul* in Paris	1834	Juni 5.
- *Elvin Bruno Christoffel* in Strassburg	1868	April 2.
- *Luigi Cremona* in Rom	1886	Juli 15.
- *James Dana* in New Haven, Connecticut	1855	Juli 26.
- *Ernst Heinrich Karl von Dechen* in Bonn	1842	Febr. 3.
- *Richard Dedekind* in Braunschweig	1880	März 11.
- *Franz Cornelius Donders* in Utrecht	1873	April 3.
- *Louis-Hippolyte Fizeau* in Paris	1863	Aug. 6.
- *Edward Frankland* in London	1856	Nov. 8.
- *Remigius Fresenius* in Wiesbaden	1888	Dec. 6.
- *Carl Gegenbaur* in Heidelberg	1884	Jan. 17.
- *Wolcott Gibbs* in Cambridge, Massachusetts	1885	Jan. 29.
- *Benjamin Apthorp Gould* in Cambridge, Massachusetts	1883	Juni 7.
- *Franz von Hauer* in Wien	1881	März 3.
- *Rudolf Heidenhain* in Breslau	1884	Jan. 17.
- *Johann Friedrich Hittorf* in Münster	1884	Juli 31.
Sir *Joseph Dalton Hooker* in Kew	1854	Juni 1.
Hr. *Thomas Huxley* in London	1865	Aug. 3.
- *Joseph Hyrtl* in Wien	1857	Jan. 15.
- *Albert von Kölliker* in Würzburg	1873	April 3.
- *Friedrich Kohlrausch* in Strassburg	1884	Juli 31.
- *Nicolai von Kokscharow* in St. Petersburg	1887	Oct. 20.

Physikalisch-mathematische Classe.

	Datum der Wahl	
Hr. *Adalbert Krueger* in Kiel	1887	Febr. 10.
- *Rudolph Leuckart* in Leipzig	1887	Jan. 20.
- *Franz von Leydig* in Bonn	1887	Jan. 20.
- *Rudolph Lipschitz* in Bonn	1872	April 18.
- *Sven Ludvig Lovén* in Stockholm	1875	Juli 8.
- *Karl Ludwig* in Leipzig	1864	Oct. 27.
- *Charles Marignac* in Genf	1865	März 30.
- *Lothar Meyer* in Tübingen	1888	Dec. 6.
- *Karl von Nägeli* in München	1874	April 16.
- *Simon Newcomb* in Washington	1883	Juni 7.
- *Eduard Pflüger* in Bonn	1873	April 3.
- *Friedrich August von Quenstedt* in Tübingen	1868	April 2.
- *Georg Quincke* in Heidelberg	1879	März 13.
- *Friedrich von Recklinghausen* in Strassburg	1885	Febr. 26.
- *Ferdinand von Richthofen* in Berlin	1881	März 3.
- *Ferdinand Römer* in Breslau	1869	Juni 3.
- *Heinrich Rosenbusch* in Heidelberg	1887	Oct. 20.
- *George Salmon* in Dublin	1873	Juni 12.
- *Arcangelo Scacchi* in Neapel	1872	April 18.
- *Ernst Christian Julius Schering* in Göttingen	1875	Juli 8.
- *Giovanni Virginio Schiaparelli* in Mailand	1879	Oct. 23.
- *Ludwig Schläfli* in Bern	1873	Juni 12.
- *Eduard Schönfeld* in Bonn	1887	Febr. 10.
- *Heinrich Schröter* in Breslau	1881	Jan. 6.
- *Philipp Ludwig von Seidel* in München	1863	Juli 16.
- *Japetus Steenstrup* in Kopenhagen	1859	Juli 11.
- *George Gabriel Stokes* in Cambridge	1859	April 7.
- *Otto von Struve* in Pulkowa	1868	April 2.
- *James Joseph Sylvester* in London	1866	Juli 26.
Sir *William Thomson* in Glasgow	1871	Juli 13.
Hr. *August Töpler* in Dresden	1879	März 13.
- *Moritz Traube* in Breslau	1886	Juli 29.
- *Pafnutij Tschebyschew* in St. Petersburg	1871	Juli 13.
- *Gustav Tschermak* in Wien	1881	März 3.
- *Gustav Wiedemann* in Leipzig	1879	März 13.
- *Heinrich Wild* in St. Petersburg	1881	Jan. 6.
- *Alexander William Williamson* in High Pitfold, Haslemere	1875	Nov. 18.
- *August Winnecke* in Strassburg	1879	Oct. 23.
- *Ferdinand Zirkel* in Leipzig	1887	Oct. 20.

Philosophisch-historische Classe.

	Datum der Wahl.	
Hr. *Wilhelm Christian Ahlwardt* in Greifswald	1888	Febr. 2.
- *Graziadio Isaia Ascoli* in Mailand	1887	März 10.
- *Theodor Aufrecht* in Bonn	1864	Febr. 11.
- *George Bancroft* in Washington	1845	Febr. 27.
- *Heinrich Brugsch* in Berlin	1873	Febr. 13.
- *Heinrich von Brunn* in München	1866	Juli 26.
- *Franz Bücheler* in Bonn	1882	Juni 15.
- *Georg Bühler* in Wien	1878	April 11.
- *Ingram Bywater* in Oxford	1887	Nov. 17.
- *Giuseppe Canale* in Genua	1862	März 13.
- *Antonio Maria Ceriani* in Mailand	1869	Nov. 4.
- *Alexander Cunningham* in London	1875	Juni 17.
- *Léopold Delisle* in Paris	1867	April 11.
- *Wilhelm Dittenberger* in Halle	1882	Juni 15.
- *Giuseppe Fiorelli* in Rom	1865	Jan. 12
- *Kuno Fischer* in Heidelberg	1885	Jan. 29
- *Paul Foucart* in Athen	1884	Juli 24.
- *Karl Immanuel Gerhardt* in Eisleben	1861	Jan. 31.
- *Wilhelm von Giesebrecht* in München	1859	Juni 30.
- *Konrad Gislason* in Kopenhagen	1854	März 2.
- Graf *Giambattista Carlo Giuliari* in Verona	1867	April 11.
- *Aureliano Fernandez Guerra y Orbe* in Madrid	1861	Mai 30.
- *Friedrich Wilhelm Karl Hegel* in Erlangen	1876	April 6.
- *Emil Heitz* in Strassburg	1871	Juli 20.
- *Théophile Homolle* in Paris	1887	Nov. 17.
- *Paul Hunfalvy* in Pesth	1873	Febr. 13.
- *Friedrich Imhoof-Blumer* in Winterthur	1879	Juni 19.
- *Vatroslav Jagić* in Wien	1880	Dec. 16.
- *Panagiotis Kabbadias* in Athen	1887	Nov. 17.
- *Heinrich Keil* in Halle	1882	Juni 15.
- *Franz Kielhorn* in Göttingen	1880	Dec. 16.
- *Sigismund Wilhelm Koelle* in London	1855	Mai 10.
- *Stephanos Kumanudes* in Athen	1870	Nov. 3.
- *Konrad Leemans* in Leiden	1844	Mai 9.
- *Giacomo Lumbroso* in Rom	1874	Nov. 3.
- *Adolf Michaelis* in Strassburg	1888	Juni 21.
- *Giulio Minervini* in Neapel	1852	Juni 17.
- *Ludvig Müller* in Kopenhagen	1866	Juli 26.
- *Max Müller* in Oxford	1865	Jan. 12.
- *August Nauck* in St. Petersburg	1861	Mai 30.
- *Charles Newton* in London	1861	Jan. 31.
- *Theodor Nöldeke* in Strassburg	1878	Febr. 14.
- *Julius Oppert* in Paris	1862	März 13.

Philosophisch-historische Classe.

	Datum der Wahl.	
Hr. *Gaston Paris* in Paris	1882	April 20.
- *Georges Perrot* in Paris	1884	Juli 24.
- *Wilhelm Pertsch* in Gotha	1888	Febr. 2.
- *Rizo Rangabé* in Athen	1851	April 10.
- *Félix Ravaisson* in Paris	1847	Juni 10.
- *Ernest Renan* in Paris	1859	Juni 30.
- *Georg Rosen* in Detmold	1858	März 25.
- *Rudolph Roth* in Tübingen	1861	Jan. 31.
- *Eugène de Rozière* in Paris	1864	Febr. 11.
- *Hermann Sauppe* in Göttingen	1861	Jan. 31.
- *Theodor Sickel* in Wien	1876	April 6.
- *Christoph Sigwart* in Tübingen	1885	Jan. 29.
- *Friedrich Spiegel* in Erlangen	1862	März 13.
- *Aloys Sprenger* in Heidelberg	1858	März 25.
- *William Stubbs* in Chester	1882	März 30.
- *Théodore Hersant de la Villemarqué* in Paris	1851	April 10.
- *Louis Vivien de Saint-Martin* in Paris	1867	April 11.
- *Matthias de Vries* in Leiden	1861	Jan. 31.
- *William Waddington* in Paris	1866	Febr. 15.
- *William Dwight Whitney* in New Haven	1873	Febr. 13.
- *Friedrich Wieseler* in Göttingen	1879	Febr. 27.
- *Jean-Joseph-Marie-Antoine de Witte* in Paris	1845	Febr. 27.
- *William Wright* in Cambridge	1868	Nov. 5.
- *Ferdinand Wüstenfeld* in Göttingen	1879	Febr. 27.
- *K. E. Zachariae von Lingenthal* in Grosskmehlen	1866	Juli 26.
- *Karl Zangemeister* in Heidelberg	1887	Febr. 10.

WOHNUNGEN DER ORDENTLICHEN MITGLIEDER.

Hr. Dr. *Auwers*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Lindenstr. 91. SW.
- - *Beyrich*, Prof., Geh. Bergrath, Französischestr. 29. W.
- - *von Bezold*, Professor, Lützowstr. 72. W.
- - *E. du Bois-Reymond*, Prof., Geh. Medic.-Rath, Neue Wilhelmstr. 15. NW.
- - *Brunner*, Prof., Geh. Justiz-Rath, Lutherstr. 36. W.
- - *Conze*, Professor, Charlottenburg, Fasanenstr. 3.
- - *Curtius*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Matthäikirchstr. 4. W.
- - *Diels*, Professor, Lützowstr. 83. W.
- - *Dillmann*, Professor, Schillstr. 11 a. W.
- - *Dilthey*, Professor, Burggrafenstr. 4. W.
- - *Dümmler*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Königin Augustastr. 53. W.
- - *Ewald*, Matthäikirchstr. 28. W.
- - *Fuchs*, Professor, Kleinbeerenstr. 1. SW.
- - *von Helmholtz*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Neue Wilhelmstr. 16. NW.
- - *Hirschfeld*, Professor, Charlottenburg, Hardenbergstr. 8.
- - *von Hofmann*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Dorotheenstr. 10. NW.
- *Kiepert*, Professor, Lindenstr. 11. SW.
- - *Kirchhoff*, Professor, Matthäikirchstr. 23. W.
- - *Klein*, Professor, Am Karlsbad 2. W.
- - *Koehler*, Professor, Königin Augustastr. 42. W.
- - *Kronecker*, Professor, Bellevuestr. 13. W.
- - *Kummer*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Schönebergerstr. 10. SW.
- - *Kundt*, Professor, Klopstockstr. 65. NW.
- - *Landolt*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Königgrätzerstr. 123b. W.
- - *Möbius*, Professor, Alexander-Ufer 2. NW.
- - *Mommsen*, Professor, Charlottenburg, Marchstr. 6.
- - *H. Munk*, Professor, Matthäikirchstr. 4. W.
- - *Pernice*, Professor, Genthinerstr. 13. W.
- - *Pringsheim*, Professor, Königin-Augustastr. 49. W.
- - *Rammelsberg*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Schönebergerstr. 10. SW.
- - *Roth*, Professor, Matthäikirchstr. 23. W.
- - *Sachau*, Professor, Wormserstr. 12. W.
- - *Schmidt*, Professor, Lützower Ufer 24. W.
- - *Schmoller*, Professor, Wormserstr. 13. W.
- - *Schott*, Professor, Halleschestr. 12. SW.
- - *Schrader*, Professor, Kronprinzen-Ufer 20. NW.
- - *Schulze*, Professor, Invalidenstr. 43. NW.
- - *Schwendener*, Professor, Matthäikirchstr. 28. W.

Hr. Dr. *von Siemens*, Geh. Regierungs-Rath, Markgrafenstr. 94. SW., Charlottenburg, Berlinerstr. 36.
- - *von Sybel*, Prof., Wirkl. Geh. Ober-Reg. Rath, Hohenzollernstr. 6. W.
- - *Tobler*, Professor, Schillstr. 11. W.
- - *Vahlen*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Genthinerstr. 22. W.
- - *Virchow*, Prof., Geh. Medicinal-Rath, Schellingstr. 10. W.
- - *Waldeyer*, Prof., Geh. Medicinal-Rath, Lutherstr. 35. W.
- - *Wattenbach*, Professor, Geh. Regierungs-Rath, Corneliusstr. 5. W.
- - *Weber*, Professor, Ritterstr. 56. S.
- - *Weierstraſs*, Prof., Friedrich-Wilhelmstr. 14. W.
- - *Weizsäcker*, Professor, Blumeshof 13. W.
- - *Zeller*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Magdeburgerstr. 4. W.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.
I.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

10. Januar. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

Hr. Schrader las über die Asarhaddon-Stele von Sindjerly.

Die Drucklegung bleibt vorbehalten.

Ausgegeben am 17. Januar.

1889.
II.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

10. Januar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

Hr. du Bois-Reymond legte die umstehend folgende Mittheilung des Hrn. Prof. Brieger hierselbst vor: Zur Kenntniss der Bildung von Ptomainen und Toxinen durch pathogene Bakterien.

Zur Kenntniss der Bildung von Ptomainen und Toxinen durch pathogene Bakterien.

Von Prof. Dr. L. Brieger
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond.)

Die Mannigfaltigkeit der Volksseuchen entspringt gemäss den grundlegenden Untersuchungen Koch's dem Umstande, dass eine grosse Reihe verschiedenartig wirkender pathogener Bakterien auf den menschlichen Organismus eindringen. Diese Bakterien sind aber lebende Wesen und jedes lebende Geschöpf bedarf zu seinem Unterhalte bestimmter Nährstoffe. Mit der Aufnahme von Nahrungsmitteln fallen dieselben, worauf ich bereits früher hingewiesen, sofort chemischen Umsetzungen anheim, sei es, dass die eingeführten Stoffe zu complexer gestalteten Körpern sich aufbauen, sei es, dass sie einen allmählichen Abbau erleiden, wobei schliesslich aus ihren Elementen die denkbar einfachsten Verbindungen entstehen.

Die Wichtigkeit des Chemismus der Bakterien ergiebt sich direct aus Beobachtungen des Haushaltes der Natur. Die Alkoholgährung, die Milch- und Buttersäuregährung, die Ammoniakgährung, eine Fülle von chemischen Umsetzungen, welche vielfach erst das Dasein höher organisirter Lebewesen ermöglichen, werden von jenen specifischen kleinsten Organismen eingeleitet. Die chemische Kraft der Bakterien ist es also, welche deren Thätigkeit kennzeichnet. Demgemäss kann auch das klinische Verständniss von der Natur der Volksseuchen, sowie überhaupt der Infectionskrankheiten, welche die überwiegende Mehrzahl aller bekannten Krankheiten umfassen, sich nicht bloss mit der Entdeckung der Krankheitsträger begnügen, sondern es wird insbesondere auch den Chemismus derselben zu ergründen suchen.

Die hohe Bedeutung der sogenannten Fermente für die Erhaltung des menschlichen und thierischen Lebens, jener noch so räthselhaften Stoffe, deren Wirksamkeit wir nur aus biologischen Vorgängen er-

schliessen, legt es nahe, auch Fermentwirkungen zur Erklärung der unheilvollen Thätigkeit der pathogenen Bakterien heranzuziehen. Pasteur hat aber bereits Liebig gegenüber dargethan, dass die Bakterien ohne die Vermittelung von Fermenten ihnen günstige Nährsubstrate kraft der ihnen eigenthümlichen Lebensverrichtungen umgestalten. Es werden also vorerst greifbare Dinge, die krystallisirenden Substanzen mit ihren wohl charakterisirten physikalischen und chemischen Eigenschaften sein, deren Erforschung wir uns zuwenden müssen.[1]

Der von Mitscherlich und insbesondere von Hoppe-Seyler vertheidigte Satz, dass das Leben nichts weiter als Fäulniss sei, charakterisirt im grossen Ganzen die Verrichtungen, wie sie sich innerhalb des menschlichen Organismus im gesunden und kranken Zustande vollziehen. Daher dünkt es wohl nicht befremdlich, wenn sich die chemisch geschulten Pathologen mit Vorliebe dem Studium der Fäulnissvorgänge widmen. Zudem dürfen wir nicht vergessen, dass das Hauptstück des Verdauungsschlauches der höchstorganisirten Lebewesen nichts Anderes darstellt, als einen grossen Fäulnissherd, in dem unaufhörlich schädliche Substanzen erzeugt werden.

Aus dem Chaos der Fäulnissbreie werden herausgeholt Fettsäuren, sowie insbesondere aromatische Producte, wie Phenol, Kresol, Indol, Skatol, Oxysäuren: Substanzen also, die obwohl an und für sich giftig und fäulnisswidrig wirkend, der Lebensthätigkeit der Spaltpilze entspriessen. Es werden demnach die Fäulnisserreger bei Ansammlung ihrer eigensten Lebensproducte ihre Lebensfähigkeit einbüssen. Damit wird dem Überwuchern dieser schädlichen Parasiten in- und ausserhalb des Organismus Halt geboten. Noch einen anderen Weg schlägt aber die Natur ein, um die im Organismus gebildeten giftigen Stoffwechselproducte der Spaltpilze unschädlich zu machen. Die aromatischen Substanzen paaren sich nämlich mit Schwefelsäure zu den sogenannten Aetherschwefelsäuren, Verbindungen, die ganz unschädlich sind. Genügt aber die Schwefelsäure des Körpers nicht mehr zur Paarung mit den giftigen aromatischen Substanzen, dann tritt ein Abkömmling des Zuckers, die Glycuronsäure, hierfür ein; und auch diese links drehenden Paarlinge verhalten sich physiologisch indifferent. Eine erhöhte Bedeutung werden diese physiologischen Vorgänge beim erkrankten Individuum gewinnen, zu einer Zeit, wo die normalen Functionen mehr oder weniger daniederliegen, und die Schutzmittel, welche dem körperlichen Mechanismus zur Verfügung stehen, nicht mehr gehörig ihres Amtes walten. Unter diesen Umständen werden

[1] Vergl. L. Brieger: Über Ptomaine. 3 Theile. Berlin 1885 und 1886.

die schädlichen Fäulnissproducte auf den Organismus ihren unheilvollen Einfluss geltend machen können.

In der That hat sich gezeigt, dass bei gewissen Krankheiten ganz bedeutende Mengen dieser aromatischen Stoffe erzeugt werden, und zwar in so grossen Mengen, dass das Leben dadurch gefährdet wird. Ich habe vor längerer Zeit bezüglich der Phenolausscheidung, der Bildung der Aetherschwefelsäuren und der Oxysäuren eine gewisse Gesetzmässigkeit ermitteln können,[1] Thatsachen, die jüngst von G. HOPPE-SEYLER[2] bestätigt und noch erweitert wurden. Wir finden es leicht begreiflich, dass die Phenolausfuhr recht erheblich sich steigert bei gewissen Darmkrankheiten, sowie bei Erkrankungen, welche eine Verjauchung der Gewebe verschulden. Als ein auffälliges Ereigniss aber müssen wir betrachten die vermehrte Phenolausscheidung bei einzelnen infectiösen Krankheiten, wie Diphtherie, Erysipelas facieï, manchen Fällen von Pyaemie und theilweise auch bei Scharlach. Dass hier nicht abnorme Darmzersetzungen zu diesem Missverhältniss Anlass geben, habe ich bereits auseinandergesetzt; wahrscheinlich sind es die multiplen Nekrosen, bedingt durch die in die Gewebe einwandernden Mikrobien, welche dann weiter zersetzt werden. Daher schlug ich auch für derartige Krankheiten die Bezeichnung »Fäulnisskrankheiten« vor.

Nach den gegenwärtigen klinischen Erfahrungen sind es aber vorzugsweise die basischen Stoffwechselproducte der pathogenen Bakterien, welche die vitalen Functionen nicht bloss zu schädigen, sondern geradezu zu vernichten vermögen. Ich nenne diese auf thierischem Nährboden in Folge perverser Gährungen entsprossenen Basen, falls sie ungiftig sind, Ptomaine (πτῶμα, das Gefallene, der Leichnam), nach dem Vorgange SELMI's,[3] der zuerst auf die Gegenwart alkaloidartiger Substanzen in menschlichen Leichen die Aufmerksamkeit lenkte, ohne indessen je einen solchen Körper gemäss den Anforderungen der exacten Chemie dargestellt zu haben. Sind jene basischen Stoffe giftig, so bezeichne ich sie als Toxine. Übrigens sind die Ptomaine, wenn auch ungiftig, doch nicht unschädlich für lebende Wesen. So bewirkt nach den übereinstimmenden Untersuchungen von FEHLEISEN,[4] SCHEUERLEN[5] und GRAWITZ[6] sowohl das Cadaverin als auch das Putrescin Eiterung und Nekrose. Diese beiden

[1] Zeitschr. f. klin. Med. Bd. III.
[2] Zeitschr. f. physiolog. Chemie. Bd. XII.
[3] Sulle ptomaine od alcaloidi cadaverici ec. Bologna 1878.
[4] Arbeiten aus der chirurgischen Klinik der Universität Berlin. Bd. 3.
[5] Ebenda.
[6] VIRCHOW's Archiv. Bd. 110. S. 1.

Ptomaine sollen nach den neuesten Forschungen von Behring,[1] in grösserer Quantität dem Organismus einverleibt, auch noch entsetzliche Giftwirkung entfalten.

Im Laufe meiner Untersuchungen über die Ptomaine und Toxine hat sich nun gezeigt, dass die einfachen Spaltpilze und die pathogenen Bakterien bezüglich ihres Chemismus keine anderen Bahnen einschlagen als die Einzelzellen im lebenden Körper; selbstverständlich kommen hinzu noch die specifischen Wirkungsweisen, die eben jeder Einzelzelle ihren eigenartigen Stempel aufdrücken und die bei der bakteriellen Thätigkeit sich vorzüglich durch die Bildung von Ptomainen und Toxinen offenbart. Eine weitere Kenntniss dieser Substanzen ist für den Fortschritt der inneren Medicin um so dringlicher, als Pasteur und seine Schule immer mehr Thatsachen anhäufen, welche die hohe Bedeutung dieser Stoffwechselproducte der Seuchenträger zur Erzielung von Immunität darthun.

Die Ungunst meiner äusseren Arbeitsverhältnisse lässt nur einen recht langsamen Fortgang meiner hierauf gerichteten Untersuchungen zu. Wenn ich in der Lage bin, wieder einige neue Thatsachen auf diesem Gebiete mitzutheilen, so verdanke ich es dem Entgegenkommen des Directors des physiologischen Instituts, Hrn. Prof. du Bois-Reymond, und des Vorstehers der chemischen Abtheilung des Instituts, Hrn. Prof. Kossel, welche mir für den chemischen Theil meiner Arbeit die Mittel zur Verfügung stellten. Es sei mir gestattet, an dieser Stelle dafür meinen verbindlichsten Dank auszudrücken.

Frühere Versuche mit Reinculturen des Koch-Eberth-Gaffky'schen Typhusbacillus auf Fleischbrei hatten ein sehr kräftig wirkendes Toxin ergeben, das Typhotoxin, $C_7H_{17}NO_2$, welches Meerschweinchen injicirt, dieselben der Herrschaft über ihre willkürlichen Muskeln beraubt und auf die Darm- und Speichelsecretion anregend wirkt.

In der letzten Zeit habe ich mit den genannten Bakterien vorzugsweise auf frisch peptonisirtem Bluteiweiss operirt. Da den Typhusbakterien nur eine sehr geringfügige Kraft innewohnt, die Eiweisskörper zu peptonisiren, so liess sich hoffen, durch einen der Arbeitsleistung dieser Bakterien mehr zusagenden Nährboden, die Ausbeute an Ptomainen und Toxinen zu fördern.

Nach gehöriger Einwirkung von zur Peptonisirung geeigneten Fermenten und drüsigen Organen, wird dieses Nährsubstrat wiederholt sterilisirt und alsdann darauf der Typhusbacillus ausgesät.

Aus derartigen mittels Bluteiweiss hergestellten Culturen gewann ich nach den anderweitig geschilderten Methoden im Quecksilber-

---

[1] Deutsche med. Wochenschr. 1888.

chloridniederschlage Neuridin, ein dem Cadaverin (Pentamethylendiamin) $C_5H_{14}N_2 = NH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - NH_2$ isomeres Diamin.

Das Neuridin wurde als Pikrat isolirt, zeigte den Zersetzungspunkt bei 250° C und gab folgende Zahlenwerthe:

	Gefunden I	II	III	Berechnet für $C_5H_{14}N_2 \cdot 2C_6H_2(NO_2)_3OH$
C =	36.13	—	—	36.43 Procent
H =	3.73	—	—	3.57 »
N =	—	20.13	20.13	20.00 »

Das aus dem Pikrat dargestellte salzsaure Neuridin gab ein leichtlösliches Chloroplatinat und ein schwerlösliches Chloraurat, Eigenschaften, die neben der Beschaffenheit des Pikrates, das Neuridin gegenüber dem Cadaverin und dem dritten von mir gefundenen Diamin von der Formel $C_5H_{14}N_2$, dem Saprin, genügend unterscheiden lassen. Das Neuridin entsteht übrigens auch bei künstlicher Fäulniss von Eiweissstoffen sowie bei der Verwesung menschlicher Cadaver, und zwar stets in einer recht frühzeitigen Periode der Zersetzung.

Wird nun das Quecksilberchloridfiltrat mittels Natroncarbonates ausgefällt, so lässt sich aus dem zerlegten Niederschlage ein Ptomain darstellen, welchem gemäss der Analyse seines Pikrates die Formel $C_8H_{11}NO$ zugesprochen werden muss:

	Gefunden I	II	Berechnet für $C_8H_{11}NO \cdot C_6H_2(NO_2)_3OH$
C =	45.96	—	45.90 Procent
H =	3.63	—	3.82 »
N =	—	15.44	15.30 »

Einem Ptomain von dieser Zusammensetzung, dessen Pikrat gleichwie das analysirte Praeparat bei 195°C. schmilzt, bin ich bisher nur ein einziges Mal begegnet, nämlich bei der Verarbeitung menschlicher Leichen. Ich nannte dasselbe in Ermanglung der Kenntniss seiner Constitution vorläufig Mydin (μυδάω, ich verfaule).

Das Mydin geht nur mit Pikrinsäure eine handliche Doppelverbindung ein, die in breiten Prismen krystallisirt. Mit Platinchlorid liefert das salzsaure Mydin nach einiger Zeit einen äusserst leicht löslichen Platinsalmiak. Aus Goldchlorid wird sofort metallisches Gold niedergeschlagen. Das salzsaure Mydin krystallisirt in farblosen Blättchen, die sich mit Eisenchlorid und Ferricyankalium blau färben. Das freie Mydin reagirt stark alkalisch, riecht ammoniakalisch und zeichnet sich durch ein starkes Reductionsvermögen aus. Beim Destilliren zersetzt sich dieses Ptomain.

Soweit sich bis jetzt feststellen liess, scheint das Mydin gleichwie das Neuridin physiologisch unwirksam zu sein.

Ob das von Oechsner de Coninck[1] aus faulen Seepolypen dargestellte Ptomain $C_8H_{11}N$ mit dem Mydin in irgend welchem Zusammenhange steht, liess sich vorläufig nicht ermitteln.

Noch ein sehr giftiges Toxin wurde einige Male aus peptonisirtem Bluteiweiss erhalten. Dasselbe erregt heftige Durchfälle, bisweilen auch blutigen Urinabgang.

Mangel an Material hat noch nicht erlaubt, dem chemischen Studium dieses Toxin's näher zu treten.

Es ist doch auffällig, dass in allen meinen Versuchen mit dem sogenannten Typhusbacillus, so mannigfaltig dieselben auch abgeändert waren, keine Entzündung und keine Nekrose verursachenden Ptomaine sich fanden, während gerade der Typhus durch die Entzündung und Nekrose gewisser Bezirke der Darmschleimhaut gegenüber anderen Infectionskrankheiten als eigenartiger Krankheitstypus sich auszeichnet. Immerhin verdient dieser Umstand eine gewisse Beachtung, da er in schlagendem Gegensatz steht zur Cholera, bei der bekanntlich die gesammte Darmschleimhaut in heftigste Entzündung versetzt wird, deren Träger aber auch recht erhebliche Mengen von Cadaverin (Pentamethylendiamin) und Putrescin (Tetramethylendiamin), den bekannten Entzündung erregenden Ptomainen, producirt.[2] Sollte der Unterleibstyphus vielleicht gar eine Mischinfection sein, in dem von Ehrlich und mir in die Klinik eingeführten Sinne, demzufolge der sogenannte Typhusbacillus nur eine secundäre Rolle spielt?

Die Immunitätsversuche mit Milzbrand von Toussaint, Chauveau, Pasteur, Chamberland und Roux[3] lassen es wünschenswerth erscheinen, die Ptomaine, sowie überhaupt die Stoffwechselproducte des Milzbrands genauer zu erforschen.

Ein Milzbrandtoxin hat zuerst Hoffa[4] in Händen gehabt, ohne aber dessen chemische Natur ergründen zu können. Neuerdings hat Perdrix[5] das Auftreten von Ammoniak in Kalbsbouillon-Blutserum-Kuhmilch-Culturen von Milzbrandbacillen beobachtet, eine Thatsache, die ich dahin erweitern kann, dass fast alle von mir auf ihren Chemismus geprüften pathogenen Bakterien mehr oder weniger Ammoniak erzeugen.

Ich habe nun zunächst festgestellt, dass auch die Milzbrandbacillen, ähnlich wie gewisse Fäulnissbacillen und wie die Cholera-

[1] Compt. rend. 1888. t. CVI. p. 858.
[2] Berl. klin. Wochenschr. 1887. Nr. 44.
[3] Annales de l'Institut Pasteur. t. II. p. 405.
[4] Die Natur des Milzbrandgiftes. Wiesbaden 1886.
[5] Annales de l'Institut Pasteur. t. II. p. 354.

bakterien oxydirende Eigenschaften besitzen, indem sie das Kreatin allerdings nur in sehr geringem Maasse zu Methylguanidin oxydiren, also einen harmlosen Fleischbestandtheil in ein ziemlich heftiges Gift umwandeln. Das Methylguanidin habe ich in der Form seines Pikrates, das bei 192° C. schmolz, zur Analyse verwenden können.

	Gefunden I	Gefunden II	Berechnet für $C_2H_7N_3 \cdot C_6H_2(NO_2)_3OH$
C =	31.67	—	31.78 Procent
H =	3.8	—	3.31 »
N =	—	27.51	27.81 »

Das in Wasser gelöste Pikrat wurde mit Salzsäure versetzt und diese Lösung sehr oft mit Aether bis zur gänzlichen Entfernung der Pikrinsäure ausgeschüttelt. Das farblose Filtrat zum dünnen Syrup eingedampft, krystallisirte im Vacuum zu derben Prismen, die in Alkohol unlöslich sind, mit Platinchlorid sehr leicht lösliche Nadeln, mit Goldchlorid ein bei 198° C. schmelzendes Golddoppelsalz lieferten.

Auch die Verbindungen des hier vorliegenden Chlorhydrates mit den Alkaloidreagentien charakterisirten das Methylguanidin in nicht zu verkennender Weise. Dieses Chlorhydrat verbindet sich ausserdem noch mit Phosphormolybdänsäure zu einem gelben krystallinischen Niederschlage, mit Kalium-Wismuthjodid zu einem ziegelrothen Pulver, mit Jod-Jodkalium und jodhaltiger Jodwasserstoffsäure zu öligen Tropfen.

Diese Umsetzung des Kreatin's in Methylguanidin durch die Milzbrandbacillen findet aber nur statt, wenn diese Bacillen in Bouillon, welcher peptonisirtes Bluteiweiss enthielt, gezüchtet wurden, während in reinen Bouillonculturen der Milzbrandbacillen eine derartige Umwandlung sich nicht vollzieht. Hier scheint ein anderes Ptomain vorzukommen, das aber gleichfalls dem Kreatin nahe steht. Das Pikrat dieser Substanz, welches bisher nur zweimal isolirt wurde, enthält 23.0 Procent Stickstoff, doch ist eine scharfe Trennung derselben vom Kreatinin noch nicht geglückt.

Die Beziehung der genannten Ptomaine zur Immunität muss weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Ausgegeben am 17. Januar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.

III.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

17. Januar. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Schulze las über die Bezeichnung und Verbreitung der verschiedenen Spongiennadelformen.

Spätere Drucklegung bleibt vorbehalten.

2. Hr. von Helmholtz legte vor eine Abhandlung von Hrn. Dr. Nernst in Leipzig zur Theorie umkehrbarer galvanischer Elemente.

Die Mittheilung erfolgt in einem der nächsten Berichte.

3. Hr. Waldeyer legte vor eine Abhandlung des Hrn. Dr. med. W. Nagel hierselbst über die Entwickelung der Müller'schen Gänge bei dem Menschen.

Die Mittheilung folgt umstehend.

4. Hr. Mommsen legte die von Hrn. Prof. Pais in Pisa im Auftrag der römischen Accademia de' Lincei herausgegebenen Supplementa Italica zum fünften Oberitalien umfassenden Bande des Corpus Inscr. Latinarum vor und sprach die Hoffnung aus, dass die übrigen italischen Bände in ähnlicher Weise dort Fortsetzung finden werden, da die von der Berliner Akademie selbst in Zukunft herauszugebenden Supplemente durch solche örtliche Publicationen sowohl zunächst vertreten wie auch weiterhin vorbereitet werden.

5. Hr. Auwers überreichte im Namen des Verfassers eine gedruckte Abhandlung des Hrn. Prof. Dr. A. Stenzel in Breslau »über die Gattung *Tubicaulis* Cotta«.

6. Durch Erlass des vorgeordneten Königlichen Ministeriums vom 17. December ist die Akademie in Kenntniss gesetzt, dass auf ihren Antrag zur Vollendung der topographisch-archäologischen Aufnahme von Attica ein in sechs Jahresraten zu zahlender Zuschuss von 25300 Mark bewilligt worden ist.

7. Die physikalisch-mathematische Classe hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt: 900 Mark Hrn. Dr. von Rebeur-Paschwitz, z. Zt. in Potsdam, als weitere Beihülfe zu seinen Untersuchungen über Veränderungen der Lothlinie; 500 Mark an Hrn. Dr. Schönfliess in Göttingen zur Herstellung von Modellen zu Gruppen von Transformationen des Raumes; die philosophisch-historische Classe hat bewilligt 700 Mark an Hrn. Prof. Dr. Niese zur Vervollständigung seines handschriftlichen Apparates zur Ausgabe des Josephus.

8. Die Akademie hat in ihrer Sitzung am 6. December v. J. ihre bisherigen Correspondenten, Hrn. Geheimen Regierungsrath Dr. Ernst Dümmler hierselbst, Vorsitzenden der Centraldirection der Monumenta Germania ehistorica, und den ordentlichen Professor für Geschichte an der hiesigen Universität Hrn. Dr. Ulrich Koehler zu ordentlichen Mitgliedern ihrer philosophisch-historischen Classe erwählt. Beide Wahlen sind durch Allerhöchsten Erlass vom 19. December v. J. bestätigt worden.

9. Hr. L. Boltzmann in Graz, welcher zum ordentlichen Mitgliede der physikalisch-mathematischen Classe der Akademie erwählt und in dieser Eigenschaft durch Allerhöchsten Erlass vom 29. Juni v. J. bestätigt worden war, hat auf den Antritt seiner hiesigen Stellung verzichtet und ist demnach statutenmässig nach Ablauf der vorgeschriebenen Frist unter die Ehrenmitglieder der Akademie eingereiht.

Über die Entwickelung der MÜLLER'schen Gänge beim Menschen.

Von Dr. W. NAGEL
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. WALDEYER.)

Während ältere Forscher, wie JOHANNES MÜLLER (Bildungsgeschichte der Genitalien aus anatomischen Untersuchungen an Embryonen des Menschen und der Thiere, Düsseldorf 1830), TH. L. W. BISCHOFF (Entwickelungsgeschichte der Säugethiere und des Menschen, Leipzig 1842) u. A., annehmen, dass der MÜLLER'sche Gang — bei den höheren Wirbelthieren — sich durch Abspaltung von dem WOLFF'schen Gange bildet, kamen spätere Forscher, wie BORNHAUPT (Dissertation in Dorpat, angeführt bei WALDEYER u. A.), WALDEYER (Eierstock und Ei, Leipzig 1870), EGLI (Beiträge zur Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Genitalien, Zürich 1876), GASSER (Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Allantois, der MÜLLER'schen Gänge und des Afters, Frankfurt a. M. 1874), KÖLLIKER (Lehrbuch der Entwickelungsgeschichte, Leipzig 1879), JANOSIK (Histologisch-embryologische Untersuchungen, XCI. Band der Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, III. Abtheilung, Februarheft 1885) u. A. zu dem Ergebnisse, dass der MÜLLER'sche Gang — bei den höheren Wirbelthieren — sich unabhängig von dem WOLFF'schen Gange bildet und zwar durch Einstülpung eines bestimmten Theiles des Epithels des WOLFF'schen Körpers. Diese Einstülpung geschieht nach einigen Forschern (BORNHAUPT, EGLI, GASSER, KÖLLIKER) nur an dem oberen (abdominalen) Ende und der MÜLLER'sche Gang wächst alsdann als eine, Anfangs solide, Epithelsprosse abwärts ohne fernere Betheiligung des Oberflächenepithels des WOLFF'schen Körpers und ohne eine Verbindung mit dem WOLFF'schen Gange einzugehen, um schliesslich den Sinus Urogenitalis dicht neben der Einmündungsstelle der WOLFF'schen Gänge zu erreichen. Abweichend hiervon behauptet WALDEYER, dass die Einstülpung des Oberflächen-

epithels in der ganzen Länge des Wolff'schen Körpers geschieht, so dass in dieser Weise eine Rinne sich bildet, welche sich nach und nach zum Müller'schen Gange schliesst; nur im Bereiche der Plica Urogenitalis (im Sinne Waldeyer's) wächst nach demselben Autor der Müller'sche Gang als solide Sprosse weiter bis zur Einmündungsstelle in den Sinus Urogenitalis.

Die Forschungen der neuesten Zeit auf diesem Gebiete haben, was die niederen Wirbelthiere betrifft, ein von den zuletzt angeführten abweichendes Ergebniss zu Tage gebracht, indem der Müller'sche Gang bei diesen Thierkreisen in der That durch Abspaltung aus dem Wolff'schen Gange entsteht. (Semper, Balfour, Hoffmann, Fürbringer, angeführt bei O. Hertwig, Lehrbuch der Entwickelungsgeschichte, Jena 1888, 2. Auflage). Was die höheren Wirbelthiere betrifft, so haben, ebenfalls in der neuesten Zeit, Balfour und Sedgwick (On the Existence of a Head-kidney in the Embryo Chick and on some Points in the Development of the Müllerian Duct. — Studies from the Morphological Laboratory in the University of Cambridge, I, London 1880) beim Huhn gefunden, dass das blinde Ende des oben erwähnten, durch die Einstülpung des Epithels des Wolff'schen Körpers entstandenen, Trichters nicht selbstständig nach hinten wächst, sondern sich mit der ventralen Wand des Urnierenganges in Verbindung setzt und sich auf Kosten derselben vergrössert.

Was nun den Menschen betrifft, so war bis jetzt die erste Entwickelung des Müller'schen Ganges in Dunkel gehüllt, denn unsere Kenntnisse über die Müller'schen Gänge, welche wir besonders Johannes Müller, Waldeyer, Dohrn (zur Kenntniss der Müller'schen Gänge und ihrer Verschmelzung, Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg, Bd. IX, Marburg und Leipzig 1872), Tourneux und Legay (Mémoire sur le developpement de l'Uterus et du vagin, Journal de l'Anatomie et de Physiologie, 1884). Kölliker (Einige Beobachtungen über die Organe jüngerer menschlicher Embryonen, Sitzungsberichte der Würzburger Phys. und Medicin. Gesellschaft, Nr. 6, 1883), van Ackeren (Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der weiblichen Sexualorgane des Menschen, Inaugural-Dissertation; Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, Bd. 48) verdanken, gehören einer späteren Entwickelungsstufe an. Bei zwei menschlichen Embryonen von 7^{mm} und $7^{mm}.5$ Länge fand His (Anatomie menschlicher Embryonen, Leipzig 1885) den Müller'schen Gang noch nicht angelegt, dagegen sah er das Epithel in einer Rinne lateralwärts von der Urnierenleiste um beinahe das doppelte verdickt und er bezeichnet diese Stelle als diejenige, wo später der Müller'sche Gang sich bilden wird.

Ich habe nun im Laufe des letzten Jahres im hiesigen anatomischen Institute eine grössere Anzahl menschlicher Embryonen untersucht und verdanke das Material Hrn. Prof. Dr. Gusserow. Die meisten dieser Embryonen habe ich frisch in die Härtungsflüssigkeit (Müller'sche oder Flemming'sche Mischung) eingelegt, und dieselben waren so wohlerhalten, dass ich daraus Aufschlüsse über die erste Entwickelung der Müller'schen Gänge des Menschen habe gewinnen können.

Die Embryonen wurden in der üblichen Weise gefärbt, in Paraffin eingebettet und mittels Mikrotom in Reihenschnitte zerlegt.

Der jüngste menschliche Embryo, bei welchem ich einen deutlich angelegten Müller'schen Gang fand, hatte eine Länge von 12^{mm}. Der Wolff'sche Körper dieses Embryo zeigt den anatomischen Bau eines in voller Thätigkeit sich befindenden absondernden Organs: zahlreiche und wohlerhaltene Malpighi'sche Glomeruli, welche durch Kanälchen, deren Wände mit einem niedrigen Cylinderepithel bekleidet sind, mit einem grösseren abführenden Gange, dem Wolff-schen Gange, in Verbindung stehen. Dieser verläuft an der äusseren Seite der Urniere, ist an seinem abdominalen Ende offen und mündet distal in den Sinus urogenitalis, nach innen und etwas oberhalb des Nierenganges (im Sinne Kupffer's). In der oberen Hälfte der Urniere verläuft nun neben dem Wolff'schen Gange und zwar mehr nach aussen ein zweiter Kanal, welcher mit einem von demjenigen des Wolff'schen Ganges kaum zu unterscheidenden niedrigen Cylinderepithel ausgekleidet wird und welcher weder mit dem Wolff'schen Gange noch mit den übrigen Kanälchen der Urniere in Verbindung steht. Dieser Gang, den ich als den Müller'schen deute, ist an seinem distalen Ende offen: das Epithel des Ganges steht mit dem Oberflächenepithel in Verbindung und geht allmählich in dieses über; das untere (distale) Ende bildet also eine sich nach abwärts allmählich abflachende Rinne.

Unterhalb dieser Stelle, also in der unteren Hälfte des Wolff-schen Körpers, bis zur Einmündung des Wolff'schen Ganges in den Sinus Urogenitalis, ist keine Spur von dem Müller'schen Gange zu sehen; dagegen ist das Oberflächenepithel deutlich verdickt längs der äusseren Seite der Urniere als Andeutung der Stelle, wo in der Folge die Einstülpung vielleicht sich bilden wird. Derjenige Theil der Urniere, wo das obere proximale Ende des Müller'schen Ganges sich befand, gieng bei diesem Embryo durch eine unglückliche Schnittführung zu Grunde; bei allen anderen Embryonen habe ich das obere Ende des Müller'schen Ganges ebenfalls stets offen gefunden.

Bemerken will ich noch, dass der hier erwähnte Embryo, dem Aussehen des Keimepithelwulstes nach, ein weiblicher ist, während

ein anderer von annähernd derselben Grösse (13^{mm}) und Entwickelungsstufe, und welchen ich als einen männlichen ansehe (vergl. meine Mittheilung in diesen Sitzungsberichten, 18. October 1888), noch an keinem Theile des Wolff'schen Körpers die Anlage des Müller'schen Ganges erkennen lässt.

Wie weit die oben erwähnte rinnenförmige Einstülpung abwärts geht, ein wie grosses Stück des Müller'schen Ganges in dieser Weise entsteht, vermag ich nicht mit Bestimmtheit zu entscheiden, jedenfalls erstreckt sich die Einstülpung, dem oben geschilderten Befunde nach, über ein grösseres Stück des Ganges, als bloss das abdominale Ende (Bornhaupt, Egli, Gasser), und kann ich bezüglich dieses proximalen Theiles für den Menschen die Angaben Waldeyer's bestätigen. Bei menschlichen Embryonen von 18^{mm} bis 20^{mm} Länge steht der Müller'sche Gang nur an seinem abdominalen (oberen proximalen) Ende in Verbindung mit dem Oberflächenepithel des Wolff-schen Körpers, indem derselbe an dieser Stelle frei in die Bauchhöhle mündet. Das Epithel des Ganges besteht jetzt aus hohen Cylinderzellen mit länglichen Kernen, während der Wolff'sche Gang mit einem aus cubischen Zellen mit rundlichen Kernen bestehenden Epithel ausgekleidet ist. Durch diesen Unterschied des Epithels, welcher an mit Flemming'scher Lösung behandelten Embryonen ganz auffällig ist, sind die beiden Gänge sehr leicht von einander zu unterscheiden. In dem oberen Theil der Urniere verläuft der Müller'sche Gang an derselben Stelle, wie bei dem vorigen Embryo geschildert, nämlich nach aussen vor dem Wolff'schen. Sein unteres Ende steht in keiner nachweisbaren Verbindung mit dem Oberflächenepithel, wie es bei dem vorigen Embryo der Fall war; dagegen zeigt dasselbe folgendes Verhalten.

Im Beginn der unteren Hälfte des Wolff'schen Körpers nähert sich der Müller'sche Gang dem Wolff'schen und legt sich etwas weiter abwärts dicht an denselben an, so dass das Epithel der beiden Gänge nur durch ihre verschiedene Gestalt von einander zu unterscheiden ist. An dem vierten Reihenschnitte (quer durch den Embryo gelegt) unterhalb dieser Stelle hat der Müller'sche Gang kein Lumen mehr, sondern bildet nur eine, durch die eigenartigen Epithelzellen deutlich erkennbare, Verdickung der ventralen Wand des Wolff'schen Ganges. Noch ist diese Verdickung von beträchtlichem Umfange, nimmt aber Schnitt für Schnitt ab um acht Reihenschnitte weiter unten ganz zu verschwinden. Da wo der Müller'sche Gang noch ein deutliches Lumen hat, liegt er dem Oberflächenepithel dicht an, ist von diesem aber durch eine Basalmembran deutlich abzugrenzen; je mehr er mit dem Wolff'schen Gange verschmilzt, um

so mehr entfernt er sich auch von dem Oberflächenepithel. Unterhalb dieser Stelle ist nichts mehr weder von dem MÜLLER'schen Kanal noch von einer Epithelsprosse zu sehen.

Für diesen Befund ist nur eine Deutung möglich: der MÜLLER'sche Gang ist mit dem WOLFF'schen Gange verschmolzen. Die weitere Entwickelung des MÜLLER'schen Ganges geschieht demnach beim Menschen in Verbindung mit dem WOLFF'schen Gange. Ich kann aber nicht BALFOUR und SEDGWICK beipflichten, dass diese Entwickelung in Form einer Abspaltung auf Kosten des WOLFF'schen Ganges stattfinde, dass also die Zellen des WOLFF'schen Ganges das Baumaterial für den MÜLLER'schen Gang abgeben. Ich glaube vielmehr annehmen zu müssen, dass der MÜLLER'sche Gang durch Vermehrung der eigenen Zellen weiter wächst, und ich begründe diese Annahme damit, dass die eigenthümlichen Zellen des MÜLLER'schen Ganges bis zur äussersten Spitze desselben innerhalb der ventralen Wand des WOLFF'schen Ganges deutlich zu erkennen sind und dass man nirgends Übergangsformen zwischen den Zellarten der beiden Gänge sieht.

Der MÜLLER'sche Gang wächst also innerhalb der ventralen Wand des WOLFF'schen Ganges abwärts aber auf eigene Kosten; er benutzt, so zu sagen, den WOLFF'schen Gang als Leiter um den Sinus Urogenitalis zu erreichen. Nur in diesem Sinne ist die Verbindung mit dem WOLFF'schen Gange aufzufassen.

Meine Untersuchungen haben ferner gezeigt, dass die Verschmelzung der MÜLLER'schen und WOLFF'schen Gänge mit einander in gleicher Weise bei männlichen und bei weiblichen Embryonen geschieht, und dass die sogenannte Abspaltung des MÜLLER'schen Ganges von dem WOLFF'schen Gange in gleicher Weise bei beiden Geschlechtern allmählich weiter abwärts schreitet. Jedoch scheint es als ob dieser Vorgang schneller abläuft bei weiblichen als bei männlichen Individuen. Bei einem weiblichen Embryo von 3^{cm} Länge fand ich schon die Ausbildung des MÜLLER'schen Ganges vollendet bis zur Einmündung der WOLFF'schen Gänge in den Sinus Urogenitalis.

Es ist bekannt, dass im Bereiche des WOLFF'schen Körpers die MÜLLER'schen Gänge lateralwärts liegen und die WOLFF'schen medial, während im Bereiche des Genitalstranges (im Sinne von THIERSCH) das umgekehrte der Fall ist. Diese Kreuzung der Lage hängt mit der Bildung des Genitalstranges zusammen; der letztere kommt nämlich, meinen Untersuchungen beim Menschen zu Folge, dadurch zu Stande, dass die Spitzen der WOLFF'schen Körper, in welchen der WOLFF'sche Gang (bez. auch der MÜLLER'sche) verläuft, sich fusswärts mehr und mehr nach innen, nach der Mittellinie des embryonalen Körpers zu, umbiegen, um schliesslich mit einander zu verschmelzen, etwa in

derselben Weise, wie man aus einem elastischen Stabe durch Biegung desselben einen Kreis bildet. Dadurch müssen nothwendig die früher nach aussen belegenen MÜLLER'schen Gänge (bez. diejenige Wand des WOLFF'schen Ganges, innerhalb welcher der MÜLLER'sche wächst) jetzt nach innen zu liegen kommen, einander unmittelbar berührend.

Die Bildung des Genitalstranges geschieht beim Menschen zu einer Zeit, wo die Ausbildung des MÜLLER'schen Ganges noch nicht so weit gediehen ist: auf einer gewissen Stufe der Entwickelung enthält der Genitalstrang sowohl bei männlichen wie bei weiblichen Individuen nur zwei parallel neben einander verlaufende Kanäle, nämlich die beiden WOLFF'schen Gänge.

Die Verschmelzung der MÜLLER'schen Gänge mit einander scheint nicht immer von oben nach unten, wie allgemein gelehrt wird, oder von unten nach oben (THIERSCH, Bildungsfehler der Harn- und Geschlechtswerkzeuge eines Mannes. Illustrirte medicinische Zeitung I. Band I. Heft 1852) zu geschehen. Die Verschmelzung findet vielmehr an mehreren verschiedenen Stellen der Berührungsfläche auf einmal statt: auf Reihenschnitten quer durch den Genitalstrang trifft man im ganzen Bereich des späteren Corpus Uteri bei einem und demselben Embryo bald zwei vollständig von einander getrennte Lumina, bald nur eins in wechselnder Reihenfolge, dazwischen alle möglichen Übergangsstufen.

Da, wo die vereinigten MÜLLER'schen Gänge in den Sinus urogenitalis einmünden, bildet sich, nach meinen Untersuchungen, beim Menschen die Portio vaginalis und zwar bildet sich die hintere Muttermundlippe zuerst und dadurch, dass das Epithel der hinteren Wand des Sinus urogenitalis, etwas unterhalb der Einmündungsstelle der MÜLLER'schen Gänge, in das dahinter liegende Gewebe einwuchert. Bis zur Einmündung in den Sinus urogenitalis sind die vereinigten MÜLLER'schen Gänge mit einem hohen Cylinderepithel ausgekleidet, welches vielleicht sogar mehrschichtig ist, während der Sinus urogenitalis ein kubisches Epithel trägt. Der Entscheid über ein einschichtiges oder mehrschichtiges Epithel konnte noch nicht mit Sicherheit gegeben werden, weil eine schiefe Richtung der Schnitte ein mehrschichtiges Zellenlager vortäuschen kann. Das letzte Stück der vereinigten MÜLLER-schen Gänge wird zum Cervicalkanal und nicht, wie sonst gelehrt wird, zur Vagina; die Mündung in den Sinus urogenitalis wird zum Orificium externum uteri. Dafür, dass das unterste Stück der vereinigten MÜLLER'schen Gänge wirklich zum Cervicalkanal wird, spricht, ganz abgesehen davon, dass man an Längsschnitten die Gestalt der hinteren Muttermundlippe deutlich erkennen kann, ferner der Umstand, dass in diesem untersten Stück das oben erwähnte hohe Cylinderepithel an mehreren Stellen sich stärker vermehrt und über

das Niveau des übrigen Epithels sich erhebt. Hierdurch erhält die innere Epithelfläche, nach dem Lumen des Kanals zu, ein welliges Aussehen. Diese Epithelwucherungen sind, meines Erachtens, die Anlage der Plicae palmatae (vergl. auch F. VAN ACKEREN).

Der Embryo, welcher am deutlichsten die zuletzt geschilderten Verhältnisse zeigte, hatte eine Steiss-Kopflänge von 4^{cm} und war ganz frisch in FLEMMING'sche Lösung gelegt worden.

Ausgegeben am 24. Januar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.
IV.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

24. Januar. Öffentliche Sitzung zur Feier des Geburtstags Friedrichs II. und zur Feier des Geburtstags Seiner Majestät des Kaisers.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

Der vorsitzende Secretar eröffnete die Sitzung, welcher Seine Excellenz der vorgeordnete Minister Hr. von Gossler beiwohnte, mit folgender Festrede:

Wir stehen am Beginn eines neuen Jahres. Schwer hat das abgelaufene unser Vaterland getroffen. Zwei Kaiser sind im Laufe desselben in die Gruft gelegt worden; zweimal in dieser kurzen Spanne hat der die Herzen wie die Verhältnisse erschütternde Thronwechsel stattgefunden. Dem hochbetagten Kaiser Wilhelm ist allzu früh der Sohn nachgestorben. Es ist der Akademie nicht vergönnt gewesen dem Sieger von Königgrätz und Wörth, dem Mitbegründer des deutschen Reiches, dem vielgeliebten zweiten deutschen Kaiser die Festfeier auszurichten, welche das auf die Lippen gebracht hätte, was alle Herzen empfanden; als dieser Geburtstag Friedrichs des Dritten herankam, lag er bereits seit Monaten im Grabe. Aber heute blicken wir nicht zurück; wir blicken vorwärts. Der König von Preussen, der deutsche Kaiser stirbt nicht. Ewig wie unsere Nation ist unser Regiment. Wir bewahren wohl in sicherer Erinnerung das individuelle Bild eines jeden Herrschers; aber es ist mehr als unsere Pflicht, es ist unser Recht und unser Stolz die Treue und die Liebe von einem Herrscher auf den anderen zu übertragen und unbedingt

und unbetagt wie dem Greise so dem Manne und dem Jüngling in freier Ergebenheit zu dienen.

Der heutige Tag ist für die Akademie ein zweifaches Fest. Es ist der Geburtstag Friedrichs des Zweiten, des Herrschers, den kein Nachfolger in Schatten stellen kann und der immer der Grosse und der Einzige bleiben wird, des Schöpfers unserer Akademie. Drei Tage später fällt der Geburtstag Seiner Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm II., sein einunddreissigster, der erste seit seiner Thronbesteigung. Die Akademie, durch ihre Statuten angewiesen beide Tage öffentlich zu begehen, hat beschlossen, was sich in der That von selbst versteht, die Doppelfeier zusammenzufassen, und zu diesem Zwecke sind wir heute versammelt. Gestatten Sie mir nach altem akademischen Herkommen dies auf meine Weise zu thun. Wir feiern unsere Feste in unserer eigenen Art; es sind die allgemeinen der Nation, aber wie diese für jeden Staatsbürger sich mehr oder minder mit dem eigenen Thun und Treiben verknüpfen, so gilt für uns besonders auch hier das Recht der wissenschaftlichen Individualität. Wir können nicht den Anspruch machen den Erinnerungen, welche an den Namen Friedrichs II., den Hoffnungen, welche an denjenigen Wilhelms II. sich knüpfen, auch nur annähernd Worte zu leihen; wer von uns möchte eines davon unternehmen oder gar beides verbinden? Aber mich hat der heutige Tag an eine Festzeit erinnert, die auch einem jungen Herrscher galt und die durch die Lieder eines der Dichter, die mit diesem Herrscher gingen, heute noch, obwohl seitdem zwei Jahrtausende verflossen sind, in ewiger Frische vor uns steht. Wie Friedrich II., wie unser gegenwärtiger Kaiser, so ist auch derjenige Herrscher, welcher den Kaisernamen mit der Monarchie verknüpft hat, Caesar Augustus als Jüngling zum Regiment gekommen. Als in schweren Kämpfen und Krämpfen die alte Staatsform zertrümmert und die Sammtherrschaft beseitigt, die Monarchie entschieden war, als der Augenblick kam, in welchem die neue Staatsordnung förmlich und feierlich ins Leben trat, da gab der Dichter Horaz dem grossen Neubau die dichterische Weihe. Die ersten sechs Gedichte des dritten Buches seiner Lieder bilden ein Ganzes und sind bestimmt den neuen Namen Augustus zu feiern und die an diesen Namen sich knüpfenden Gedanken zusammenzufassen. An diese Lieder will ich Sie erinnern: denn Sie kennen sie wohl. *Odi profanum volgus et arceo* — *Iustum et tenacem propositi virum* — es sind Ihnen allen bekannte Klänge aus der Jugendzeit. Aber anders lesen Knaben den Horaz als ich ihn heute Ihnen vorführen möchte, in der Gesammtbeleuchtung eines grossen historischen Vorgangs; und wie zur Rose der Sonnenschein, so gehört zu diesen Liedern der Hintergrund der Geschichte.

Das einleitende Gedicht ist wie billig allgemein gehalten. Die Geschicke der Menschen, wie sie jetzt sich gestalten werden, will der Dichter offenbaren. Er spricht wie jeder Prophet zu den Glaubenden; die Gemeinen, die für die neue Offenbarung Unempfänglichen, auszuweisen ist sein erstes Wort;[1] sein zweites, dass er zu der Jugend redet, den Jünglingen und den Mädchen,[2] dass der neue Gesang an das kommende Geschlecht sich wendet. Drei Generationen hindurch hatte in dem gewaltigen Reiche, das unbestritten die Herrschaft über die Welt besass, innerer Hass und blutige Fehde gewüthet; nicht an die Alten und Kalten, an die frischen Gemüther der noch bestimmbaren jungen Welt wendet sich der Prophet der Monarchie.

Den Glauben an das unabänderliche Schicksal stellt der Dichter voran. Über die Menschen herrscht der König, über die Könige Jupiter, der Bezwinger der Giganten, vor dessen Wink die Welt erbebt; er denkt an Augustus, den Besieger des Antonius, den Herrn Roms und des Erdkreises; denn dem Römer ist der Erdkreis das Reich. Aber über Alles und über Alle gebietet die Nothwendigkeit. Die Menschen sind wohl verschieden. Der eine Gutsherr zählt weitere Rebenstrecken als der andere; dieser Edelmann hat mehr Ahnen aufzuweisen als jener und mehr Hoffnung auf Beförderung; der eine besseren Leumund, der andere grösseren Einfluss; aber das Loos des Todes ziehen sie alle gleichmässig aus der Urne des Schicksals, die Hohen wie die Niederen.[3] Ruhiges Leben giebt allein der innere Friede. Wem die schlimme Begierde am Herzen nagt,[4] dem wird es nicht gelingen, sich in das allgemeine Menschenschicksal gefassten Sinnes zu finden. Die niedere Hütte, die mässige Häuslichkeit sucht der befriedete Schlaf am liebsten auf.[5] Er flieht den Kaufmann, der, wenn im Herbst die Stürme brausen, seiner Schiffe auf den fernen Meeren gedenkt; er flieht den grossen Grundherrn, dem Hagelschlag und Überschwemmung, trockener Sommer oder harter Winter die gehofften Ernten zerstören. Wohl mag der Reiche sein Landhaus ins Meer hineinbauen, Werkstein um Werkstein in die Fluthen versenken und den Fischen ihr Reich schmälern; darum nicht weniger gehen Furcht und Angst mit ihm auf Schritt und Tritt und sitzt die schwarze Sorge neben ihm, wenn er zu Schiff fährt, und hinter ihm auf, wenn er zu Pferde steigt.[6] Wohl dem, schliesst der Dichter,

---

[1] *odi profanum vulgus et arceo.*

[2] *virginibus puerisque canto.*

[3] *aequa lege Necessitas sortitur insignes et imos.*

[4] *super impia cervice.*

[5] *somnus agrestium lenis virorum non humiles domos fastidit.*

[6] *neque decedit aerata triremi et post equitem sedet atra cura.*

der, wie er selbst, mit Mässigem zufrieden ist[1] und dem die Mühsal des Reichthums erspart wird.

Diese Lebensauffassung, gemischt aus dem Behagen an dem eigenen Kleinleben und dem Verzagen an der grossen Gesammtthätigkeit der Nation, geht durch den ganzen Poeten, man kann sagen durch die ganze damalige Welt. Hier tritt sie einleitend auf zu der weiteren Entwickelung, die der neue Augustus den römischen Dingen giebt.

Das folgende Gedicht preist ebenfalls allgemein die Tapferkeit und die Rechtschaffenheit, aber beide mit besonderer Beziehung auf zwei der wichtigsten Institutionen der neuen Monarchie: den neuen Stand des Berufssoldaten und den ebenfalls neuen des kaiserlichen Beamten. Wie die stehende Armee erst durch Augustus definitiv organisirt worden ist, so ist die Schaffung des Berufssoldaten im Gegensatz zu dem Bürgersoldaten der Republik ein Werk des Augustus. Die Offiziere gingen nach augustischer Ordnung mit verschwindenden Ausnahmen hervor aus den beiden bevorrechteten Adelskategorien und es gab kein Avancement vom Gemeinen zum Offizier. Die Gemeinen aber werden genommen aus den niederen Klassen, allerdings unter Ausscheidung der gewesenen Sclaven und für die Legionen auch der rohen Landbevölkerung; die freigeborenen unbemittelten Stadtbürger sollten, hauptsächlich durch freiwillige Stellung, die Soldaten wie die Unteroffiziere liefern. Das liegt zu Grunde bei dem wohlbekannten Spruch des Dichters: mit knappem Auskommen sich gern begnügen lerne im schneidigen Kriegsdienst die tapfere Jugend und zu Pferde dem Parther die Spitze bieten;[2] wobei weiter daran gedacht ist, dass die ganz verschwundene Bürgerreiterei durch Augustus wieder in's Leben gerufen ward. Dieser Soldat ist zu Besserem berufen als zum Politisiren. Die Ehren des Tapferen haben nichts zu schaffen mit dem unsauberen Treiben des Wahlgeschäfts;[3] er nimmt und verliert nicht die Lictorenbeile nach der Laune der Menge;[4] sein Beruf ist der Kriegsdienst, seine Freude und sein Stolz für das Vaterland zu sterben — *dulce et decorum est pro patria mori.* Das ist der Soldat der Monarchie, der arme römische Bürgersmann, der nach zwanzigjährigem Dienst, wenn es ihm nicht beschieden war für sein Vaterland zu sterben, als ausgedienter Unteroffizier seine Altersversorgung in bürgerlicher Ruhe findet.

---

[1] *desiderantem quod satis est.*

[2] *angustam amice pauperiem pati robustus acri militia puer condiscat et Parthos feroces vexet eques.*

[3] *virtus repulsae nescia sordidae intaminatis fulget honoribus.*

[4] *nec sumit aut ponit secures arbitrio popularis aurae.*

Unvermittelt, nicht eben poetisch wohl angeknüpft und mit kurzem Wort wird der Preis eines zweiten Standes angeschlossen, dessen Ehre der Fleiss und der Gehorsam ist: es sind die neuen kaiserlichen Verwaltungsbeamten, denen gleich den Soldaten die eigentlich politische Laufbahn, der Reichsdienst verschlossen ist, die aber im Dienst des Kaisers vor allem bei der Steuerhebung, aber auch sonst in administrativen Geschäften jeder Art mannichfach verwendet werden. Dem Dichter sind sie nicht bequem gewesen; Amtführung und Gewissenhaftigkeit zu besingen ist schwierig. Aber man fühlt es ihm nach, wenn er der schweigsamen Treue ihr Lob zollt[1] und von dem Fluche spricht, welcher an Unredlichkeit und Vertrauensbruch sich heftet.[2] Diese von Augustus in's Leben gerufene zweite Kategorie von Beamten ist es gewesen, durch die es der Monarchie gelang die entsetzliche Misswirthschaft des Adelsregiments zu beseitigen und diejenige Ordnung in die Verwaltung zu bringen, welche auch unter den vielfachen Übelständen der Hofwirthschaft auf Jahrhunderte hinaus von Segen blieb.

Das dritte der sechs Feiergedichte greift unmittelbar ein in die politischen Zeitfragen. Es führt uns in den Götterrath und zeigt, in welcher Weise Rom die fast verscherzte Gunst der Olympischen wiedergewonnen hat und unter welchen Voraussetzungen sie ihm bleiben wird. Deutlich wird hier hingewiesen auf die Kleopatra mit ihrem Buhlen: sie ist die *mulier peregrina*, die Ausländerin, die *Lacaena adultera*, die griechische Ehebrecherin, durch die Ilion zu Grunde gegangen ist und an der auch Rom zu Grunde gegangen sein würde, wenn es ihr gelungen wäre vereint mit dem von ihr berückten römischen Gast[3] Ilion abermals aufzurichten. Darin liegt ohne Zweifel eine bestimmte Beziehung. Caesar dem Dictator ist es nachgesagt worden, dass er beabsichtigt habe die Hauptstadt seiner neuen Monarchie nach Troia zu verlegen. Dies meint der Dichter nicht, da es mit den damaligen Verhältnissen nichts zu thun hat und überhaupt sein Tadel sich nicht gegen den Vater des Augustus und den Anbahner des neuen Regiments richten kann; aber es ist kaum zu bezweifeln, dass eine ähnliche Rede gegen Antonius in Umlauf war. Wir wissen, dass er der Unholdin, welcher er verfallen war, ihr Königreich mit erweiterten Grenzen zurückgeben, dass er aus den Ostreichen Armenien und Syrien Dependenzstaaten des Reiches gestalten wollte; Kleopatras mit Caesar und mit ihm

---

[1] *est et fideli tuta silentio merces.*

[2] *raro antecedentem scelestum deseruit pede Poena claudo.*

[3] *famosus hospes.*

selbst im Ehebruch erzeugten Kinder waren gedacht als die geeigneten Herren dieser römisch-orientalischen Bastardreiche. Welche Rolle er dabei sich zugedacht hatte, wird durch den Gegensatz klar: das eigentlich römische Ostreich sollte das seinige sein und, wie es Caesar gedacht haben sollte, das neue Ilion dessen Hauptstadt. Dies war die Auslieferung der römischen Weltherrschaft an den Orient, die Knechtung Italiens durch die besiegten Griechen und Halbgriechen; diese Auslieferung ist durch den Sieg am actischen Vorgebirge verhindert worden. Das wendete ab von Rom der gerechte und entschlossene Mann, *iustus vir et propositi tenax*, welcher mit festem Sinn, *mente solida*, unbeirrt durch die Verkehrtheit irregeleiteter Bürger, ungeschreckt durch die Macht des Tyrannen, über die stürmischen Wogen des adriatischen Meeres hin[1] die Römer nach Actium führte und es darauf wagte, dass der Erdkreis über ihm und den Seinen zusammenbreche — *si fractus inlabatur orbis, impavidum ferient ruinae*. Also ist der lange Bürgerkrieg geschlossen[2] und Friede in die Welt gekommen. Romulus wird von den Himmlischen wieder begnadet und als ihres Gleichen behandelt; das Capitol wird leuchten und Rom, wie bisher die Unterthanen weniger besteuernd als beherrschend,[3] über drei Erdtheile gebieten,[4] sein Name bis zum Aufgang der Sonne und bis zu den Nebelreichen des Westens die Völker schrecken, so lange Rom in Italien bleibt und nicht nach Troia übersiedelt.[5] Der Mann aber, der dieses vollbracht hat, ist wohl den Göttern gleich zu achten und wie dem Bezwinger der Ungeheuer Hercules und dem Indersieger Bacchus wird auch ihm dereinst im Götterkreise der Nektar kredenzt werden.[6]

Keiner, der mit offenen Augen dieses ernste und schwungvolle Gedicht liest, kann sich dem Gedanken entziehen, dass der warnende Sänger Byzanz geahnt hat, die *nova Roma* an den Dardanellen; und man irrt damit nicht. Der Dichter spricht nur aus, was die unvollkommene geschichtliche Überlieferung dieser Epoche zu melden versäumt hat und was dennoch unendlich wichtiger ist als beinahe alles, was sie berichtet. Sicher ist es in all den Jahrhunderten der Republik keinem römischen Bürger, welcher Art er sein und welcher Partei er angehören mochte, auch nur in den Sinn gekommen, dass das Römerreich anderswo als in Italien und Italien anderswo als in Rom seinen Mittelpunkt finden könne. Aber es ist nicht minder unzweifelhaft,

[1] *auster dux inquieti turbidus Hadriae.*
[2] *nostrisque ductum seditionibus bellum resedit.*
[3] *aurum .. spernere fortior quam cogere.*
[4] *quicumque mundo terminus obstitit, hunc tanget armis.*
[5] *fata quiritibus hac lege dico ne .. tecta velint reparare Troiae.*
[6] *Augustus recumbens purpureo bibet ore nectar.*

dass umgekehrt gleich mit den Anfängen der Monarchie die Frage in Rom ihren Einzug gehalten hat, ob für den lateinisch-griechischen Grossstaat, für das ungeheure Reich des Mittelmeers die italische Continentalstadt der rechte Mittelpunkt sei, weiter die Frage, ob der neue Wein nicht den neuen Schlauch, die Umgestaltung der alten Ordnung nicht die Decapitalisirung Roms nothwendig mache. Es bestätigt sich dies durch ein weiteres kaum weniger beredtes Zeugniss eines Zeitgenossen des Horaz und eines nicht minder berühmten. Der Geschichtschreiber Livius,[1] dessen hieher gehörige Bücher unseren Liedern genau gleichzeitig sind, führt seinen Lesern dieselbe Frage im mythhistorischen Gewande vor. Bei Gelegenheit der Eroberung Veiis wird bei ihm darüber verhandelt, ob nicht neben Rom oder auch statt desselben die schöne Etruskerstadt der Sitz der Herrschaft werden solle, und die grosse Rede des Camillus entwickelt völlig den gleichen Gedanken, dass Rom nicht sein könne ausserhalb Rom. 'Soll unser Sieg', heisst es hier, 'die Heimath ärger verwüsten als 'es der Angriff der Barbaren gethan hat? ist hier nicht jeder Fleck 'durch fromme Erinnerungen, durch die Spuren der Väter geheiligt? 'kann der capitolinische Jupiter vom Capitol, kann Romulus Quirinus 'vom Quirinal nach der Stadt der Landesfeinde auswandern? Hier 'weht gesunde Luft auf den Hügeln, hier bringt uns der Strom die 'Ernten aus dem Binnenland, hier ist das Meer fern genug, um jeden 'Angriff der Piraten auszuschliessen, und doch so nahe, dass es uns 'alles gewährt was wir brauchen; hier ist der Mittelpunkt Italiens.' Horaz wie Livius sprechen im Sinne des neuen Augustus. Sein Regiment, ein Compromiss zwischen der alten Republik und der neuen Herrengewalt, hat so gehandelt, wie die Juno des Dichters, der Camillus des Historikers es verlangen: Rom blieb in Rom und die einzige Reichshauptstadt. Als jenes Compromiss fiel und Diocletian und Constantin die reine Monarchie durchführten, war ihr erster Schritt die Decapitalisirung der Hauptstadt, ihr zweiter die Gründung des neuen Roms am Bosporus. Man kann es in einzelnen Spuren verfolgen, dass während der grossen Stagnation der drei ersten Jahrhunderte des Kaiserregiments diese allentscheidende orientalische Frage doch nie völlig von der Tagesordnung verschwunden ist, bis dann die Geschicke sich erfüllten und der letzte Act des grossen historischen Schauspiels auf griechischem Boden sich vollzog. Allerdings ging dann auch des Dichters Fluch in Erfüllung: nicht Siegesthaten und Eroberungen, sondern Niederlagen und Zerfall füllen die lange Agonie des constantinischen Neuroms.

[1] An den Camillus des Livius hat mich zur rechten Zeit Wilamowitz erinnert.

So feierlich wie in diesem mächtigen Liede spricht Horaz nicht leicht, und er selber ruft seiner Muse am Schluss desselben die Warnung zu sich nicht allzu hoch zu versteigen[1] und den Olymp in Ruhe zu lassen. In dem folgenden Liede kommt sie denn auch vom Himmel herab[2] und mehr als vielleicht irgendwo sonst tritt hier die Person des Dichters in den Vordergrund. Seine Knabenzeit kommt ihm wieder; er ist wieder auf den Bergen der apulischen Vaterstadt bei seiner märchenreichen Amme Pullia;[3] müde vom Spiel ist er unter den Bäumen eingeschlafen und der Schwarm der Tauben deckt sorglich den künftigen Dichter vor dem Stich der Natter und dem Bisse des Bären; wundernd schauen die Bewohner der kleinen Gebirgsstädte der Nachbarschaft, die Acerentiner, die Bantiner, die Forentaner dem Zeichen zu. So ist er gefeit, und er führt dies weiter aus: er erinnert sich der bestandenen Gefahren, des Schlachtfeldes von Philippi, der stürmischen Überfahrt nach Sicilien, des neben ihm niederschlagenden Baumes — nichts hat es ihm anhaben können, und sollte ihn sein Loos zu den Britten oder den Skythen führen, es werden auch dort die Göttinnen die Hand über ihm halten. Dieses zarte Verhältniss der Muse zu ihrem Dichter hat nichts zu schaffen mit der grossen Politik; aber auch hier kommt er mit feiner Wendung zurück auf Augustus. Die Poesie des augustischen Zeitalters ist auch ein Theil seines Friedenswerkes. Eben die Musen knüpfen den Dichter an den Herrscher; auch dieser lauscht ihnen gern und wenn er ausruhen darf von den Geschäften des Staates, der Überführung seiner siegreichen Soldaten in die ihnen bereiteten friedlichen Ansiedelungen, dann verschönen die holden Klänge der Poesie seine Mussestunden und stimmen ihn zur Milde. Die Musen, sagt der Dichter, der dies ja an sich selbst erfahren hatte, geben milden Rath und es freuen sich dessen die Holden.[4] Aber die Milde ist nur am Platz nach dem Siege. Noch einmal entrollt der Dichter das Bild des gewaltigen Ringens, dem der schwer gewonnene Frieden entsprungen ist, diesmal, wie schon in dem ersten Gedicht, anknüpfend an den Kampf der Giganten gegen die himmlischen Heerschaaren. Jupiter und Augustus fliessen hier in nicht correcter Anschauung dem Dichter dermassen zusammen, dass der Gott Kaiser herrscht einerseits über Erde und Meer, andererseits über die Städte des Reiches und die barbarischen

---

[1] *quo Musa tendis?*

[2] *descende caelo.*

[3] *me fabulosae Vulture in Apulo nutricis extra limina Pulliae* (so die besten Hdschr.). Der Name ist gewöhnlich und die Nennung der Amme hier ebenso berechtigt wie die der drei apulischen Städtchen.

[4] *vos lene consilium et datis et dato gaudetis almae.*

Königreiche,[1] er die Schaaren der Götter ebenso befehligt wie die der Menschen. Die Ausführung im Einzelnen lässt die Erdenwelt fallen und ist rein mythologisch gehalten; die Gaea weint um ihre vom Blitz erschlagenen Riesensöhne ganz wie auf dem pergamenischen Fries. Aber die abschliessende Betrachtung des Dichters, dass Gewalt ohne Einsicht in sich selbst zusammenbricht[2] und sie den Göttern nur da wohlgefällig ist, wo sie sich selber mässigt, spricht wieder scharf und klar die Gegensätze aus, welche in diesem Act der grossen römischen Schicksalstragödie mit einander rangen.

Das fünfte Gedicht ist eine Vertheidigung des Augustus wegen seiner äusseren Politik. Nichts scheidet diesen schärfer von dem Manne, dessen Namen er trug und dessen Werk er weiter führen sollte, als sein Abwenden von der weiteren Ausdehnung des Reiches. Dass Britannien, Germanien, das Partherreich nicht sogleich oder auch überhaupt nicht zum römischen Reich gekommen sind, das ist vielleicht die wichtigste Folge des von Brutus und Cassius vollzogenen Mordwerkes. Caesar hatte dies alles gewollt; und da die Erbschaft der Monarchie nicht unter der Wohlthat des Inventars angetreten werden kann, so ging die Verpflichtung diese Gebiete zum Reiche zu ziehen unweigerlich auf seinen Nachfolger über. Die öffentliche Meinung muss sich in dieser Richtung tief und mächtig geltend gemacht haben. Die fast unabweisbare Ableitung der starken republikanischen Gegenströmung durch die Glorien und die Victorien, die Stimmung des von Augustus reorganisirten Offizierstandes, die unleugbare Unfertigkeit der Zustände besonders im Westen haben Augustus bestimmt das caesarische Kriegsprogramm unverändert festzuhalten, und nirgends ist dies schärfer ausgesprochen als im Eingang unseres Gedichts: die Eroberung Britanniens und Persiens wird hier bestimmt verheissen, ja erst wenn diese vollendet sein werden, wird Augustus ebenso als der irdische Gott sich offenbart haben, wie Jupiter sich offenbart durch den Donner als der Herr des Himmels, und wird er also als lebendiger Gott die Erde beherrschen. Ebenso hat er vorher in dem Soldatengedicht den Legionar geschildert, wie er den Parther niederwirft und die Braut des persischen Prinzen zitternd dem römischen Löwen nachschaut. Allein dieses Programm sollte, wie dies ja auch sonst vorkommt, die Absichten seines Urhebers nicht offenbaren, sondern verdecken; und dass es keinen weiteren Zweck hatte, war durch den Krieg gegen Antonius in unbequemer Weise jedem, der sehen wollte, offenbart worden. Der

[1] *qui terram inertem, qui mare temperat ventosum et urbes regnaque tristia divosque mortalesque turmas imperio regit unus aequo.*

[2] *vis consili expers mole ruit sua.*

Verlauf desselben hatte den Sieger nach Aegypten und nach Syrien geführt. Er gebot über ungeheure Truppenmassen, für welche es nirgends sonst eine Verwendung gab. Mit dem Partherkönig Phraates befand Rom sich im Kriegsstand; auch König Artaxes von Armenien, einst von Antonius als Geisel in Alexandrien festgehalten und aus der Gefangenschaft entwichen, war durch die Parther auf den Thron gesetzt und stand vor wie nach der Katastrophe des Antonius mit den Römern in offener Fehde. Der Rachezug wegen des Tages von Karrhae, die Unterwerfung der Parther lag damals viel näher und war viel leichter auszuführen als da der Dictator Caesar sich zu dem gleichen Unternehmen anschickte. Augustus aber kehrte aus dem Orient heim, ohne in dieser Hinsicht irgend einen Schritt gethan zu haben. Es soll hier nicht gefragt werden, in wie weit dies klug war oder schwach oder auch beides zugleich; dass nicht wenige, und vermuthlich eben die thatkräftigsten und die treuesten Anhänger der neuen Monarchie darüber stutzten, ist zweifellos; sicher ist gleich darauf der ernste spanische Krieg hauptsächlich unternommen worden, um mit der That zu beweisen, dass dem Nachfolger Caesars nicht die Schlagfertigkeit fehle, sondern er nur sie mit der Besonnenheit verbinde und den näher liegenden Aufgaben vor weiter aussehenden den Vorzug gebe. Diesen Tadlern antwortet hier der Dichter. Schon in dem grossen dritten Gedicht findet sich die Wendung, dass bei Roms gewaltiger Machtstellung wenig darauf ankomme, ob die ihm Entlaufenen irgendwo als Könige regierten,[1] wo augenscheinlich der armenische Artaxes gemeint ist. Hier in dem fünften ist die Vertheidigung anders gewendet. Zehntausend römische Bürger waren bei der Katastrophe des Crassus in parthische Gefangenschaft gerathen; als vierundzwanzig Jahre später Augustus nach Syrien kam, mussten deren nicht wenige noch am Leben sein, und begreiflicherweise machten die Kriegslustigen in erster Reihe geltend, dass die römische Ehre deren Befreiung verlange. Darauf antwortet der Dichter mit einer dem Regulus in den Mund gelegten Ausführung: der gefangene Römer sei kein Römer mehr und der Befreiung nicht werth. Der schroffe Übergang von dem Kriegsprogramm zu dieser Abweisung desselben zeigt klar genug deren logische und praktische Bedenklichkeit; aber die Intention des regierungsfreundlichen Dichters tritt darum nur um so deutlicher zu Tage. Man möchte meinen, dass selbst im Senat solche Stimmen laut geworden sind und dass aus diesem Grunde der Dichter zweimal an ihn sich wendet, Regulus die schwankenden Gemüther der Väter der Stadt, *labantes patres*, zu patriotischer Resignation ermahnt.

---

[1] *qualibet exules in parte regnanto beati.*

Das sechste und letzte Gedicht erläutert sich selbst. Es ist einer der charakteristischen Züge der augustischen Staatsreform und ebenfalls ein scharfer Gegensatz zu der caesarischen, dass ihr Fundament die restaurirte Orthodoxie war. Dies nimmt der Dichter auf. Der Römer herrscht, weil er gottesfürchtig ist.[1] Alles Unheil, welches die Ausländer über Rom gebracht haben oder fast gebracht hätten, die wiederholten Siege der Parther, die Schande, dass die Pfeile der Geten und die Galeeren der Aegypter die heilige Stadt haben zittern machen, geht zurück auf die Vernachlässigung der Tempel. Aus dem Mangel der Gottesfurcht folgt weiter der Verfall der Sitten, namentlich der Frauenzucht; unsere Väter waren nicht was unsere Ahnen und schlechter als sie, werden wir ein noch erbärmlicheres Geschlecht erzeugen.[2] Dies Gedicht ist die poetische Verklärung der Sittenreform, zu welcher Augustus eben damals die ersten Schritte gethan hatte und der er von da an sein Leben gewidmet hat. Dass er unmittelbar nach seiner Rückkehr sämmtliche Tempel in Rom, zweiundachtzig an der Zahl, einer umfassenden Restauration unterwarf, erzählt er selbst in seinem Rechenschaftsbericht; und obwohl sein Ehebruchsgesetz sich nicht mit Bestimmtheit datiren lässt, so kann eben nach den Äusserungen des Dichters daran kein Zweifel sein, dass wenn nicht dieses selbst, doch die Vorbereitungen dazu in dieselbe Epoche fallen. Auch dies kehrt alles völlig wieder bei dem livianischen Camillus. Die Vernachlässigung der religiösen Pflichten hat die Katastrophe über Rom gebracht; die Gottesfurcht zieht jetzt wieder ein und der Sieger erneuert, bevor die Häuser der Menschen wieder aufgebaut werden, vor allem die sämmtlichen Gotteshäuser der verwüsteten Stadt.

Damit ist der Kreis dieser Gedichte geschlossen. Sie werden alle ungefähr gleichzeitig geschrieben sein. Der Herrscher kam im Sommer des J. 29 v. Chr. nach Rom zurück und erhielt nach dem vorläufigen Abschluss seiner staatlichen Ordnungen im Anfang des J. 27 den Namen Augustus; der Dichter hat bereits Kunde von seinen neuen Einrichtungen und nennt ihn mit dem neuen Namen; wir werden annehmen dürfen, dass die sechs Gedichte um diese Zeit entstanden sind. Sie schliessen wohl zusammen. Nach der Einleitung über das allwaltende Schicksal und die menschliche Bescheidung führt der Dichter uns vor den Preis der Tapferkeit und der Treue in Anwendung auf den neuen Soldaten- und Beamtenstand; die Abwehr der drohenden Unterwerfung Roms unter die Griechen; die Besiegung des Antonius;

[1] *dis te minorem quod geris, imperas.*

[2] *aetas parentum peior avis tulit nos nequiores mox daturos progeniem vitiosiorem.*

die Unstatthaftigkeit des Partherfeldzugs; endlich die Wiederherstellung der Gottesfurcht und der Sittenzucht. Es sind höfische Gedichte; die Muse thut mitunter darin Advocatendienst und die Vermischung des Olymps und des Palatins führt hier und da zu Unklarheiten und Geschmacksfehlern. Aber dies trifft nur Nebensachen. Darf man den richtig fühlenden und heiter gearteten Dichter glücklich preisen, dass er aus den trüben Wolken entsetzlichsten Haders eine reinere und bessere Staatsordnung hat hervorgehen sehen, so hat es auch Augustus wohl verdient in so feiner, so aufrichtiger und so würdiger Weise gefeiert zu werden. Die Producte der Schmeichellitteratur pflegen zu den Werken zu gehören, die noch vor ihrem Urheber vergehen. Die Lieder des Horaz lesen wir heute noch und wenn die Barbarisirung nicht allzu rasch vorschreitet, werden sie noch manches Geschlecht erfreuen; denn im Grossen und Ganzen ruhen sie auf rechter und echter Empfindung.

An die schöne Erscheinung eines grossen Herrschers und eines dankbaren Volkes, welche die Lieder des Horaz verewigt haben, kann unser heutiges Doppelfest nicht eigentlich anknüpfen. Friedrich der Zweite hat nicht die Liebe gefunden, die er verdient hat. Der unbeschreibliche Zauber, der seine Persönlichkeit in der Jugendzeit umfloss und von dem die anmuthigen Rheinsberger Erinnerungen getragen werden, hat sich nie in vollem Maasse auf die Massen erstreckt; die überströmende Genialität, das in dem König stark entwickelte kaustische Element, die Abwendung von der nationalen Unart und Art standen dem hindernd im Wege. Als dann später in der fürchterlichen siebenjährigen Spannung des grossen Krieges seine Heiterkeit auf den Schlachtfeldern geblieben war, da sah wohl die Welt mit Bewunderung und sahen die Preussen mit Stolz hinauf an dem Sieger von Rossbach und Leuthen; aber Vereinsamung und Menschenverachtung zogen in sein Herz ein und die mächtige Pflichterfüllung hatte nur zu stetig ihren Lohn in sich selber zu finden. Erst die späteren Generationen haben die Dankesschuld vollständig empfinden gelernt oder lernen vielmehr noch daran; wir dürfen sagen, dass unsere Akademie wesentlich dazu beigetragen hat und weiter dazu beiträgt, die eigenartige Grösse dieses Regenten mehr und mehr zur Kenntniss zu bringen. Was ihm das Leben nur halb gewährt hat, ganz hat oder wird es die Nachwelt ihm geben.

Dem jungen Herrscher, der heute an seiner Stelle steht, gehört die Zukunft. Ernste Auffassung seines hohen Amtes und pflichttreues Walten erkennen wir wohl; es ist das ein Grosses, aber es ist nichts Besonderes. Wir haben es erlebt, wie der neunzigjährige Grossvater, wie der sterbende Vater des Regiments gewaltet haben; in Preussen

verwundert man sich nicht, wenn der Herrscher seine Pflicht thut und für das Hohenzollernblut passt solche Lobpreisung nicht. Wir stehen an der Schwelle seiner Regierung; und jedes neue Regiment ist ein verschlossenes Buch. Noch hat kein Herrscher über Preussen gewaltet, dessen Persönlichkeit nicht schwer und eigenartig in die Wagschale gefallen wäre; noch hat keiner regiert, dem das Schicksal nicht die schwarzen wie die heitren Loose beschieden hätte. Gewiss leuchtet unserem gegenwärtigen Kaiser insofern ein glücklicherer Stern als dem Begründer der römischen Monarchie, als er mehr zu erhalten hat als zu schaffen; ein glücklicherer auch als dem grossen Friedrich, der das Werk des Vaters in der Weise fortsetzte, dass er die gerade entgegengesetzten Wege einschlug. Das Reich ist geschaffen und der Weg ist gewiesen; aber vieles ist unfertig und erwartet seine Vollendung; vieles verhadert und erwartet seine Befriedung; vieles gefährdet und erwartet seine Probe. Was auch kommen mag, Fürst und Volk sind gefasst auf die guten wie auf die schlimmen Tage; sie wissen, dass den Deutschen das Leben nicht leicht gemacht wird, den Regenten so wenig wie den Regierten, sie wissen aber auch, dass sie für Glück und Unglück zusammengehören und im Glück wie im Unglück zusammenstehen werden. Dem ersten Wilhelm ist es vergönnt gewesen, was dem grossen Friedrich das Schicksal versagt hat, dass die Liebe seines Volkes ihm, wie einst dem Kaiser Augustus, sich zugewendet und ihn durch sein langes Leben in stetigem Steigen begleitet hat. Möge dereinst, wenn kommende Geschlechter also auf die Regierung des zweiten Wilhelm zurückblicken wie wir heute auf die des ersten, die gleiche dankbare Erinnerung, die gleiche über den Tod hinaus treue Liebe an den Namen unseres jungen Herrschers sich knüpfen.

Sodann berichtete der vorsitzende Secretar über die eingetretenen Personalveränderungen.

Seit dem letzten Jahrestage Friedrichs des Grossen sind folgende Veränderungen in der Akademie eingetreten:

Die Akademie verlor durch den Tod die ordentlichen Mitglieder der philosophisch-historischen Classe, Hrn. Hermann Bonitz und vor wenigen Tagen Hrn. Wilhelm Schott, den ältesten der Akademiker; das auswärtige Mitglied der philosophisch-historischen Classe, Hrn. Lebrecht Fleischer in Leipzig; die correspondirenden Mitglieder der

physikalisch-mathematischen Classe, die HH. Anton de Bary in Strassburg, Gerhard vom Rath in Bonn, Rudolf Julius Emmanuel Clausius in Bonn, Theodor Kjerulf in Christiania; die correspondirenden Mitglieder der philosophisch-historischen Classe, die HH. Petros Eustratiades in Athen, Karl von Prantl in München.

Gewählt wurden: zu ordentlichen Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Classe: die HH. Karl August Möbius und August Kundt; zu ordentlichen Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe: die HH. Ernst Dümmler und Ulrich Koehler. Hr. Lehmann, das Mitglied der philosophisch-historischen Classe, ist durch seine Berufung an die Universität Marburg als Mitglied der philosophisch-historischen Classe ausgeschieden und in die Reihe der Ehrenmitglieder eingetreten. Der zum ordentlichen Mitgliede der physikalisch-mathematischen Classe gewählte Professor der Physik in Graz, Hr. Dr. Boltzmann, ist, da die dabei vorausgesetzte Übersiedelung nach Berlin nicht stattgefunden hat, ebenfalls in die Reihe der Ehrenmitglieder der Akademie übergetreten. Zu correspondirenden Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Classe sind gewählt worden die HH. Friedrich Beilstein in St. Petersburg, Stanislao Cannizzaro in Rom, Remigius Fresenius in Wiesbaden, Lothar Meyer in Tübingen; zu correspondirenden Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe: die HH. Wilhelm Ahlwardt in Greifswald, Wilhelm Pertsch in Gotha, Adolf Michaelis in Strassburg.

Hierauf wurde verkündet, dass Seine Majestät der Kaiser und König durch Allerhöchsten Erlass vom 23. Januar d. J. geruht haben, auf Bericht der Commission der Biographie Scharnhorst's von Max Lehmann als dem besten der in den Jahren 1883 bis Ende 1887 erschienenen Werke über deutsche Geschichte den zum Andenken an den Vertrag von Verdun gestifteten Preis zuzuerkennen.

Schliesslich wurde über den Fortgang der grösseren litterarischen Unternehmungen der Akademie sowie über die Thätigkeit der mit ihr verbundenen wissenschaftlichen Stiftungen während des Jahres 1888 auszugsweise Bericht erstattet. Die Berichte selbst sind weiterhin abgedruckt.

Bericht über den Fortgang der grösseren litterarischen Unternehmungen der Akademie, sowie über die Thätigkeit der mit ihr verbundenen Stiftungen[1] im Jahre 1888.

---

1. Über die griechischen Inschriften berichtete Hr. Kirchhoff:

Es ist der Druck des dritten Bandes der zweiten Abtheilung der Attischen Inschriften beendet worden und dieser Band im Laufe des October vorigen Jahres zur Ausgabe gekommen. Damit ist dieser wichtigste Theil der Sammlung, abgesehen von den nothwendig gewordenen Supplementen, zu einem vorläufigen Abschluss gelangt; es fehlen nur noch die Indices zur zweiten Abtheilung, welche demnächst in einem besonderen Bande nachfolgen werden. Der Druck des ersten Bandes der Nordgriechischen Inschriften hat seinen regelmässigen Fortgang genommen; die Vorarbeiten für einen zweiten Band befinden sich ebenfalls im Gange. Der Druck des Bandes, welcher die Inschriften von Italien und Sicilien enthält, ist so weit vorgeschritten, dass seine Vollendung im laufenden Jahre mit einiger Wahrscheinlichkeit in Aussicht gestellt werden kann.

2. Über das lateinische Inschriftenwerk berichteten die HH. Mommsen und Hirschfeld:

Der Druck der vierten Abtheilung des stadtrömischen Bandes (VI) ist von Hrn. Hülsen in Rom bis zum 333. Bogen gefördert worden; der Abschluss des Bandes wird voraussichtlich noch in diesem Jahre erfolgen.

Die Drucklegung der stadtrömischen Ziegelinschriften (XV) ist von Hrn. Dressel dem Abschlusse nahe gebracht worden. Das Material für die sonstigen stadtrömischen Geräthinschriften hat derselbe bei einem dreimonatlichen Aufenthalte in Rom vervollständigt.

Die Inschriften von Umbrien in der zweiten Hälfte des mittelitalischen Bandes sind von Hrn. Bormann in Wien bis zum 87. Bogen

---

[1] Die Berichte über die Thätigkeit des archäologischen Instituts und der Centraldirection der Monumenta Germaniae historica folgen später.

zum Satz gebracht; die Redaction des Instrumentum und der Indices ist durch Hülfsarbeiter in Angriff genommen worden.

Die Vorarbeiten für den XIII. Band (Nordgallien und Germanien) sind von Hrn. Hirschfeld und Hrn. Zangemeister in Heidelberg weitergeführt worden, so dass mit dem Druck der Germanischen Inschriften in diesem Jahre begonnen werden kann. Die gallischen Inschriften werden, da Hr. Hirschfeld durch die Betheiligung an den epigraphischen Supplementararbeiten noch in Anspruch genommen ist, erst im nächsten Jahre zur Drucklegung gelangen können.

Die Supplementararbeiten sind gemäss dem von der Akademie aufgestellten Regulativ ausgeführt worden und theilweise zum Druck gelangt.

Der Druck des spanischen Supplements (II) ist von Hrn. Hübner bis zum 16. Bogen geführt worden.

Von dem Supplemente des III. Bandes ist der erste die griechische Reichshälfte umfassende Theil von Hrn. Mommsen im Drucke vollendet. Das Material für die Donauprovinzen ist von den HH. von Domaszewski in Heidelberg und Hirschfeld durch Bereisung vervollständigt und es hat der Satz der Inschriften von Moesia inferior begonnen, woran sich die Drucklegung der übrigen Theile von Illyricum unmittelbar anschliessen wird. Das Supplement zu dem ersten die griechische Reichshälfte umfassenden Theil dieses Bandes wird demnächst gesondert zur Ausgabe gelangen.

Das Supplement zu Band IV (pompejanische Pinsel- und Griffelinschriften) ist auch in diesem Jahre nicht gefördert worden.

Ein Supplement zum V. Band ist im Auftrag der römischen Accademia de' Lincei von Hrn. Ettore Pais in Pisa mit Beihülfe des Hrn. Mommsen zusammengestellt und unter dem Titel 'Corporis I. L. supplementa Italica' veröffentlicht worden, welche materiell mit dem akademischen Inschriftenwerk connexe Publication es angemessen erschien auch an dieser Stelle zu erwähnen.

Der von den HH. Schmidt in Giessen und Cagnat in Paris bearbeitete Ergänzungsband der africanischen Inschriften (VIII.) ist in der Handschrift fertig gestellt und wird die Drucklegung desselben unverzüglich beginnen.

Für die neue Bearbeitung des ersten Bandes hat die von Hrn. Henzen fast abgeschlossene und theilweise bereits zum Satz gelangte Neubearbeitung der Consular- und Triumphalfasten, in Folge der durch die Ausgrabungen des vergangenen Jahres für die Reconstruction der Regia gewonnenen Resultate, durch Hrn. Hülsen einer Durchsicht und theilweise einer Umarbeitung unterzogen werden müssen. Der Neudruck dieses Theils des ersten Bandes hat erst nach langer Unterbrechung wieder aufgenommen werden können.

Die Ordnung und Inventarisirung des epigraphischen Archivs in den Räumen der Königlichen Bibliothek ist unter Leitung des Hrn. Dessau, Docenten an der hiesigen Universität, vollendet worden. Das beträchtliche daselbst vorhandene und stetig sich vermehrende Material insbesondere von Abklatschen ist, unter den durch die Beschaffenheit der Sammlung und die bibliothekarischen Verhältnisse gebotenen Cautelen, jedem Gelehrten in dem betreffenden Local jeden Dienstag von 11—1 Uhr zur Benutzung gestattet.

3. Von der römischen Prosopographie der Kaiserzeit haben die HH. Klebs, Dessau und von Rohden den alphabetischen Theil beendigt und wird nunmehr die Aufstellung der Magistratslisten in Angriff genommen werden.

4. Die Sammlung der antiken Münzen Nordgriechenlands hat unter der Leitung des Hrn. Imhoof-Blumer in Winterthur begonnen. Trotz der durch Krankheiten und andere Zwischenfälle hervorgerufenen Störungen ist die Erhebung der hierher gehörigen Münzen des Pariser Cabinets, mit welcher Hr. Imhoof den Hrn. Svoronos aus Athen beauftragt hat, fast zu Ende geführt und die Ausnutzung der einschlagenden Litteratur durch Hrn. Pick begonnen worden.

5. Für die Aristoteles-Commission berichtete Hr. Zeller:

Im verflossenen Jahre sind folgende Commentare des Aristoteles herausgegeben worden:

1. Aspasios und Heliodor zur Ethik, welche beide den XIX. Band bilden und von Hrn. Heylbut bearbeitet sind.

2. Dexippos in Categorias (IV 2) herausgegeben von Hrn. Busse.

Der Commentar des Alexander zur Topik (II 2), von Hrn. Wallies besorgt, ist im Druck regelmässig fortgeschritten und zur Hälfte vollendet. Alexander's Metaphysik (I) herausgegeben von Hrn. Hayduck und Bd. XX (Ethikcommentare) herausgegeben von Hrn. Heylbut werden sich im Drucke sofort anschliessen. In Vorbereitung sind die Bände V 5, IV 3—5, X, XII 1, XVIII 1. 2 und Supplementum Aristotelicum II, 2.

6. Über die politische Correspondenz Friedrichs des Grossen berichten die HH. von Sybel und Schmoller:

Die Leitung der Herausgabe der politischen Correspondenz Friedrichs des Grossen blieb, wie bisher, bei den Berichterstattern und Hrn. Lehmann; der Letztere seit 1. October 1888 Professor in Marburg, hat auch von

dort aus seine werthvolle Mitwirkung fortgesetzt. Die Redaction war nach wie vor Hrn. Dr. A. Naudé anvertraut.

Seit dem Bericht, der am 24. März 1888 in der öffentlichen Sitzung der Akademie von Hrn. von Sybel erstattet wurde, sind zwei neue Bände, der 15. und 16., veröffentlicht worden, der 17. ist im Manuscript fast vollendet und zur Hälfte gedruckt. Die Bände umfassen neben der politischen den wichtigsten Theil der militairischen Correspondenz, wie seit Beginn des siebenjährigen Kriegs. Hieraus und aus den wichtigen Ereignissen der Zeit erklärt es sich, dass diese Bände nur kleinere Zeitabschnitte wie früher erledigen, der 15. Band die Feldzüge von 1757 bis in den Herbst, der 16. die militairischen Actionen von den Schlachten von Rossbach und Leuthen bis zum Beginne des Offensivkampfes gegen Österreich im Jahre 1758, der 17. das Jahr 1758 bis zum Schluss.

Für den 16. und 17. Band wurden in viel stärkerer Weise als bisher ausser den Königlich preussischen Staatsarchiven das Kriegsarchiv des grossen Generalstabes und das Kaiserlich Königliche Kriegsarchiv in Wien, so wie die Archive mehrerer preussischer Adelsfamilien, z. B. der Ziethen, Manteuffel, Wedell benutzt.

Von den preussischen Staatsschriften aus der Regierungszeit Friedrichs II. wird binnen Kurzem der 3. Band von Dr. O. Krauske dem Drucke übergeben werden können. Er umfasst den Beginn des siebenjährigen Krieges. Die öffentliche Publicistik nahm in jener Zeit einen solchen Aufschwung, dass in der Frist von August 1756 bis Januar 1757 über hundert Druckschriften von den verschiedenen Mächten herausgegeben worden sind.

Am bemerkenswerthesten sind in dem neuen Bande folgende drei Schriften, die vom Könige selbst verfasst worden sind: *Déclaration du Roi sur les motifs qui obligent Sa Majesté d'entrer avec son armée dans les états héréditaires du roi de Pologne, électeur de Saxe, Exposé des motifs qui ont obligé Sa Majesté de Prusse à prévenir les desseins de la cour de Vienne* und *Lettre du cardinal de Richelieu.*

Die erste Gruppe der Staatsschriften behandelt den Streit Mecklenburgs mit Preussen über gewaltsame Werbungen. Daran schliessen sich die den Krieg gegen Österreich einleitenden Rundschreiben, die *Déclaration* und das *Exposé*. Es folgt dann die Gruppe von Schriften, die mit dem *Exposé* und *Mémoire raisonné* in innerer Verbindung stehen. Eine grössere Abtheilung bilden endlich diejenigen Stücke, die zur Bekämpfung der österreichischen Politik auf dem Regensburger Reichstage erschienen sind.

7. Über die **Acta Borussica** berichtet Hr. Schmoller:

Das neue Unternehmen der Acta Borussica, die Herausgabe der Acten der preussischen inneren Staatsverwaltung des 18. Jahrhunderts trat auf Grund der Ministerialerlasse vom 19. Januar 1888, und vom 28. März 1888 mit der Wahl der Commissionsmitglieder HH. von Sybel, Lehmann und Schmoller (in der Sitzung der philosophisch-historischen Classe am 5. April 1888) in's Leben; das Statut für die Geschäftsführung wurde am 28. März 1888 vom Hrn. Minister bestätigt. Hr. von Sybel wurde zum Vorsitzenden der Commission erwählt, während die übrige geschäftliche und wissenschaftliche Leitung Hrn. Schmoller anvertraut wurde.

I. Für die Herausgabe der Acten der Centralverwaltung, welche sich auf Behördenorganismus und Beamtenorganisation beziehen, wurde Hr. O. Krauske aus Potsdam, welcher sich bei Herausgabe der Staatsschriften Friedrichs des Grossen bewährt hatte und nebenher noch mit der Herstellung des dritten Bandes derselben beschäftigt ist, gewonnen. Er hat begonnen, die Acten des Generaldirectoriums von 1713—1723 auszuziehen. Obwohl ihm ein erheblicher Bestand von Vorarbeiten, Regesten und Abschriften von Hrn. Schmoller übergeben werden konnte, ist bei dem grossen Umfang des Materials und der Nothwendigkiet, auch die Provinzialarchive heranzuziehen, die Fertigstellung des ersten Bandes nicht vor Ablauf eines weiteren Jahres zu erwarten.

II. Aus dem Gebiete der materiellen Verwaltung wurde zunächst die Begründung der Seidenindustrie in der östlichen Hälfte der preussischen Monarchie gewählt, weil hierfür eine halbfertige Arbeit (hauptsächlich eine umfangreiche Abschriftensammlung) von Hrn. Schmoller vorlag. Die weitere Bearbeitung und Fertigstellung dieses Materials wurde einem bewährten jüngeren Historiker Hrn. O. Hintze übertragen, und obwohl bei der weiteren Nachforschung noch ein sehr viel grösseres Actenmaterial, als man erwartet, sich vorfand, und zumal die Bearbeitung der Verwaltungsstatistik des vorigen Jahrhunderts wegen ihrer technischen Unvollkommenheit sehr schwierig und zeitraubend war, so ist doch gegründete Hoffnung, dass der die Seidenindustrie umfassende Band im Laufe des Sommers 1889 gedruckt werden kann.

III. Im Laufe des Januar 1889 wird Hr. Wilhelm Naudé für die Bearbeitung der preussischen Getreidehandelspolitik im XVIII. Jahrhundert eintreten. Er hat sich dazu vorbereitet durch mehrjährige Studien über die Getreidehandelspolitik der deutschen Seestädte vom XV. bis XVIII. Jahrhundert.

Auch ihm werden einige Vorarbeiten und eine Abschriftensammlung von Hrn. Schmoller übergeben werden können, wodurch das rasche Voranschreiten auch dieses Bandes garantirt ist.

Von der Inangriffnahme weiterer Bände wurde zunächst Abstand genommen, weil es sich für die erste Zeit darum handelt, erst die Methode der ganzen Bearbeitung und Publication mustergültig festzustellen, ehe man weniger erprobte und der steten Controle mehr bedürftige, oder gar selbstständige, ferner stehende Mitarbeiter heranzieht.

8. Über die Herausgabe der Werke Jacobi's berichtet Hr. Weierstrass:

Von den gesammelten Werken Jacobi's befinden sich der fünfte und sechste Band (die Schlussbände) unter der Presse.

9. Das Curatorium der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen erstattet statutenmässig Bericht über die Wirksamkeit der Stiftung im verflossenen Jahre.

Es ist in diesem Jahre die zweite Expedition des Hrn. Dr. Karl von den Steinen an den oberen Schingú, zu welcher die Stiftung einen Theil der Mittel hergegeben hat, zu einem glücklichen Abschluss gelangt, indem alle vier Reisende wohlbehalten wenigstens in den Bereich der Cultur, die beiden HH. von den Steinen aber Mitte August nach Europa zurückgekehrt sind. Am 18. October hat Hr. Dr. von den Steinen einen kurzen Bericht über die Ergebnisse der Expedition durch Hrn. Virchow der Akademie vorlegen lassen, welcher sich an dasjenige ergänzend anschliesst, was in dem vorjährigen Bericht des Curatoriums, vom 26. April, schon über die Zwecke und den ersten Theil der Reise mitgetheilt worden war. Die von Dr. von den Steinen über die Urzustände der Indianerstämme im centralen Südamerika erwarteten Aufschlüsse sind vollständig gewonnen worden; sie werden schon jetzt durch die im Museum für Völkerkunde aufgestellte Sammlung der Reisenden erläutert und erhärtet, sollen aber in weiteren Veröffentlichungen nach und nach vollständig dargelegt werden.

Die im vorigen Jahre durch Ersparnisse für Stiftungszwecke zur Verfügung stehende grössere Summe von 24600 Mark ist dem Professor der Physiologie in Kiel, Hrn. Hensen, überwiesen worden zu einer auf eigens dazu gechartertem Dampfschiff von Jan Mayen bis nach Rio de Janeiro in Begleitung mehrerer Naturforscher zu unternehmenden Seefahrt, welche den Zweck verfolgt, die Menge der im Meere treibenden kleinen Lebewesen, des Plankton's, wie Hr. Hensen es nennt, zu bestimmen. Die Expedition ist noch in den Vorbereitungen begriffen.

Das Capital der Stiftung hat im Jahre 1888 keinen Zuwachs erhalten. Die für das laufende Jahr zu Stiftungszwecken verwendbare Summe beläuft sich ordnungsmässig abgerundet auf 7350 Mark.

10. Über die Bopp-Stiftung berichtet die vorberathende Commission:

Für den 16. Mai, als den Jahrestag der Stiftung, ist im vorigen Jahre der zur Disposition stehende Jahresertrag von 1887 im Gesammtbetrage von 1350 Mark dem Professor V. Fausböll in Kopenhagen als Preis für seine verdienstvolle Ausgabe der unter dem Namen Jâtaka gehenden Pâli-Legenden über die Vorgeburten Buddha's zuerkannt worden. Der Ertrag der Stiftung beläuft sich zur Zeit auf 1638½ Mark.

11. Über die Savigny-Stiftung berichten die HH. Pernice und Brunner.

Das auf Anlass der Commission für die Savigny-Stiftung unternommene Wörterbuch der klassischen Rechtswissenschaft ist im verflossenen Jahre stetig, wenn auch langsam gefördert worden. Die K. Akademie in Wien hat die Arbeit dadurch wesentlich unterstützt, dass sie die ihr zur Verfügung stehende Zinsrate der Stiftung von 1888 für das Wörterbuch der hiesigen Commission überwiesen hat.

Die Leitung der Arbeiten zur Herstellung des für die Acta nationis germanicae univ. Bononiensis in Aussicht genommenen Ergänzungsbandes ist Hrn. Knod zu Schlettstadt im Elsass übertragen worden.

12. Von der Charlottenstiftung wurde der für die Bearbeitung der Schrift Philons de opificio ausgesetzte Preis, für welche Aufgabe sechs Bewerbungsschriften eingelaufen waren, dem Hrn. Dr. Paul Wendland in Berlin, ein ausserordentlicher Weise bewilligter Nebenpreis dem Hrn. Dr. Leopold Cohn in Breslau zuerkannt.

13. Über die neu gegründete und unter die Leitung der Akademie gestellte historische Station in Rom berichtet Hr. von Sybel:

Nach wiederholten Anträgen aus der Königlichen Akademie der Wissenschaften hat der Hr. Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Dr. von Gossler, durch hohen Erlass vom 9. April 1888 die Gründung der historischen Station in Rom vollzogen, und durch weiteren Erlass vom 28. April 1888 die Bestellung des Professors beim Königlichen Kadettencorps, Dr. Schottmüller, zum Secretair der genannten Station bis auf Weiteres genehmigt.

Ihm sind die beiden Assistenten Hr. Friedensburg und Hr. Baumgarten beigegeben worden.

Ausser den nothwendigen Vorarbeiten, Ermittelung der schon vorhandenen Abdrücke u. a. m., ist die Forschung im Vaticanischen Archive selbst mit Eifer begonnen und fortgesetzt worden, und es steht in Folge dessen bereits eine sehr erfreuliche Ausbeute in Aussicht.

Hr. Schottmüller beschäftigt sich mit noch unbekannten Acten und Urkunden zur Geschichte des Tempelherrn-Ordens und insbesondere der Templerprocesse.

Hr. Friedensburg sammelt Materialien über deutsche Reichsangelegenheiten des 16. Jahrhunderts, welche in erster Linie für die Herausgabe der zweiten Serie der deutschen Reichstagsacten bestimmt sind.

Hr. Baumgarten sammelt Materialien aus dem Gebiete der Zollerana. Was sich an unbekannten Stoffen von dem Kurfürsten Friedrich I. an bietet, ist seine Aufgabe.

Die mit der Leitung dieser römischen Station beauftragte Commission hat alle Ursache, der entgegenkommenden Unterstützung der Beamten des Vaticanischen Archivs in jeder Hinsicht dankbar zu sein.

Ausgegeben am 31. Januar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.
V.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

31. Januar. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Weizsäcker las über den Versuch eines Nationalconcils in Speier den 11. November 1524.

2. Hr. Vahlen las über Arsinoe Zephyritis.

Der Abdruck erfolgt umstehend.

Über Arsinoe Zephyritis.

Von J. Vahlen.

(Nachtrag zum Sitzungsbericht vom 20. December 1888. S. 1368.)

In meinem Aufsatz ‘über ein Alexandrinisches Gedicht des Catullus’ a. a. O. hatte ich nicht die Absicht über Zephyrion und Zephyritis eingehender zu handeln, und hatte daher sowohl andere Zeugnisse übergangen, als auch von dem Epigramm des Posidippus bei Athenaeus (a. a. O. S. 1368) nur soviel angeführt, als für meinen Zweck ausreichend schien. Nachdem ich aber von zwei Seiten, Hrn. Diels und Hrn. Ed. Hiller, aufmerksam gemacht worden bin auf ein zweites Epigramm des Posidippus, das demselben Gegenstand gewidmet ist, wünsche ich den Dank für die freundliche Erinnerung dadurch auszudrücken, dass ich beide Epigramme hier zusammenstelle und mit einigen Bemerkungen begleite.

Athenaeus also, 7, 19 p. 318d, nachdem er ein Epigramm des Callimachus mit einer Widmung an die Arsinoe Zephyritis mitgetheilt, fährt so fort: ἔγραψε δὲ καὶ Ποσειδιππος εἰς τὴν ἐν (ἐπὶ Wilamowitz) τῷ Ζεφυρίῳ τιμωμένην ταύτην Ἀφροδίτην τόδε τὸ ἐπίγραμμα·

τοῦτο καὶ ἐν πόντῳ καὶ ἐπὶ χθονὶ τῆς Φιλαδέλφου
  Κύπριδος ἱλάσκεσθ' ἱερὸν Ἀρσινόης·
γῆν ἀνὰ κοιρανέουσαν ἐπὶ Ζεφυρίτιδος ἀκτῆς
  πρῶτος ὁ ναύαρχος θήκατο Καλλικράτης,
ἣ δὲ καὶ εὐπλοΐην δώσει καὶ χείματι μέσσῳ
  τὸ πλατὺ λισσομένοις ἐκλιπανεῖ πέλαγος.

V. 3 hat Valckenaer Ζεφυρίτιδος für Ζεφυρηίδος gesetzt (vgl. Steph. Byz. s. v. Ζεφύριον). Im Anfang dieses Verses aber hat das überlieferte ἣν ἀνακοιρανέουσαν, das nicht mit ἐπὶ Ζ. ἀκτῆς zu verbinden, nicht ohne Grund Zweifel erregt. Meineke dachte an ἣν ἄρα κοιρ., Kaibel an ἣν ἅλα (oder ἁλὶ) κοιρ. Mein Versuch, γῆν ἀνὰ κοιρανέουσαν, im Ausdruck dem Homerischen μάχην ἀνὰ κοιρανέοντα (Il. 5, 824) entsprechend, geht nach der entgegengesetzten Seite, um die Doppelbeziehung zu Land und Meer, die V. 1 hat, auch hier zum Ausdruck zu bringen ‘durch das Land hin herrschend hat sie auf der Küste zuerst K. aufgepflanzt’,

und um bequemen Anschluss von V. 5 ἡ δὲ καὶ εὐπλοΐην δ. zu gewinnen, worin καὶ nicht mit dem folgenden καὶ correspondirt, sondern 'auch' bedeutet. Vgl. das andere Epigr. V. 5 und 8. In dem letzten Vers hat Madvig Adv. crit. 3, 61 ἐκλεανεῖ verlangt, weil ἐκλιπαίνειν *unam habet pingue faciendi significationem* und die hier nothwendige Übertragung nicht verträgt. Von diesem Gedanken hätte das auf der Seite vorhér bei Athenaeus in Callimachus' Gedicht stehende (V. 5) εἰ δὲ Γαληναίη, λιπαρὴ θεός abhalten können, welches den Sinn des übertragenen ἐκλιπανεῖ πέλαγος erkennen lässt. Denn Casaubonus, der die Form ἐκλιπανεῖ für handschr. ἐκλιμπάνει hergestellt, dachte seltsamer Weise an das Öl, das die Fluthen glätten könne. Madvig aber hat denselben Irrthum noch einmal begangen, indem er Advers. crit. 1, 291 in Callimachus' Hymnus auf Delus V. 155 λιπαρὸν νήεσσιν Ἐχινάδες ὅρμον ἔχουσαι tadelt (*statio et portus quo modo ad opportunitatem commoditatemque significandam* λιπαρὸς νήεσσιν *dici possit, non intelligo, tota enim illius adiectivi vis hinc aliena est*) und λιαρὸν νήεσσιν in Vorschlag bringt. Die drei Stellen werden sich gegenseitig stützen und können zeigen, dass es bedenklich ist, Maass und Art einer Übertragung nach eigenem Geschmack bestimmen zu wollen. Die neuesten Herausgeber des Callimachus wie des Athenaeus haben von Madvig's Conjecturen keinen Gebrauch gemacht.

Das zweite Epigramm hat H. Weil in den Monuments grecs publiés par l'association pour l'encouragement des études grecques en France No. 8. 1879 S. 30 f. bekannt gemacht. Es ist einem Papyrus aus dem Besitz Firmin-Didot's entnommen, der ausser Stücken des Euripides unter der Aufschrift (ΠΟΣ)ΕΙΔΙΠΠΟΥ ΕΠΙΓΡΑΜΜΑΤΑ zwei Epigramme desselben enthält, beide in 5 Distichen, deren erstes Pharos und den Leuchtthurm, das zweite (mit ΑΛΛΟ bezeichnet) die Arsinoe Zephyritis betrifft.

Μέσσον ἐγὼ Φαρίης ἀκτῆς στόματός τε Κανώπου
  ἐν περιφαινομένῳ κύματι χῶρον ἔχω
τῆσδε πολυρρήνου Λιβύης ἀνεμώδεα χηλὴν
  τὴν ἀνατεινομένην εἰς ἰταλὸν Ζέφυρον.
ἔνθα με Καλλικράτης ἱδρύσατο καὶ βασιλίσσης
  ἱερὸν Ἀρσινόης Κύπριδος ὠνόμασεν.
ἀλλ' ἐπὶ τὴν Ζεφυρῖτιν ἀκουσομένην Ἀφροδίτην
  Ἑλλήνων ἁγναὶ βαίνετε θυγατέρες,
οἵ θ' ἁλὸς ἐργάται ἄνδρες· ὁ γὰρ ναύαρχος ἔτευξεν
  τοῦθ' ἱερὸν παντὸς κύματος εὐλίμενον.

Die Schreibung lässt nichts zu wünschen übrig, ἔθηκεν V. 9 hat Weil wohl nur aus Versehen gesetzt, der Papyrus ἔτευξεν. In demselben Vers ist Weil geneigt, ἁλὸς ἐργάται ἄνδρες von Fischern lieber als von

Seefahrern zu verstehen. Doch wollen sich dazu der ναύαρχος und der folgende Gedanke nicht wohl fügen, und ist es bekannt, dass ἐργάζεσθαι τὴν θάλατταν und ἡ περὶ τὴν θάλατταν ἐργασία (Plato Politeia 2, 371 b) auch von Seefahrern gesagt worden ist.

Im Grundgedanken stimmen beide Epigramme überein; in der Ausführung wenig verschieden, sind sie vermuthlich als Aufschriften für verschiedene Stellen des Heiligthums gedacht. Das Epigramm des Papyrus giebt die Lage des sacellum der Aphrodite Zephyritis, auf einer Landzunge zwischen der Pharischen ἀκτή und der Kanopischen Mündung, mit möglichster Deutlichkeit an, in Übereinstimmung mit Strabo 17, p. 800 . . . ὁ ἑξῆς ἐπὶ τὸν Κάνωβον πλοῦς ἐστι παράλληλος τῇ παραλίᾳ τῇ ἀπὸ Φάρου μέχρι τοῦ Κανωβικοῦ στόματος· στενὴ γάρ τις ταινία μεταξὺ διήκει τοῦ τε πελάγους καὶ τῆς διώρυγος, ἐν ᾗ ἔστιν ἥ τε μικρὰ Ταπόσειρις μετὰ τὴν Νικόπολιν καὶ τὸ Ζεφύριον, ἄκρα ναΐσκον ἔχουσα Ἀρσινόης Ἀφροδίτης, und mit Catullus' Bezeichnung V. 57

ipsa suum Zephyritis eo famulum legarat,
Graia Canopiis incola litoribus,

an den überdies V. 8 Ἑλλήνων ἁγναὶ βαίνετε θυγατέρες (vgl. 56 *Veneris casto collocat in gremio*) erinnert. Je schärfer aber aus diesen Vergleichungen das Bild der mit ihrem Cult an das Zephyrion geknüpften Arsinoe Aphrodite hervortritt, die in Catullus' Darstellung den Raub des Haares der Berenice herbeigeführt hat, um so mehr befestigt sich mir die Vorstellung, die ich von dem Hergang bei diesem Raube a. a. O. zu begründen versucht habe.

Ausgegeben am 7. Februar.

1889.

VI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

31. Januar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

1. Hr. Kronecker las die umstehend folgende Fortsetzung seiner am 29. Juli 1886 begonnenen Mittheilung: Zur Theorie der elliptischen Functionen.

2. Hr. Waldeyer legte eine Mittheilung des Hrn. Dr. Heinricius in Helsingfors vor über eine von demselben im hiesigen anatomischen Institut ausgeführte Untersuchung über die Entwickelung der Hunde-Placenta.

Dieselbe erscheint in einem der nächsten Berichte.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 29. Juli 1886, XXXIX.)

XII.

In meiner Mittheilung[1] vom 22. Januar 1863 »über die Auflösung der Pell'schen Gleichung mittels elliptischer Functionen« habe ich eine Formel angegeben, welche — wie ich schon dort hervorgehoben habe — die Grundlage aller meiner damaligen, die Anwendung der elliptischen Functionen auf die Theorie der binären quadratischen Formen betreffenden Untersuchungen bildete. Dieselbe Formel erweist sich aber auch als wichtig für die Theorie der elliptischen Functionen selbst, da sie deren Darstellung in einer neuen bemerkenswerthen Gestalt ergiebt.

Um diese zu entwickeln knüpfe ich an die im Sitzungsbericht vom 26. April 1883 abgedruckte und dort mit ($\mathfrak{D}$) bezeichnete Formel:

$$(1)\qquad \log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-|\sqrt{\Delta}|}{2\pi} \lim_{\rho=0} \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\rho}}$$

an, welche, wie ich schon a. a. O. erwähnt habe, mit jener im Monatsbericht vom Januar 1863 angegebenen Formel, abgesehen von den Bezeichnungen, übereinstimmt. Die Function Λ auf der linken Seite ist durch den Ausdruck:

$$(2)\qquad (4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i} \cdot \frac{\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)}{\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}}$$

definirt und demnach auch gleich:

$$(3)\qquad e^{\left(\tau^2-\tau+\frac{1}{6}\right)(w_1+w_2)\pi i} \prod_{\varepsilon, n} \left(1-e^{2(nw_1+\varepsilon\tau w_1+\varepsilon\sigma)\pi i}\right)\left(1-e^{2(nw_2+\varepsilon\tau w_2-\varepsilon\sigma)\pi i}\right),$$

wenn die Multiplication auf die Werthe $\varepsilon = +1, -1$ und für $\varepsilon = +1$ auf die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots$, für $\varepsilon = -1$ aber nur auf die Werthe

[1] Monatsbericht vom Januar 1863, S. 44.

$n = 1, 2, 3, \ldots$ erstreckt wird. Die Grössen σ, τ, a, b, c werden als reell und den Bedingungen:

$$a > 0,\; c > 0,\; 4ac - b^2 > 0$$

genügend vorausgesetzt; die Grössen w_1, w_2 sind durch die Gleichungen:

$$w_1 = \frac{-b + i\,|\sqrt{\Delta}|}{2c},\quad w_2 = \frac{b + i\,|\sqrt{\Delta}|}{2c},\quad \Delta = 4ac - b^2$$

gegeben, und die Summation auf der rechten Seite der Formel (1) ist auf alle ganzzahligen, positiven und negativen Werthe von m, n mit alleiniger Ausnahme des Systems $m = 0, n = 0$, auszudehnen.

Der Geltungsbereich der Formel (1) erstreckt sich noch weiter. Die Grössen a, b, c können complexe Werthe haben, die aber gewissen im I. Abschnitt meiner Mittheilung vom 19. April 1883 angegebenen Beschränkungen zu unterwerfen sind. Versteht man, wie a. a. O., unter w_1, w_2 irgend zwei complexe Grössen, für welche die reellen Theile von $w_1 i$ und $w_2 i$ negativ werden, und setzt:

$$(4)\qquad \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} = a_0 i,\quad \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} = b_0 i,\quad \frac{-1}{w_1 + w_2} = c_0 i,$$

so dass w_1 und $-w_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0$$

werden, so besteht die Gleichung:

$$(5)\qquad \log \mathrm{A}(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-1}{2\pi} \lim_{\varrho = 0} \sum \frac{e^{2(m\sigma + n\tau)\pi i}}{(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)^{1+\varrho}},$$

welche mit der Formel (1) übereinstimmt, wenn in dieser die Werthe:

$$a = a_0\,|\sqrt{\Delta}|,\quad b = b_0\,|\sqrt{\Delta}|,\quad c = c_0\,|\sqrt{\Delta}|$$

substituirt werden.

Die Gleichung (5) findet sich schon im IV. Abschnitte meiner oben erwähnten Mittheilung vom 19. April 1883, wo sie mit ($\mathfrak{D}_0$) bezeichnet und an die Bedingung der Realität von a_0, b_0, c_0 geknüpft erscheint. Indessen ist leicht zu sehen, dass ihr Geltungsbereich sich auch auf complexe Grössen a_0, b_0, c_0 der oben angegebenen Beschaffenheit erstreckt. Denn für derartige Grössen a_0, b_0, c_0 war im I. Abschnitt jener Mittheilung die Gleichung ($\mathfrak{A}$) entwickelt worden, aus welcher dann mittels zweier verschiedener Methoden in den Abschnitten IV und V die Gleichung ($\mathfrak{D}_0$) hergeleitet worden ist. Diese Methoden bleiben aber durchaus anwendbar, wenn die erst im art. IV eingeführten Beschränkungen für a_0, b_0, c_0 fallen gelassen und nur die ursprünglich für die Geltung der Gleichung ($\mathfrak{A}$) im art. 1 aufgestellten Bedingungen festgehalten werden.

§. 1.

Um mittels der Formeln (1) und (5) zu einer Darstellung der elliptischen Functionen zu gelangen, benutze ich die hierfür besonders geeignete im §. 4 des vorigen Abschnittes[1] eingeführte Bezeichnung:

$$(6)\qquad \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}\zeta, \tfrac{1}{2}w\right) = \frac{\vartheta_1(\zeta, w)}{\vartheta_0(\zeta, w)} = \frac{\sum\limits_n (-1)^n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 w\pi i} \sin(2n+1)\zeta\pi}{\sum\limits_n (-1)^n e^{n^2 w\pi i} \cos 2n\zeta\pi},$$

deren Beziehung zu den JACOBI'schen Bezeichnungen in den Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{gathered} \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}\zeta, \tfrac{1}{2}w\right) = \sqrt{\varkappa}\sin\mathrm{am}(2K\zeta, \varkappa), \quad \sqrt{\varkappa} = \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) \\ 2K = \pi(\vartheta_3(0, w))^2, \quad w = \frac{K'}{K}i \end{gathered}$$

enthalten ist. Hiernach wird nämlich vermöge der durch den Ausdruck (2) gegebenen Definition von $\mathrm{A}(\sigma, \tau, w_1, w_2)$:

$$(8)\qquad \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w_1), \tfrac{1}{2}w_1\right)\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma-\tau w_2), \tfrac{1}{2}w_2\right) = \frac{\mathrm{A}(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{\mathrm{A}(\sigma, \tau+\frac{1}{2}, w_1, w_2)},$$

und es findet sich also ein Product zweier elliptischer Functionen *El* durch einen Quotienten zweier Functionen A ausgedrückt. Aus der Formel (5) resultirt demnach die Gleichung:

$$(9)\quad \log \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w_1), \tfrac{1}{2}w_1\right)\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma-\tau w_2), \tfrac{1}{2}w_2\right) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\rho=0}\sum_{m,\nu}\frac{e^{2(m\sigma+\nu\tau)\pi i}}{(a_0m^2+b_0m\nu+c_0\nu^2)^{1+\rho}},$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\ \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

und diese kann, wenn

$$a_0\pi = a_\pi,\ b_0\pi = b_\pi,\ c_0\pi = c_\pi$$

gesetzt wird, in folgender Weise geschrieben werden:

$$(10)\quad \log \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w_1), \tfrac{1}{2}w_1\right)\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma-\tau w_2), \tfrac{1}{2}w_2\right) = -\lim_{\rho=0}\sum_{m,\nu}\frac{e^{2(m\sigma+\nu\tau)\pi i}}{(a_\pi m^2+b_\pi m\nu+c_\pi\nu^2)^{1+\rho}}.$$

Die Summation ist hier auf alle ganzen Zahlen m von $-\infty$ bis $+\infty$ und auf alle positiven und negativen ungraden Zahlen ν zu erstrecken; die Grössen σ und τ sind als reell vorausgesetzt, die complexen Grössen w_1 und w_2 sind nur der Bedingung unterworfen, dass die reellen Theile von w_1i und w_2i negativ sein müssen, und die Grössen a_π, b_π, c_π sind dadurch vollkommen bestimmt, dass erstens w_1 und $-w_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a_\pi + b_\pi w + c_\pi w_2 = 0$$

[1] Sitzungsbericht vom 29. Juli 1886, XXXIX.

werden sollen, dass zweitens:

$$4a_\pi c_\pi - b_\pi^2 = \pi^2$$

und drittens der reelle Theil von c_π positiv sein soll. Denn vermöge der ersten beiden Forderungen bestimmen sich a_π, b_π, c_π durch die Gleichungen:

$$\varepsilon a_\pi = \frac{-iw_1 w_2 \pi}{w_1 + w_2}, \quad \varepsilon b_\pi = \frac{-i(w_1 - w_2)\pi}{w_1 + w_2}, \quad \varepsilon c_\pi = \frac{i\pi}{w_1 + w_2} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

und der Werth $\varepsilon = +1$ bestimmt sich durch die dritte Forderung und durch jene Bedingung, dass die reellen Theile von $w_1 i$ und $w_2 i$ negativ sein sollen.

Setzt man auf der rechten Seite $\cos 2(m\sigma + \nu\tau)\pi + i \sin 2(m\sigma + \nu\tau)\pi$ an Stelle von $e^{2(m\sigma+\nu\tau)\pi i}$, so kommt:

$$(10^*) \quad \log \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau w_1), \tfrac{1}{2} w_1\right) \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma - \tau w_2), \tfrac{1}{2} w_2\right) = -\lim_{\varrho = 0} \sum_{m,\nu} \frac{\cos 2(m\sigma + \nu\tau)\pi}{(a_\pi m^2 + b_\pi m\nu + c_\pi \nu^2)^{1+\varrho}},$$

und wenn man nun von den Logarithmen der elliptischen Functionen *El* zu den Functionen selbst übergeht, so resultirt die Gleichung:

$$(11) \quad \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau w_1), \tfrac{1}{2} w_1\right) \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma - \tau w_2), \tfrac{1}{2} w_2\right) = \lim_{\varrho = 0} \prod_{m,\nu} e^{-(a_\pi m^2 + b_\pi m\nu + c_\pi \nu^2)^{-1-\varrho} \cos 2(m\sigma + \nu\tau)\pi}.$$

in welcher das Product zweier elliptischen Functionen *El* durch ein zweifach unendliches Product dargestellt erscheint, und zwar so, dass darin sowohl die Periodicitätseigenschaften der elliptischen Functionen als auch diejenigen, welche sich auf deren Transformation beziehen, unmittelbar in Evidenz treten.

Die Periodicitätseigenschaften der elliptischen Functionen *El*, wie sie im §. 4 des vorigen Abschnittes[1] in den Gleichungen (22) und (22*) angegeben sind, werden durch die Relationen:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + 1 + \tau w), \tfrac{1}{2} w\right) = -\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau w), \tfrac{1}{2} w\right)$$
$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + (\tau + 1) w), \tfrac{1}{2} w\right) = \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau w), \tfrac{1}{2} w\right)$$

dargelegt. Das die linke Seite der Gleichungen (11) bildende Product der beiden elliptischen Functionen muss also vermöge deren Periodicitätseigenschaften ungeändert bleiben, wenn σ und τ um irgend welche ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden, und dabei bleibt in der That jeder einzelne Factor des Products auf der rechten Seite ungeändert.

[1] Sitzungsbericht vom 29. Juli 1886, XXXIX.

Die lineare Transformation der elliptischen Functionen $\mathrm{El}(\zeta, \frac{1}{2}w)$ wird gemäss der Gleichung (23*) im §. 4 des vorigen Abschnittes[1] durch die Relationen:

$$w_1' = \frac{\alpha w_1 - 2\alpha'}{-\frac{1}{2}\beta w_1 + \beta'}, \quad w_2' = \frac{\alpha w_2 + 2\alpha'}{\frac{1}{2}\beta w_2 + \beta'}, \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

$$\sigma' = \alpha\sigma + 2\alpha'\tau, \quad \tau' = \tfrac{1}{2}\beta\sigma + \beta'\tau$$

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma' + \tau' w_1'), \tfrac{1}{2}w_1'\right) = i^{\alpha - 2\alpha' + \alpha\alpha' - 1}\,\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau w_1), \tfrac{1}{2}w_1\right)$$

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma' - \tau' w_2'), \tfrac{1}{2}w_2'\right) = i^{\alpha + 2\alpha' - \alpha\alpha' - 1}\,\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma - \tau w_2), \tfrac{1}{2}w_2\right)$$

ausgedrückt, in denen $\alpha, \alpha', \frac{1}{2}\beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten. Da also β grade ist, müssen vermöge der Gleichungen $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ die Zahlen α und β' ungrade sein. Das Product:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau w_1), \tfrac{1}{2}w_1\right)\,\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma - \tau w_2), \tfrac{1}{2}w_2\right)$$

muss daher ungeändert bleiben, wenn man die Grössen:

$$\sigma, \tau, w_1, w_2$$

durch:

$$\sigma', \tau', w_1', w_2'$$

ersetzt, d. h. wenn man das System der Grössen:

$$(\sigma, \tau, a_\pi, b_\pi, c_\pi)$$

durch ein anderes:

$$(\sigma', \tau', a_\pi', b_\pi', c_\pi')$$

ersetzt, welches mit dem ersteren in einer solchen Beziehung steht, dass die quadratische Form:

$$a_\pi x^2 + b_\pi xy + c_\pi y^2$$

durch die Substitutionen:

$$x = \alpha x' + \tfrac{1}{2}\beta y', \quad y = 2\alpha' x' + \beta' y'$$

in die Form:

$$a_\pi' x'^2 + b_\pi' x' y' + c_\pi' y'^2$$

übergeht und zugleich:

$$\sigma x + \tau y = \sigma' x' + \tau' y'$$

wird. In den beiden Producten:

$$\prod_{m,\nu} e^{-(a_\pi m^2 + b_\pi m\nu + c_\pi \nu^2)^{-1-\varrho} \cos 2(m\sigma + \nu\tau)\pi}, \quad \prod_{m',\nu'} e^{-(a_\pi' m'^2 + b_\pi' m'\nu' + c_\pi' \nu'^2) \cos 2(m'\sigma + \nu'\tau)\pi}$$

$$(m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \nu, \nu' = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

---

[1] Sitzungsbericht vom 29. Juli 1886, XXXIX.

ist daher jeder Factor des ersten mit demjenigen des zweiten identisch, welcher durch die Gleichungen:

$$m' = \beta' m - \tfrac{1}{2}\beta\nu\,, \quad \nu' = -2\alpha' m + \alpha\nu$$

bestimmt wird.

§. 2.

Um die Formeln (10) und (11) in den Jacobi'schen Bezeichnungen darzustellen, setze ich gemäss den oben unter (7) gegebenen Bestimmungen:

$$\text{(12)} \quad \begin{gathered} \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau w_1), \tfrac{1}{2} w_1\right) = \sqrt{\varkappa_1} \sin \mathrm{am}\left(2(\sigma + \tau w_1) K_1, \varkappa_1\right), \\ \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma - \tau w_2), \tfrac{1}{2} w_2\right) = \sqrt{\varkappa_2} \sin \mathrm{am}\left(2(\sigma - \tau w_2) K_2, \varkappa_2\right), \\ \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2} w_1\right) = \sqrt{\varkappa_1}\,, \quad \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2} w_2\right) = \sqrt{\varkappa_2}\,, \\ \vartheta_3(0, w_1) = \sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}\,, \quad \vartheta_3(0, w_2) = \sqrt{\frac{2K_2}{\pi}}\,, \\ w_1 = \frac{K_1'}{K_1} i\,, \quad w_2 = \frac{K_2'}{K_2} i\,. \end{gathered}$$

Alsdann gehen die Formeln (10) und (11) in folgende über:

$$\text{(13)} \quad \begin{aligned} &\log \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2} \sin \mathrm{am}\left(2(\sigma K_1 + \tau K_1' i), \varkappa_1\right) \sin \mathrm{am}\left(2(\sigma K_2 - \tau K_2' i), \varkappa_2\right) \\ &\qquad = - \lim_{\varrho = 0} \sum_{m,\nu} \frac{\cos 2(m\sigma + \nu\tau)\pi}{(a_\pi m^2 + b_\pi m\nu + c_\pi \nu^2)^{1+\varrho}}\,, \end{aligned}$$

$$\text{(14)} \quad \begin{aligned} &\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2} \sin \mathrm{am}\left(2(\sigma K_1 + \tau K_1' i), \varkappa_1\right) \sin \mathrm{am}\left(2(\sigma K_2 - \tau K_2' i), \varkappa_2\right) \\ &\qquad = \lim_{\varrho = 0} \prod_{m,\nu} e^{-(a_\pi m^2 + b_\pi m\nu + c_\pi \nu^2)^{-1-\varrho} \cos 2(m\sigma + \nu\tau)\pi}\,. \end{aligned}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

Setzt man hierin $\sigma = \frac{1}{2}, \tau = 0$, so kommt:

$$\text{(15)} \quad \tfrac{1}{2} \log \varkappa_1 \varkappa_2 = \lim_{\varrho = 0} \left\{ \sum_{\mu,\nu} \frac{1}{(a_\pi \mu^2 + b_\pi \mu\nu + c_\pi \nu^2)^{1+\varrho}} - \sum_{g,\nu} \frac{1}{(a_\pi g^2 + b_\pi g\nu + c_\pi \nu^2)^{1+\varrho}} \right\}$$

$$\text{(16)} \quad \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2} = \lim_{\varrho = 0} \frac{\prod\limits_{\mu,\nu} e^{(a_\pi \mu^2 + b_\pi \mu\nu + c_\pi \nu^2)^{-1-\varrho}}}{\prod\limits_{g,\nu} e^{(a_\pi g^2 + b_\pi g\nu + c_\pi \nu^2)^{-1-\varrho}}}\,.$$

$$(\mu, \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots;\ g = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots)$$

Die Grössen a_π, b_π, c_π sind hier, wie oben, durch die Bedingungsgleichungen:

$$a_\pi + b_\pi w_1 + c_\pi w_1^2 = 0\,,\ a_\pi - b_\pi w_2 + c_\pi w_2^2 = 0\,,\ 4a_\pi c_\pi - b_\pi^2 = \pi^2$$

mit den Grössen w_1, w_2 verbunden. Setzt man nun:

$$(17) \qquad w_1' = \frac{\alpha w_1 + \beta}{\gamma w_1 + \delta}\,,\ w_2' = \frac{\alpha w_2 - \beta}{-\gamma w_2 + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

wo α, δ ungrade und β, γ grade Zahlen bedeuten, und bestimmt die Grössen a_π', b_π', c_π' mittels der Gleichungen:

$$a_\pi' + b_\pi' w_1' + c_\pi' w_1'^2 = 0\,,\ a_\pi' - b_\pi' w_2' + c_\pi' w_2'^2 = 0\,,\ 4a_\pi' c_\pi' - b_\pi'^2 = \pi^2,$$

so wird:

$$a_\pi \mu^2 + b_\pi \mu\nu + c_\pi \nu^2 = a_\pi' \mu'^2 + b_\pi' \mu'\nu' + c_\pi' \nu'^2\,,$$
$$a_\pi g^2 + b_\pi g\nu_1 + c_\pi \nu_1^2 = a_\pi' g'^2 + b_\pi' g'\nu_1' + c_\pi' \nu_1'^2\,,$$

wenn die Zahlen μ', ν', g', ν_1' aus den Zahlen μ, ν, g, ν_1 mittels der Relationen:

$$\gamma\nu + \delta\mu = \mu'\,,\ \alpha\nu + \beta\mu = \nu'$$
$$\gamma\nu_1 + \delta g = g'\,,\ \alpha\nu_1 + \beta g = \nu_1'$$

bestimmt werden. Da β, γ grade sind, werden offenbar μ', ν', ν_1' ungrade und g' wird grade. Die in der Gleichung (16) enthaltene Darstellung von $\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}$ als Function der beiden Wurzeln der Gleichung:

$$a_\pi + b_\pi w + c_\pi w^2 = 0$$

setzt demnach jene Eigenschaft der Unveränderlichkeit bei linearen Transformationen (17) in Evidenz.

Um ganz bei den Jacobi'schen Bezeichnungen zu bleiben, muss man sich die Grössen a_π, b_π, c_π auf der rechten Seite der Gleichung (16) durch die Gleichungen:

$$a_\pi K_1^2 + b_\pi K_1 K_1' i - c_\pi K_1'^2 = 0,\ a_\pi K_2^2 - b_\pi K_2 K_2' i - c_\pi K_2'^2 = 0,\ 4a_\pi c_\pi - b_\pi^2 = \pi^2$$

bestimmt denken, in denen K_1, K_1', K_2, K_2' die Integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \varkappa_1^2 \sin^2\phi}}\,,\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi + \varkappa_1^2 \sin^2\phi}}\,,\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \varkappa_2^2 \sin^2\phi}}\,,\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi + \varkappa_2^2 \sin^2\phi}}$$

bedeuten.

Man kann nun $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ einander gleich nehmen. Die Grössen a_π, b_π, c_π bestimmen sich dann in folgender Weise:

$$a_\pi = \frac{\pi K'}{2K}\,,\ b_\pi = 0\,,\ c_\pi = \frac{\pi K}{2K'}\,,$$

und die Gleichung (16) ergiebt daher folgende bemerkenswerthe Darstellung von $\sqrt{\varkappa}$ als doppelt unendliches Product:

$$(18)\qquad \sqrt{x} = \lim_{\rho=0} \frac{\prod\limits_{\mu,\nu} e^{\frac{KK'}{\pi}(K'^2\mu^2+K^2\nu^2)^{-1-\rho}}}{\prod\limits_{g,\nu} e^{\frac{KK'}{\pi}(K'^2 g^2+K^2\nu^2)^{-1-\rho}}} \qquad \begin{pmatrix}\mu,\nu=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots\\ g=0,\pm 2,\pm 4,\pm 6,\ldots\end{pmatrix},$$

in welcher mit K, K' wie bei JACOBI die Integrale:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\phi}}, \quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi+x^2\sin^2\phi}}$$

bezeichnet sind.

§. 3.

Um ein einfaches Beispiel zu wählen, setze ich $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ und also $K=K'$. Alsdann resultirt aus der Formel (18), dass das doppelt unendliche Product:

$$(19)\qquad \frac{\prod\limits_{g,\nu} e^{\frac{4}{\pi}(g^2+\nu^2)^{-1-\rho}}}{\prod\limits_{\lambda,\mu} e^{\frac{4}{\pi}(\lambda^2+\mu^2)^{-1-\rho}}} \qquad \begin{pmatrix} g=0,\pm 2,\pm 4,\ldots\\ \lambda,\mu,\nu=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots\end{pmatrix}$$

sich für $\rho=0$ dem Grenzwerth 2 nähert. Dies soll jetzt direct nachgewiesen werden.

Bedeutet (λ,μ) das Werthsystem für irgend einen bestimmten Factor des Nenners, so ist entweder $\frac{1}{2}(\lambda+\mu)$ oder $\frac{1}{2}(\lambda-\mu)$ eine grade Zahl. Es sei nun $\varepsilon=\pm 1$ und $\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon\mu)$ eine grade Zahl. Alsdann kann man setzen:

$$g=\tfrac{1}{2}(\lambda+\varepsilon\mu),\ \nu=\tfrac{1}{2}(\lambda-\varepsilon\mu);$$

jedem System (g,ν) eines Factors im Zähler des Productes (19) entspricht demnach eines von zwei Systemen (λ,μ) der Factoren im Nenner und zwar so, dass die Relation:

$$g^2+\nu^2=\tfrac{1}{2}(\lambda^2+\mu^2)$$

und daher, wenn $f(x)$ irgend eine eindeutige Function von x bedeutet, die Gleichung:

$$\sum_{g,\nu} f(g^2+\nu^2) = \sum_{\lambda,\mu} f(\tfrac{1}{2}(\lambda^2+\mu^2))$$

besteht. Hier erstreckt sich die Summation links auf alle graden Zahlen g und alle ungraden Zahlen ν von $-\infty$ bis $+\infty$, rechts auf alle positiven und negativen ungraden Zahlen λ, aber nur auf alle

positiven ungraden Zahlen μ. Die Gleichung kann daher auch so geschrieben werden:

$$(20)\qquad \sum_{g,\nu} f(g^2+\nu^2) = \sum_{\lambda,\mu} f\left(\tfrac{1}{2}(\lambda^2+\mu^2)\right) \qquad \left(\begin{matrix} g=0,\pm 2,\pm 4,\dots \\ \lambda,\mu,\nu=1,3,5,\dots \end{matrix}\right).$$

Der Logarithmus des Products (19) wird gleich der Differenz zweier doppelt unendlichen Reihen:

$$\frac{8}{\pi}\sum_{g,\nu}\frac{1}{(g^2+\nu^2)^{1+\rho}} - \frac{16}{\pi}\sum_{\lambda,\mu}\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{1+\rho}} \qquad \left(\begin{matrix} g=0,\pm 2,\pm 4,\dots \\ \lambda,\mu,\nu=1,3,5,\dots \end{matrix}\right),$$

welche mit Benutzung der Relation (20) in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$(2^\rho-1)\frac{16}{\pi}\sum_{\lambda,\mu}\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{1+\rho}} \qquad (\lambda,\mu=1,3,5,\dots).$$

Die zu beweisende Gleichung kann daher in der Form:

$$(21)\qquad \log 2 = \frac{16}{\pi}\lim_{\rho=0}\sum_{\lambda,\mu}\frac{2^\rho-1}{(\lambda^2+\mu^2)^{1+\rho}} \qquad (\lambda,\mu=1,3,5,\dots)$$

geschrieben werden, und diese Gleichung geht, wenn man sich den Factor $2^\rho-1$ rechts nach Potenzen von ρ entwickelt denkt, in folgende über:

$$(22)\qquad 1 = \frac{16}{\pi}\lim_{\rho=0}\rho\sum\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{1+\rho}} \qquad (\lambda,\mu=1,3,5,\dots).$$

Diese Gleichung kann nunmehr mit Hülfe des von DIRICHLET aufgestellten Theorems,[1] oder auch mittels jener Methode verificirt werden, welche ich in meiner Mittheilung vom 12. Mai 1864 angewendet habe.[2] Die letztere Methode, welche ich hier benutzen will, beruht auf der üblichen Art der Summation von Reihen mit Hülfe von Integralen.

Da nämlich offenbar die Ungleichheiten:

$$\frac{1}{(\lambda^2+(\mu+2)^2)^{1+\rho}} < \frac{1}{2}\int_\mu^{\mu+2}\frac{dx}{(\lambda^2+x^2)^{1+\rho}} < \frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{1+\rho}}$$

$$\frac{1}{(\lambda^2+1)^{1+\rho}} < \int_0^1\frac{dx}{(\lambda^2+x^2)^{1+\rho}} < \frac{1}{\lambda^{2+2\rho}}$$

bestehen, so ergeben sich für die Summe auf der rechten Seite der Gleichung (22) die Ungleichheitsbedingungen:

$$\frac{-1}{\lambda^{2+2\rho}} + \int_0^\infty\frac{dx}{(\lambda^2+x^2)^{1+\rho}} < 2\sum_\mu\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{1+\rho}} < \frac{1}{(\lambda^2+1)^{1+\rho}} + \int_0^\infty\frac{dx}{(\lambda^2+x^2)^{1+\rho}},$$
$$(\mu=1,3,5,\dots)$$

[1] Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, §. 1. CRELLE's Journal, Bd. XIX, S. 326.

[2] Monatsbericht vom Mai 1864 S. 292.

welche, wenn $x = \lambda z$ gesetzt wird, in folgender Weise dargestellt werden können:

$$\frac{-1}{\lambda^{2+2\varrho}} + \frac{1}{\lambda^{1+2\varrho}}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^{1+\varrho}} < 2\sum_\mu \frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{1+\varrho}} < \frac{1}{(\lambda^2+1)^{1+\varrho}} + \frac{1}{\lambda^{1+2\varrho}}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^{1+\varrho}}.$$

Der Grenzwerth:

(23) $$\lim_{\varrho=0} \rho \sum_{\lambda,\mu} \frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^{1+\varrho}} \qquad (\lambda, \mu = 1, 3, 5, \ldots)$$

muss hiernach mit dem Grenzwerth:

(24) $$\tfrac{1}{2}\lim_{\varrho=0} \rho \sum_\lambda \frac{1}{\lambda^{1+2\varrho}} \int\limits_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^{1+\varrho}} \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots).$$

übereinstimmen. Nun resultirt bei nochmaliger Anwendung obiger Methode die Ungleichheit:

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{1+2\varrho}} < \sum \frac{1}{\lambda^{1+2\varrho}} < 1 + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{1+2\varrho}} \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots),$$

aus welcher unmittelbar erhellt, dass:

$$\lim_{\varrho=0} \rho \sum_\lambda \frac{1}{\lambda^{1+2\varrho}} = \frac{1}{4} \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots)$$

ist. Hiernach wird der Grenzwerth (24) und folglich auch der Grenzwerth (23) gleich:

$$\frac{\pi}{16},$$

und die Gleichung (22) ist also vollständig verificirt.

§. 4.

Gemäss den im art. IV enthaltenen Ausführungen[1] kann in den obigen Formeln überall unter den Summen- und Productzeichen $\rho = 0$ gesetzt werden, wenn die Summation und Multiplication in geeigneter Weise erfolgt. Dies lässt sich an der mit (14) bezeichneten Formel so darlegen, dass das Product zweier elliptischer Functionen:

$$\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}\, \sin\text{am}\left(2(\sigma K_1 + \tau K_1' i), \varkappa_1\right) \sin\text{am}\left(2(\sigma K_2 - \tau K_2' i), \varkappa_2\right)$$

sich in das doppelt unendliche Product:

(25) $$\lim_{r=\infty, s=\infty} \lim \prod_{m,n} e^{-\left(a_\pi m^2 + b_\pi m(2n+1) + c_\pi (2n+1)^2\right)^{-1} \cos 2\left(m\sigma + (2n+1)\tau\right)}$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm r;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm s)$$

entwickeln lässt.

---

[1] Sitzungsbericht vom 26. April 1883, XXI.

Wird hierbei $\sigma = \frac{1}{2}, \tau = 0$ gesetzt, so resultirt die Formel:

$$(26)\qquad \sqrt{x_1 x_2} = \lim_{r=\infty}\lim_{s=\infty}\prod_{\mu,\nu}\frac{e^{\left(a_\pi\mu^2+b_\pi\mu\nu+c_\pi\nu^2\right)^{-1}}}{e^{\left(a_\pi(\mu+1)^2+b_\pi(\mu+1)\nu+c_\pi\nu^2\right)^{-1}}},$$

$$\begin{pmatrix}\mu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (2r+1),\\ \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (2s+1)\end{pmatrix}$$

und wenn nun, wie oben:

$$a_\pi = \frac{\pi K'}{2K},\quad b_\pi = 0,\quad c_\pi = \frac{\pi K}{2K'}$$

genommen wird, so ergiebt sich für den Modul x die Productentwickelung:

$$x^{\frac{1}{2}\pi} = \lim_{r=\infty}\lim_{s=\infty}\prod_{\mu,\nu}\frac{e^{KK'\left(K'^2\mu^2+K^2\nu^2\right)^{-1}}}{e^{KK'\left(K'^2(\mu+1)^2+K^2\nu^2\right)^{-1}}}\qquad \begin{pmatrix}\mu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (2r+1),\\ \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (2s+1)\end{pmatrix}.$$

Hieraus geht für $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ die Gleichung:

$$2^\pi = \lim_{r=\infty}\lim_{s=\infty}\prod_{m,n}\frac{e^{\left(m^2+n^2+n+\frac{1}{4}\right)^{-1}}}{e^{\left(m^2+n^2+m+n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}}\qquad \begin{pmatrix}m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm r\\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm s\end{pmatrix}$$

hervor, welche eine merkwürdige Zahlenrelation enthält.

(Fortsetzung folgt.)

Die Spaltöffnungen der Gramineen und Cyperaceen.

Von S. Schwendener.

(Gelesen in der Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe vom 5. Juli 1888 [s. Jahrg. 1888 St. XXXII S. 715].)

Hierzu Taf. I.

1. Eigenart des Baues und der Mechanik.

Die Spaltöffnungen der Gramineen und Cyperaceen zeigen in wesentlichen Punkten ein übereinstimmendes, aber von den übrigen Angiospermen abweichendes Verhalten. Die Übereinstimmung wäre noch grösser, wenn nicht innerhalb der Scirpeen in Bezug auf die Lumina der Schliesszellen eine gewisse Annäherung an die Juncaceen und die eigentlichen Liliifloren stattfände, wodurch die Zahl der gemeinsamen Züge etwas eingeschränkt wird. Dies ist auch der Grund, der mich veranlasste, Gramineen und Cyperaceen gesondert zu besprechen.

Gramineen. Durchmustert man eine Reihe von Querschnitten durch den Spaltöffnungsapparat beliebiger Gramineen, so begegnet man stets nur Schliesszellen mit kleinem, spaltenförmigem Lumen und mit aussergewöhnlich starken Verdickungsleisten, welche aber nicht, wie sonst, der Bauchseite genähert, sondern nahezu median gelegen sind (ähnlich wie in Fig. 3—5). Solche Querschnittsformen kommen nun zwar auch anderwärts und namentlich bei den Dicotylen keineswegs selten vor; allein in all' den Fällen, wo die betreffenden Spaltöffnungen näher untersucht worden sind, erwiesen sich dieselben als functionslos, d. h. sie hatten die Fähigkeit sich zu öffnen eingebüsst. Auch waren es ausnahmslos ältere Blätter, an denen dieses auffallende Verhalten constatirt werden konnte; die jüngeren zeigten die gewöhnliche Querschnittsansicht mit entsprechendem Öffnungsmechanismus.

Bei den Gramineen kann man sich nun aber leicht überzeugen, dass auch die Spaltöffnungen jugendlicher Blätter, die sich im Lichte weit öffnen und bei Verdunkelung wieder schliessen, dasselbe Querschnittsbild darbieten, wie es oben geschildert wurde, und da unter solchen Umständen eine Krümmung der Schliesszellen durch Zunahme

der Turgescenz mechanisch unmöglich ist, so bleibt nur die Annahme übrig, dass hier die Vorgänge, welche das Öffnen und Schliessen bewirken, von den bis dahin beschriebenen wesentlich abweichen.

Zu derselben Schlussfolgerung führt übrigens ganz direct auch die Form der geöffneten Centralspalte in der Flächenansicht. Während diese Spalte sonst durch zwei nach aussen convexe Bogenlinien begrenzt erscheint, welche sich an den Enden unter spitzem Winkel vereinigen, zeigt sie bei den Gramineen die Form eines länglichen Sechsecks, dessen Seitenlinien unter sich parallel und geradlinig verlaufen oder sogar etwas nach innen gewölbt sind (Fig. 11). Beim Öffnen und Schliessen bewegen sich diese Linien parallel mit sich selbst, vergleichbar der verschiebbaren Schneide am Spalt eines Spectralapparates.

Der mittlere Theil der Schliesszellen verhält sich in der That während der Öffnungs- und Schliessbewegung vollständig passiv; man beobachtet hier weder Form- noch Dimensionsänderungen. Soviel leuchtet demnach ohne Weiteres ein, dass die Vorgänge, durch welche diese Mittelstücke genähert oder von einander entfernt werden, sich ausserhalb derselben abspielen müssen. Allein die Frage, wo die wirksamen Kräfte ihren Sitz haben, ob etwa in den Nebenzellen oder in den erweiterten Enden der Schliesszellen, bleibt eine offene.

Man kann sich mit Leitgeb[1] vorstellen, dass die Spaltöffnungen stets offen sein würden, wenn die Schliesszellen sich selbst überlassen blieben; diese letzteren würden sich alsdann wie zwei federnde Stahllamellen verhalten, welche durch eine äussere Kraft zusammengepresst werden, und als Kraftquelle wäre in unserem Falle der steigende Turgor der Nebenzellen, sowie der benachbarten Epidermiszellen zu betrachten. Es giebt auch in der That einige Gramineen, für welche diese Auffassung in der Hauptsache berechtigt ist, so z. B. bei *Cynosurus echinatus*, wo die Spaltöffnungen im plasmolysirten Zustande gewöhnlich offen sind und folglich nur durch den Druck der benachbarten Zellen geschlossen werden können. Von solchen Ausnahmen wird weiter unten noch ausführlicher die Rede sein.

In der Mehrzahl der Fälle jedoch besitzen die Schliesszellen der Gramineen das Vermögen, die Centralspalte bei sinkendem Turgor bis zum vollständigen Verschluss zu verengern und bei steigendem Turgor wieder zu öffnen, ohne dass eine Mitwirkung der Nebenzellen hierbei erforderlich wäre. Solche Spaltöffnungen sind im plasmolysirten oder angeschnittenen Zustande vollständig geschlossen, erscheinen jedoch unter den bekannten günstigen Bedingungen auch dann noch geöffnet, wenn die benachbarten Epidermiszellen an einem Ende und

[1] Leitgeb, Mittheilungen des botanischen Instituts zu Graz, I, S. 125 ff.

ebenso die beiden Nebenzellen durchschnitten sind. Es ist in solchen Fällen klar, dass die Kräfte, welche das Spiel des Spaltöffnungs-Apparates beherrschen, in den Schliesszellen selbst und zwar in den erweiterten Enden derselben ihren Sitz haben müssen. Richten wir also unser Augenmerk auf die Veränderungen, welche in diesem Theile des Apparates stattfinden.

Einige Messungen genügen um festzustellen, dass diese zartwandigen Erweiterungen der Schliesszellen, welche sich überdies durch ihren grünen Inhalt auszeichnen, in Folge von Wasseraufnahme ihr Volumen merklich vergrössern, was sich namentlich durch eine deutliche Verbreiterung der Flächenansicht und eine stärkere Wölbung der Aussenwände kundgiebt. Die Breite betrug z. B. bei *Secale cereale*, *Cynosurus echinatus* u. a. im geschlossenen Zustande stets 3 bis 5 Mik. weniger als im normal geöffneten. Überdies ergaben die ausgeführten Messungen, dass die Verschmälerung der Enden in jedem einzelnen Falle (von extremen Öffnungsweiten abgesehen) mit der Verengerung der Centralspalte übereinstimmt oder doch nur um eine kleine Grösse davon abweicht.

Mit Hülfe der vorstehenden Daten ist es nun bereits möglich, den Öffnungsmechanismus zu veranschaulichen. Es seien *A* und *B* (Fig. 1) die beiden Schliesszellen des Spaltöffnungs-Apparates in der Flächenansicht, *ab* die Gesammtbreite der erweiterten Enden, *po* die Scheidewand zwischen denselben und *s* die nur wenig geöffnete Centralspalte. Die Verdickungsleisten, welche im mittleren Theil des Apparates genau zu- und abgekehrt liegen und je die ganze Breite einer Schliesszelle einnehmen, verjüngen sich nach den beiden Enden zu und laufen ungefähr bei *a* und *b* aus. Die Bogenstücke *ap* und *pb* sind also dünnwandig, ebenso die Wandpartieen *mo* und *no*, welche den Abschluss gegen die Centralspalte bilden. Lassen wir jetzt in Gedanken eine Erhöhung des Turgors eintreten, so nimmt das Volumen der Enden und damit die Gesammtbreite *ab* etwas zu und mit den Punkten *a* und *b* rücken auch *m* und *n*, weil sie mit jenen durch starke Leisten verbunden sind, weiter auseinander, wobei selbstverständlich der Winkel *mon* vergrössert und die Centralspalte weiter geöffnet wird (vergl. Fig. 2).

Einen ähnlichen, wenn auch quantitativ geringeren Effect muss übrigens der steigende Turgor auch dann hervorbringen, wenn die Punkte *a* und *b* unbeweglich gedacht werden. Die in der Richtung der Pfeile wirkenden Kräfte suchen nämlich die Rückenwände unter allen Umständen nach aussen zu schieben und folglich den Winkel *mon* zu öffnen; weil dies aber ohne Biegung der Verdickungsleisten zwischen *ab* und *mn* nicht möglich ist, so könnte in diesem Falle der Aus-

schlag allerdings nur ein geringfügiger sein. Immerhin ist die Möglichkeit solcher Biegungen zuzugeben; es giebt sogar hin und wieder Fälle, wo ihr Vorhandensein mit aller Sicherheit constatirt werden kann. Selbst die Mittelstücke der Verdickungsleisten, die doch erheblich stärker sind als die spitz auslaufenden Enden, krümmen sich zuweilen bei offener Centralspalte unter dem Druck der Nebenzellen convex nach innen (Fig. 12).

So weit meine Beobachtungen reichen, sind indess die Punkte *a* und *b* in Fig. 1 und 2 immer verschiebbar; sie bewegen sich bei steigendem Turgor nach aussen, bei abnehmendem nach innen, und die etwa vorkommende Biegung der Verdickungsleisten ändert jedenfalls nur wenig an dem Effect, der bei vollständiger Starrheit derselben eintreten würde. Denn wie bereits bemerkt, stimmt die Erweiterung der Centralspalte im Allgemeinen mit der Längenzunahme der Linie *ab* überein oder weicht doch nur um eine sehr kleine Grösse davon ab.

Die vorzugsweise oder ausschliesslich maassbestimmenden Veränderungen, auf denen das Öffnen und Schliessen des Apparates beruht, beschränken sich hiernach auf die Wandstücke *ap* und *pb* und auf die gegenüber liegenden, noch zarteren Wände *mo* und *no*. Diese letzteren nähern sich bei abnehmendem Turgor wie die Schenkel eines Zirkels und legen sich endlich dicht an einander an, rücken dagegen, sobald der Turgor zunimmt, mehr und mehr auseinander, wobei der Öffnungswinkel *mon* sich zuweilen bis auf 90° und darüber erweitert. Auch beobachtet man in solchen extremen Fällen meist eine deutliche Ausbauchung dieser Wände nach der Centralspalte hin, offenbar in Folge des starken Überdruckes von innen, und ausserdem eine beträchtliche Dehnung durch den in tangentialer Richtung wirksamen Zug (vergl. Fig. 1 u. 2).

Mit dem oben geschilderten Verhalten der Flächenansicht stimmt auch dasjenige des optischen Querschnittsbildes, wie sich allerdings von vorne herein erwarten lässt, überein. Man sieht, dass die Aussenwände der Enderweiterungen bei offener Spalte stärker gewölbt sind und dass die in diesem Zustande gemessene Breitendimension auf Zusatz von wasserentziehenden Mitteln sich verkleinert. Auf wirklichen Querschnitten durch diesen Theil der Spaltöffnungen beobachtet man ferner, dass die Verdickungsleisten, welche im mittleren Theil die ganze Breitseite des spaltenförmigen Lumens einnehmen, sich mit ihren verjüngt auslaufenden Enden an die Rückenwand der Polerweiterung anlegen, so zwar, dass die beiden Leisten einer Schliesszelle stets getrennt bleiben (Fig. 7). Diese Enden bilden also gleichsam die Handhaben, an denen die Mittelstücke der Schliesszellen vom Turgor ergriffen und seitlich verschoben werden.

Aus dieser Darstellung ergiebt sich zugleich, dass das spaltenförmige Lumen der Mittelstücke für den Bewegungsmechanismus ohne Bedeutung ist; es kann höchstens den Zweck haben, Ungleichheiten der Turgescenz zwischen den Enderweiterungen der nämlichen Schliesszelle zu verhüten, wobei es immer noch fraglich bleibt, ob solche Ungleichheiten überhaupt zu befürchten wären.

Dass die Nebenzellen in manchen Fällen zur Herstellung des Verschlusses mitwirken müssen, erscheint mir, wie ich bereits oben andeutete, zweifellos. Wenigstens wüsste ich nicht, wie das Offenbleiben der Centralspalte nach Kochen des Praeparates in Wasser oder nach Zusatz von Säuren, Jodlösung u. s. w. und selbst nach Verletzung der Schliesszellen durch den Schnitt (Fig. 13) anders gedeutet werden könnte. Ein solches Verhalten wurde aber wiederholt und zwar nicht bloss bei dem oben erwähnten *Cynosurus echinatus*, sondern auch bei *Aira capillata* und *Briza maxima* constatirt. Aber allerdings fanden sich neben zahlreichen offenen Spalten stets auch einzelne geschlossene, oft sogar in erheblicher Anzahl, und ich gestehe, dass es mir nicht völlig genügen will, für diese letzteren einfach eine abweichende Construction anzunehmen; doch weiss ich zur Zeit nichts Besseres.

Aber wie auch dieser Gegensatz zu Stande kommen mag, jedenfalls lehrt die Beobachtung, dass der von den Nebenzellen ausgehende Druck die Centralspalte erheblich zu verengern im Stande ist und dass er eventuell vollkommen ausreicht, um eine mässig geöffnete Spalte ohne Mitwirkung anderer Kräfte zu schliessen. Ich habe wiederholt gesehen, wie die nach innen gebogenen Mittelstücke der Schliesszellen auf Zusatz von wasserentziehenden Reagentien sich plötzlich gerade streckten, während die Centralspalte sich gleichzeitig erweiterte. Einige Sekunden später, nachdem das Reagens auch die Schliesszellen erreicht hatte, wurde diese Erweiterung wieder aufgehoben, aber die Mittelstücke blieben gerade. Es ist in solchen Fällen klar, dass nur die Verminderung des hydrostatischen Druckes in den Nebenzellen die zuerst beobachteten Veränderungen herbeiführen konnte.

Für die theoretische Betrachtung bietet übrigens das Offensein der Spaltöffnungen im spannungslosen Zustande keinerlei Schwierigkeiten. Es ist damit nur eine bemerkenswerthe, früher nicht erwiesene Thatsache gegeben, eine kleine Abweichung vom gewöhnlichen Verhalten, welche in jedem einschlägigen Falle constatirt zu werden verdient, aber kein neues Problem, das einer besonderen Lösung bedürfte. Man kann ein Kautschukmodell des Spaltöffnungsapparates ebenso gut offen wie geschlossen herstellen; es gehört dazu bloss eine kleine Änderung im Zuschnitt. Warum sollten ähnliche Ver-

schiedenheiten nicht auch bei Cellulose-Membranen vorkommen können? So lange hierbei die Grundzüge der Construction dieselben bleiben, kann die Erhöhung des Druckes in den künstlichen oder natürlichen Schliesszellen doch stets nur eine Erweiterung, niemals eine Verengerung der Centralspalte bewirken. Die Bewegungsmechanik bleibt also im Wesentlichen unverändert, nur dass im gewöhnlichen Falle die Mitwirkung der Nebenzellen bei Herstellung des Verschlusses entbehrlich, im Ausnahmefalle dagegen nothwendig ist.

Anderweitige Abweichungen in der Mechanik habe ich bis jetzt weder bei den Gramineen und Cyperaceen, noch überhaupt bei den Angiospermen beobachtet. Es bleibt zwar immer eine theoretische Möglichkeit, dass die Schliesszellen bei steigendem Turgor sich etwas verlängern und in Folge des Gegendruckes der unter- und oberseits anstossenden Epidermiszellen seitwärts ausbiegen; allein soviel mir bekannt, ist ein solcher Öffnungsmechanismus bis dahin bei keiner einzigen Pflanze nachgewiesen. Die entgegengesetzte Angabe Kohl's[1] beruht, wie es scheint, nur auf einer ungenauen Wiedergabe der von mir und Haberlandt[2] gegebenen Darlegung. Ausserdem bemerke ich noch, dass die Kohl'schen Abbildungen Fig. 13 und 15 auf Taf. I, welche die Spaltöffnungen von *Zea Mays* im offenen Zustande veranschaulichen sollen, unmöglich richtig sein können. Fig. 13 zeigt uns nämlich offene Spalten an Stellen, wo die Schliesszellen mit einander verwachsen sind, Fig. 15 die schwach gebogenen Grenzlinien des Vorhofes bei geschlossener Centralspalte; diese letztere hat, auch wenn sie geöffnet ist, niemals solche Umrisse.

Bezüglich der Kräfte, welche in den Schliesszellen zur Wirkung kommen müssen, um eine Öffnungsbewegung herbeizuführen, ist erstlich zu berücksichtigen, dass dieselben nur in den Enderweiterungen geeignete Angriffspunkte finden, während der Gegendruck der Nebenzellen sich nahezu auf die ganze Länge erstreckt. Auf die Flächeneinheit berechnet, würde folglich dieser Gegendruck, so könnte man schliessen, für den Fall des Gleichgewichts erheblich geringer ausfallen, als der wirksame Druck in den Enderweiterungen, wo die Angriffsfläche eine viel kleinere ist. Andererseits darf aber nicht übersehen werden, dass die antagonistischen Kräfte in Zellen von ungleicher Form und Grösse ihren Sitz haben, wodurch die Frage des Gleichgewichts eine ziemlich verwickelte wird. Die Nebenzellen

---

[1] Kohl, die Transpiration der Pflanzen, 1886, S. 24.

[2] G. Haberlandt, Physiologische Pflanzenanatomie, S. 306. — In meiner Mittheilung (Monatsber. der K. preuss. Akad. d. Wiss. 1881, S. 838) ist nur von der theoretischen Möglichkeit des betreffenden Mechanismus die Rede, daneben noch von anatomischen Thatsachen, welche zu Gunsten derselben angeführt werden können.

sind namentlich im mittleren Theil des Spaltöffnungsapparates meist beträchtlich höher als die Schliesszellen und da sie überdies nur wenig verdickte, oft sogar sehr zarte Wände besitzen, so erfahren sie bei der Öffnungsbewegung ziemlich starke Formveränderungen, indem sie nach Art eines Kautschukkissens sich abplatten und dafür immer weiter nach der Athemhöhle zu sich vorwölben. Es ist also nicht der hydrostatische Druck, welcher bei dieser Bewegung überwunden wird, sondern nur der Widerstand, welchen die Nebenzellen der angedeuteten Formveränderung entgegen setzen, und dies ist eine variable, von der Biegsamkeit und Dehnbarkeit der Membran, sowie von den Dimensionsverhältnissen und dem Turgor abhängige Grösse, die sich experimentell nicht mit der nöthigen Sicherheit bestimmen lässt.

Nur soviel ist allerdings klar, dass der hydrostatische Druck der Schliesszellen in dem Zustande, in welchem sie eine Öffnungsbewegung zu bewirken vermögen, erheblich grösser ist, als derjenige der Nebenzellen. Es geht dies schon aus dem Verhalten der Praeparate gegen wasserentziehende Reagentien unzweifelhaft hervor. Legt man z. B. Flächenschnitte mit offenen Spaltöffnungen in eine zehnprocentige Lösung von Kalisalpeter, so tritt in den Nebenzellen, wie in den Epidermiszellen, sofort Plasmolyse ein, in den Schliesszellen dagegen nicht. Selbst an Schnitten, welche ungefähr eine Stunde in Salpeterlösung gelegen haben, beobachtet man noch zahlreiche offene Stomata. Fügt man dagegen etwas krystallinischen Salpeter zum Praeparat hinzu, wodurch natürlich die Lösung concentrirter wird, so verengert sich die Centralspalte allmählich, bis sie dem spannungslosen Zustande entspricht, in den meisten Fällen also bis zum vollständigen Verschluss.

Cyperaceen. Die Stomata der Cyperaceen unterscheiden sich zum Theil durch die weniger spaltenförmige Gestalt des Lumens im mittleren Theil der Schliesszellen. Bei den Scirpeen scheint sogar die Querschnittsansicht meist geradezu dem gewöhnlichen Lilientypus zu entsprechen, d. h. das Lumen ist nach der Rückenwand hin stark verbreitert und die Lage der Verdickungsleisten eine mehr oder weniger bauchseitige (Fig. 9 und 15).

Aber ungeachtet dieser Formverschiedenheit, welche auf den gewöhnlichen Öffnungsmechanismus hinzudeuten scheint, habe ich eine nennenswerthe Krümmung der Schliesszellen bei steigendem Turgor niemals beobachtet. Die Centralspalte ist vielmehr auch hier, wie bei den Gramineen, von geraden und unter sich parallelen Linien begrenzt, welche beim Schliessen sich bis zur Berührung nähern und beim Öffnen von einander entfernen. In diesem Punkte, der für den

Bewegungsmechanismus wesentlich ist, besteht also vollkommene Übereinstimmung zwischen Gramineen und Cyperaceen.

Die unverdickten Enderweiterungen sind auch hier in der Richtung senkrecht zur Oberfläche beträchtlich höher als die Mittelstücke der Schliesszellen; sie bilden auf Querschnitten zwei schmale, etwas abgerundete Rechtecke, deren Langseiten das Zwei- bis Dreifache der Breite erreichen (ähnlich wie in Fig. 8). Man sieht ohne Weiteres ein, dass die Wölbung der Rückenwände bei steigendem Turgor in Folge dieser Formverhältnisse einen absolut stärkeren Ausschlag giebt, als dies sonst der Fall sein würde; denn je höher die Wand, desto beträchtlicher die seitliche Bewegung ihrer Mitte.

Man hat es übrigens auch bei lebenden Cyperaceen nicht immer in der Gewalt, offene Stomata für die Beobachtung zu erhalten. So blieb z. B. bei *Heleocharis palustris* selbst eine längere Einwirkung des directen Sonnenlichtes unter den scheinbar günstigsten Verhältnissen stets ohne Erfolg; die Centralspalten waren entweder vollständig geschlossen oder nur bis auf 1 oder 2 Mikromillimeter geöffnet. Ebenso verhielt sich eine *Isolepis*-Art aus dem Gewächshaus. Dagegen beobachtete ich ziemlich weit geöffnete Spalten bei *Rhynchospora alba, Eriophorum vaginatum* und *Scirpus sylvaticus*, desgleichen bei verschiedenen *Carex*-Arten (*arenaria, hirta* u. a.), welche letzteren sich allerdings auch in der Querschnittsansicht der Schliesszellen durchgehends den Gramineen anreihen und daher ein übereinstimmendes Verhalten von vorne herein erwarten lassen.

Die Nebenzellen sind, wie bei den Gramineen, im Allgemeinen dünnwandig und daher leicht zusammendrückbar; in ihrem mittleren Theil springen sie oft weit gegen die Athemhöhle vor (Fig. 6). Auf diesen Eigenschaften beruht für die Schliesszellen die Möglichkeit einer ausgiebigen Öffnungsbewegung.

2. Einige Verschiedenheiten im Bau der Spaltöffnungen.

Neben den im Vorhergehenden erwähnten allgemeinen Zügen des anatomischen Baues verdienen noch einige Besonderheiten, welche nur für gewisse Arten charakteristisch sind, eine kurze Besprechung. Zunächst sei an die Einsenkung der Schliesszellen unter das Niveau der Blattoberfläche, bez. an die Überwölbung derselben durch Ausstülpungen der Epidermis erinnert — eine Einrichtung, welche bekanntlich in dieser oder jener Form bei den verschiedensten Abtheilungen der Gefässpflanzen wiederkehrt und im Allgemeinen wohl unzweifelhaft eine Herabsetzung der Transpirationsgrösse bezweckt.

Dasselbe gilt von der Anordnung der Stomata in Rillen oder Furchen, welche sich bei spärlicher Wasserzufuhr verengern.

Diesen schützenden Vorrichtungen begegnen wir nun auch bei manchen Gramineen und Cyperaceen, und soweit dieses Vorkommen sich auf die Vertreter der Steppen- und Wüstenflora und auf andere Bewohner trockener Standorte (Kalkfelsen u. s. w.) beschränkt, entspricht dasselbe der angedeuteten Auffassung. Es liegt daher nichts Auffallendes darin, dass bei *Cynodon Dactylon*, *Panicum turgidum* u. a. die Spaltöffnungen von Papillen überwölbt oder eingesenkt und bei *Stipa capillata, Festuca ovina*, *Aristida ciliata, Macrochloa tenacissima, Corynephorus canescens* u. s. w. auf mehr oder weniger tief einspringende Furchen verwiesen sind.[1] In solchen Besonderheiten erblicken wir vielmehr bedeutsame Anpassungserscheinungen, deren Zweckmässigkeit uns einleuchtet.

Allein es giebt Fälle, wo die nämlichen Vorkommnisse sich einstellen, ohne dass die äusseren Lebensbedingungen sie zu rechtfertigen scheinen. Wir begegnen z. B. überwölbten oder deutlich eingesenkten Spaltöffnungen auch bei zahlreichen Carices (vergl. Fig. 3—5), so bei *Carex paniculata*, *teretiuscula*, *vesicaria, ampullacea, panicea*, *limosa, glauca, maxima, riparia* u. s. w., obschon die meisten dieser Arten an Standorten vorkommen, die mit Steppen oder Wüsten möglichst wenig gemein haben. Manche derselben treten überdies häufig in Gesellschaft anderer auf, denen diese Schutzeinrichtungen fehlen. Es kann also wohl keinem Zweifel unterliegen, dass die heutigen Standortsverhältnisse der Carices unserer Flora die in Rede stehenden Verschiedenheiten des Baues nicht erklären. Ist auch die Annahme gestattet, dass manche »sumpfige« Stelle Jahr für Jahr austrockne, bevor die Vegetationszeit der hier vorkommenden Arten abgeschlossen ist,[2] so bleibt doch die Frage ungelöst, warum an dem nämlichen Ufer, in demselben Moor u. s. w. die eine Art geschützte, die andere ungeschützte Spaltöffnungen besitzt. Hier müssen nothwendig noch ganz andere Momente mit im Spiele sein.

Da nun die einheimischen Carexarten, zumal die zahlreichen Formen des Alpengebietes, grossentheils nordischen Ursprungs sind, so schien es mir nothwendig, zunächst darüber Gewissheit zu erlangen, ob vielleicht bezüglich der Spaltöffnungen irgend ein Unter-

---

[1] Vergl. VOLKENS, die Flora der aegyptisch-arabischen Wüste, Berlin 1887; ferner PFITZER, Beiträge zur Kenntniss der Hautgewebe (in PRINGSHEIM's Jahrb. f. wiss. Bot. VII), und TSCHIRCH, Beiträge zu der Anatomie und dem Einrollungsmechanismus einiger Grasblätter (ebenda XIII).

[2] Vergl VOLKENS, Beziehungen zwischen Standort und anatomischem Bau der Vegetationsorgane (Jahrb. d. Königl. Bot. Gartens zu Berlin, Bd. III, 1884, S. 46).

schied zwischen den nordischen und den alpinen Species bestehe, oder genauer: ob die fraglichen Schutzeinrichtungen an den heutigen Standorten im Gebiet der Alpen oder aber — wenn sie etwa nur den eingewanderten Arten zukommen — in der Urheimath der letzteren entstanden sein müssen.

Nun sind nach H. Christ[1] von den 29 Species, welche der Alpenflora angehören, nur 7 rein alpin, nämlich *Carex baldensis*, eine insubrische Hügelpflanze, *C. curvula*, *C. foetida* »und die Gruppe der *sempervirens*, von deren 5 Gliedern nur *ferruginea* nordisch ist.« Unter diesen endemischen Arten habe ich nun keine einzige gefunden, welche eingesenkte oder mit irgend welchen Schutzeinrichtungen versehene Spaltöffnungen besässe. Dasselbe gilt von den Formen, welche von Süden her eingewandert sind, wie z. B. *C. gynobasis* und *nitida*, oder wenigstens zu den Vertretern eines wärmeren Typus gehören, wie *C. humilis*, *alba* und *pilosa*. Auch *C. macrolepis*, eine Alpenpflanze Illyriens und der Apenninen, reiht sich hier an. Und doch sind es gerade diese südlichen und die rein alpinen Carices, welche vorherrschend trockene, zum Theil felsige Standorte lieben und daher den Steppengräsern noch am ehesten klimatisch nahe zu stehen scheinen.

Von den nordischen Einwanderern, die sich fast ausnahmslos an sumpfigen und moorigen Orten angesiedelt haben, ist übrigens nur ein Bruchtheil mit eingesenkten oder von Papillen überwölbten Stomata ausgestattet; der überwiegenden Mehrzahl der Ansiedler fehlt dieses Steppenzeichen. Zu den letzteren gehören z. B. nach den mir vorliegenden Notizen:

Carex acuta, *arenaria*, *caespitosa*, *chordorhiza*, *dioica*, *flava*, *filiformis*, *leporina*, *ligerica*, *muricata*, *Oederi*, *paludosa*, *pilulifera*, *Pseudocyperus*, *supina*, *vulpina*.

Ich muss nun freilich darauf verzichten, die nordische Heimath der eingewanderten *Carex*-Arten näher zu bezeichnen und in Bezug auf die klimatischen Factoren, denen die Spaltöffnungen sich ange-

[1] H. Christ, Über die Verbreitung der Pflanzen der alpinen Region der europäischen Alpenkette (Neue Denkschr. d. schweiz. naturf. Ges. 1866). Derselbe: Das Pflanzenleben der Schweiz, 1879. — Nach einer brieflichen Mittheilung vom December 1888 zählt der Autor gegenwärtig folgende Species zur *Sempervirens*-Gruppe: 1. *sempervirens* Vill. mit der nahestehenden *laevis* Kit., 2. *hispidula* Gaud., 3. *firma* Host, 4. *tenax* Reuter, 5. *tenuis* Host, 6. *ferruginea* Scop. — Zu *C. ferruginea* bemerkt derselbe, dass er seither in all' den vielen nordasiatischen Sammlungen keine einzige echte *ferruginea* gesehen habe und deshalb auch diese Species eher für rein alpin halten möchte. Dagegen sei *C. foetida* nicht rein alpin, da sie seitdem in den hohen Rocky Mountains gefunden wurde. — Schutzeinrichtungen zu Gunsten der Spaltöffnungen kommen übrigens bei keiner der hier genannten Arten vor. Auch bei *C. hispidula*, wo die Epidermis der Blattunterseite schwach papillös ist, neigen sich die Papillen der benachbarten Zellen nicht über die Spaltöffnungen herüber.

passt haben, specielle Belege zu liefern; denn soweit reichen unsere Kenntnisse nicht. Es mag aber doch gestattet sein, auf den stellenweise geradezu steppenartigen Charakter der nordischen Tundren und Fjelde hinzuweisen. So sagt WARMING[1] auf Grund eigener Anschauung über die Vegetation Grönlands: »Die Pflanzen der Haide und wohl auch die der Fjeldformation leben unter extremen klimatischen Verhältnissen. Zu gewissen Zeiten, nämlich in der Schneeschmelzperiode, grosse Nässe, Überfluss an Feuchtigkeit in der Erde und wohl auch in der Luft; später dagegen, im Sommer, wenn das Schneewasser verschwunden ist und nur begrenzte und bestimmte Stellen noch von den grossen, langsam schmelzenden Schneefeldern bewässert werden, können Zeiten eintreten, wo der flachgründige Boden durch und durch erhitzt wird und eine sengende Dürre im Boden und in der Luft herrscht; die Flechten stehen trocken und spröde und die Moose zusammengeschrumpft; dass die Gefässpflanzen eigens eingerichtet sein müssen, um solche Verhältnisse ertragen zu können, ist einleuchtend. So merkwürdig es auch lautet, ist es doch wahr, dass wir in einem arctischen, ein ungeheures Eisfeld umschliessenden und von Eis umschlossenen Lande wie Grönland Vegetationsformen finden, nämlich die der Haide und minder deutlich die Fjeldformation, welche anatomische Verhältnisse im Blattbau darbieten, wie sie auch in südlichen Steppen und Wüsten, ja selbst in der aegyptisch-arabischen Wüste zu finden sind.«

Hiernach erscheint also wohl die Annahme, dass die nordischen Seggen vor ihrer Wanderung nach dem Süden zum Theil in einem extremeren Klima vegetirt haben, als gegenwärtig im Gebiet der Alpen, keinenfalls ungereimt. Wenn in Grönland unter den gegenwärtigen Verhältnissen bei etwa 68° n. B. das Thermometer Ende Juli, in der Sonne beobachtet, bis auf $36\frac{1}{2}$° C. und bei geschwärzter Kugel bis auf 40° C. steigt, und wenn alsdann sengende Trockenheit in Luft und Boden herrscht, warum sollten ähnliche Extreme nicht auch in praeglacialer Zeit da und dort, sowohl im asiatisch-europäischen als im americanischen Norden, vorgekommen sein? Und da bei den Gramineen gerade die Schutzeinrichtungen, von denen hier die Rede ist, nur unter dem Einfluss anhaltender, periodisch wiederkehrender Hitze und Trockenheit zur Ausbildung kommen, so liegt es nahe, für die Cyperaceen dasselbe Verhalten vorauszusetzen.

Es sei an dieser Stelle, um Missverständnissen vorzubeugen, noch ausdrücklich bemerkt, dass die Gramineen mit einer grösseren Mannigfaltigkeit schützender Einrichtungen, die demselben Zwecke

---

[1] E. WARMING, Über Grönlands Vegetation, in ENGLER's Bot. Jahrb. X, S. 383.

dienen, ausgerüstet sind als die Cyperaceen und speciell die Carices. Den letzteren fehlt, soweit meine Beobachtungen reichen, die Rillenbildung und die Fähigkeit ihre Blätter zusammenzufalten oder einzurollen. Dafür ist die Art und Weise, wie die Einsenkung der Stomata oder die Überwallung durch Papillen zu Stande kommt, durch mancherlei kleinere und grössere Verschiedenheiten ausgezeichnet, die sich etwa in folgender Weise gruppiren lassen.

a) Schliess- und Nebenzellen unter das Niveau der Epidermisaussenwand eingesenkt. Äussere Athemhöhle zuweilen überdies durch kleine Ausbuchtungen der Epidermiszellen, welche dem vorstehenden Ringwall ein gekerbtes Aussehen geben, mehr oder weniger verengt. Hierher: *Carex paniculata*, *teretiuscula*, *vesicaria*, *ampullacea*, *riparia*.

b) Schliess- und Nebenzellen von 4 oder mehr Papillen überdeckt, welche von den angrenzenden Epidermiszellen ausgehen, wobei jede dieser Zellen 1 bis 2 oder noch mehr Papillen entwickelt. Hierher: *Carex panicea*, *limosa*, *glauca*, *clavaeformis*. Von der vorhergehenden Gruppe nicht scharf geschieden.

c) Nebenzellen in ihrer ganzen Länge über das Niveau der Schliesszellen erhöht. Hierher: *Carex irrigua*, *rigida* (Fig. 14).

Der im Vorstehenden betonte Unterschied zwischen einem Theil der nordischen und den rein alpinen *Carex*-Arten ist insofern von besonderer Bedeutung, als derselbe zu der unabweislichen Schlussfolgerung führt, dass die anatomischen Merkmale, welche als Anpassungen an die äusseren Lebensbedingungen zu betrachten sind, ausnahmslos nur bei endemischen, bei eingewanderten dagegen nicht immer den heutigen Standortsverhältnissen entsprechen. Sowohl die erwähnten Steppenzeichen, welche einzelne Gräser und Scheingräser unserer Flora aufweisen, als auch die aussergewöhnlichen Verstärkungen der Schutzscheide bei *Tofieldia calyculata*, *Iris sibirica*, *Narthecium ossifragum* u. a. sind offenbar nicht an den heutigen Standorten in Deutschland, sondern in der durch grössere klimatische Extreme ausgezeichneten Urheimath entstanden. Und vielleicht gilt dasselbe auch von den ericoiden Blattformen, den Wachsüberzügen, Schuppenhaaren und ähnlichen Einrichtungen, welche die Verdunstungsgrösse herabsetzen und insbesondere den Spaltöffnungen Schutz gewähren, bei endemischen Pflanzen aber, wie es scheint, nicht vorkommen.

3. Systematische Umgrenzung der beschriebenen Spaltöffnungsform.

Von den einheimischen Monocotylen heben sich die Gramineen und Cyperaceen in Bezug auf Bau und Mechanik der Spaltöffnungen deutlich ab; schon die Juncaceen zeigen ausgesprochenen Lilientypus. Über die exotischen Gattungen, welche im System in der Nähe der Juncaceen untergebracht sind, kann ich zwar nicht mit gleicher Sicherheit urtheilen, da mir bloss Herbarmaterial zur Verfügung stand; ich glaube indessen doch die erforderlichen Anhaltspunkte gewonnen zu haben, um wenigstens die hydrophilen Vertreter der fraglichen Gruppen ausnahmslos den Liliifloren an die Seite stellen zu können. Es gehören hierher: *Xyris nubigena* und *strobifera*, *Philydrum lanuginosum*, *Rapatea Martiana*, *Cephalostemon Bidelianus*, *Eriocaulon decangulare*. Grössere Schwierigkeiten bieten die xerophilen Formen der Astelieen, Restiaceen, Xerotideen und Flagellariaceen, weil sich an trockenem Material nicht entscheiden lässt, ob die hier öfter vorkommenden Schliesszellen mit spaltenförmigem Lumen an der lebenden Pflanze noch functionstüchtig waren oder aber die Fähigkeit, sich zu öffnen, verloren hatten. Soweit indess der anatomische Bau für sich allein zu Schlussfolgerungen berechtigt, halte ich es für wahrscheinlich, dass keine einzige der hierher gehörigen Pflanzen zum Gramineentypus gehört; manche derselben erinnern namentlich auf Flächenansichten durchaus an lilienartige Gewächse, so z. B. *Astelia pumila* und *Xerotes glauca*.

Es kann hiernach fast als sicher bezeichnet werden, dass die Gramineen und Cyperaceen durch die Besonderheiten ihrer Spaltöffnungen unter den Monocotylen isolirt dastehen, und da es sich hier um Merkmale handelt, welche als morphologische Grundzüge des Baues, nicht etwa nur als klimatische Anpassungen, zu betrachten sind, so deuten dieselben, wie mir scheint, unverkennbar auf eine wirkliche Stammesverwandtschaft.

Andererseits ist bekannt, dass die Mestombündel der Juncaceen und Cyperaceen von Schutzscheiden umschlossen sind, welche den Gramineen fehlen, was auf eine engere Zusammengehörigkeit jener hinzudeuten scheint, und richten wir unser Augenmerk auf das mechanische Gewebesystem, so sehen wir Gramineen und Cyperaceen mit einem Theil der Juncaceen durch die subepidermalen Rippen verbunden, während ein anderer Theil dieser letzteren sich mehr den Lilien nähert.

So fördert die vergleichende Betrachtung der Gewebe und localen Apparate mannigfache und wirkliche Verwandtschaftsbeziehungen zu

Tage, welche bald nur kleine, bald grössere Formenkreise umfassen; sie lehrt uns aber auch, dass jedes Gewebesystem und jeder Apparat seine eigene Geschichte hat, deren Wendepunkte in der Reihe der Generationen mit denjenigen anderer Entwickelungsvorgänge meist nicht zusammenfallen.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1 und 2. Schematische Darstellung eines Spaltöffnungsapparates im halb offenen und im weit geöffneten Zustand, beide in der Flächenansicht, aber nur etwa bis zur Mitte aufgenommen. *s* die Centralspalte, *mo* und *on* die zarten Membranstücke der Schliesszellen, welche bei der Öffnungsbewegung einen immer grösser werdenden Winkel bilden, *op* die Mittelwand zwischen den Enderweiterungen der Schliesszellen. Die punktirten Linien geben die Membrandicke zwischen den Verdickungsleisten an.

Fig. 3. Querschnitt durch eine eingesenkte Spaltöffnung von *Carex vesicaria*. Vergr. 730.

Fig. 4. Querschnitt durch eine Spaltöffnung von *Carex panicea*. Die an die Nebenzellen angrenzenden Epidermiszellen wölben sich papillenartig vor. Vergr. 730.

Fig. 5. Querschnitt durch eine Spaltöffnung von *Carex ampullacea*. Ebenfalls mit vorgewölbten Epidermiszellen. Vergr. 730.

Fig. 6. Querschnitt durch eine Spaltöffnung von *Carex leporina*. Vergr. 730.

Fig. 7. Querschnitt durch die Enderweiterungen der Schliesszellen von *Zea Mays*. Die Verdickungsleisten liegen hier beiderseits an der Rückenwand. Vergr. 730.

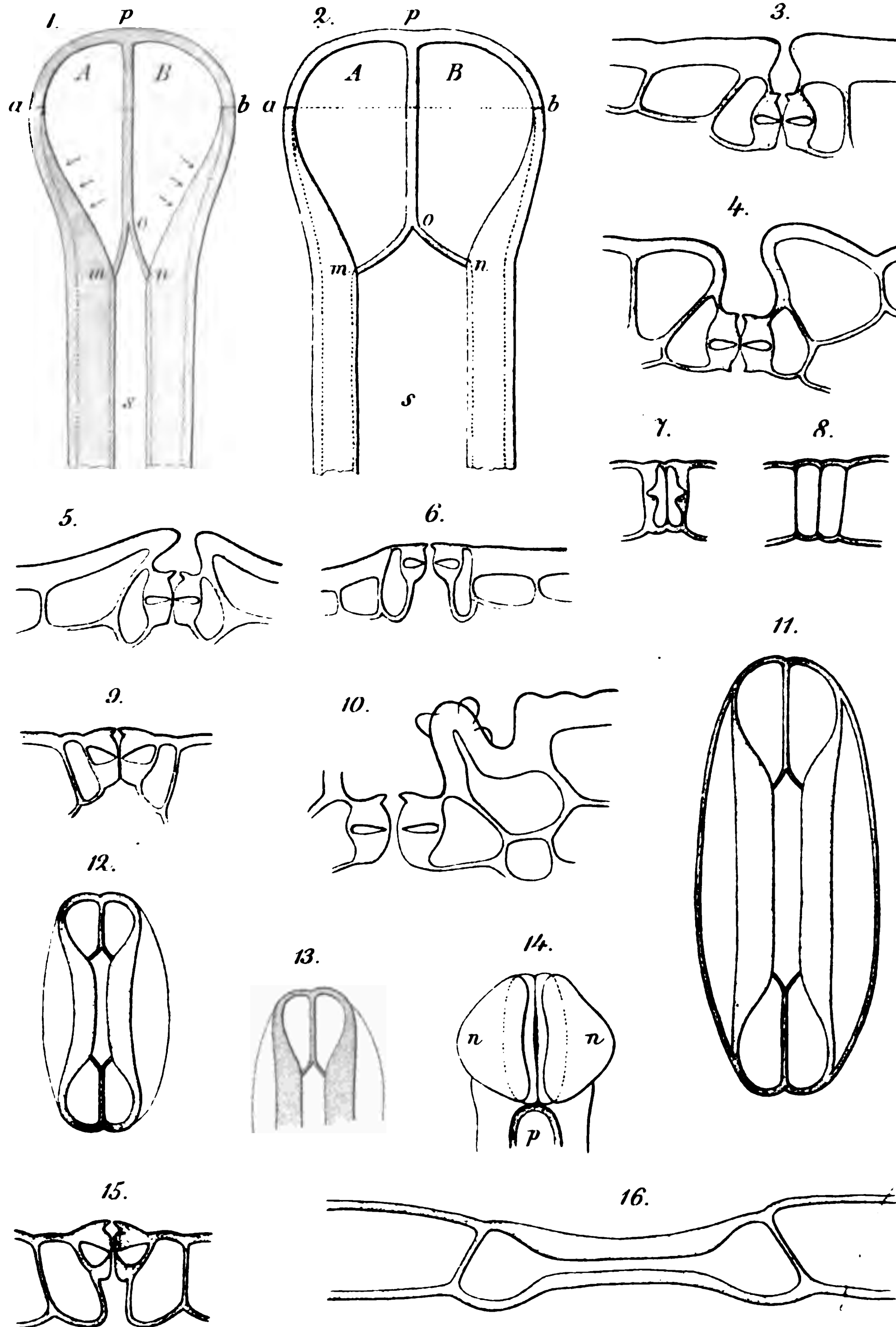
Fig. 8. Ein ähnlicher Querschnitt durch den dünnwandigen Theil der Enderweiterungen. Vergr. 730.

Fig. 9. Querschnitt durch eine Spaltöffnung von *Isolepis*. Vergr. 730.

Fig. 10. Querschnitt durch eine Spaltöffnung von *Carex teretiuscula*. Die an die Nebenzellen grenzenden Epidermiszellen bilden nicht bloss einfache Vorwölbungen, sondern unregelmässige Ausbuchtungen, welche dem über die Schliesszellen sich erhebenden Ringwall ein eigenthümlich warziges Aussehen verleihen. Vergr. 730.

Fig. 11. Flächenansicht einer Spaltöffnung von *Triticum vulgare*. Die Centralspalte ist geöffnet. Vergr. 730.

Fig. 12. Flächenansicht einer Spaltöffnung von *Cynosurus echinatus*. Die Mittelstücke der Schliesszellen sind durch den Überdruck der Nebenzellen nach innen gebogen. Vergr. 730.



C. Laue lith.

Schwendener: Spaltöffnungen der Gramineen und Cyperaceen.

Fig. 13. Eine quer durchschnittene Spaltöffnung von *Cynosurus echinatus*. Mit offener Centralspalte.

Fig. 14. Flächenansicht einer Spaltöffnung von *Carex rigida*. Die Nebenzellen *nn* sind über die Schliesszellen vorgewölbt; *p* eine Epidermispapille.

Fig. 15. Querschnitt durch eine Spaltöffnung von *Eriophorum Scheuchzeri*. Vergr. 730.

Fig. 16. Radialer Längsschnitt durch eine Schliesszelle von *Triticum* und die angrenzenden Epidermiszellen. Vergr. 730.

Ausgegeben am 7. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.
VII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

7. Februar. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

Hr. Dillmann las über die Tyrus-Weissagung im Buch Jesaia c. 23.

Zur Theorie umkehrbarer galvanischer Elemente.

Von Dr. W. NERNST
in Leipzig.

(Vorgelegt von Hrn. VON HELMHOLTZ am 17. Januar [s. oben S. 13].)

Richtung und Grösse elektromotorischer Kräfte aus anderweitigen der Messung zugänglichen Erscheinungen zu berechnen ist bisher nur in wenigen Fällen gelungen; soweit mir bekannt ist, sind es nur die durch Induction und die durch Concentrationsunterschiede (bei Anwendung unpolarisirbarer Elektroden) hervorgerufenen Ströme, deren elektromotorische Kraft, beide Mal durch Hrn. H. VON HELMHOLTZ, mittels thermodynamischer Betrachtungen ermittelt worden ist. Wie es in dem Wesen dieser so ungemein erfolgreichen Behandlungsweise physikalischer Probleme liegt, ist dabei die Mechanik des untersuchten Vorganges beinahe gar nicht in Betracht gekommen, und so sicher z. B. durch die Untersuchungen von Hrn. VON HELMHOLTZ der innige Zusammenhang zwischen der elektromotorischen Kraft einer Concentrationskette und den Dampfspannungen der Lösungen um Anode und Kathode sowie der Überführungszahl der betreffenden Lösung erwiesen worden ist, so sind wir doch weit davon entfernt, über die Art und Weise, wie der galvanische Strom in einer solchen Kette zu Stande kommt, eingehende Vorstellungen zu besitzen.

Gelegentlich von Betrachtungen, welche ich kürzlich,[1] anknüpfend an die in neuester Zeit vornehmlich von Hrn. VAN 'T HOFF[2] und Hrn. ARRHENIUS[3] ausgearbeitete Theorie der Lösungen, angestellt habe, um einen Einblick in die Mechanik der Hydrodiffusion zu gewinnen, scheint sich in einfacher Weise eine Anschauung dafür ergeben zu haben, wie eine Gattung elektromotorischer Kräfte in Wirksamkeit tritt. In einer Lösung nämlich, in welcher wir nach der Hypothese von CLAUSIUS im freien Bewegungszustande befindliche Jonen annehmen müssen, wird stets eine elektrostatische Ladung und unter geeigneten

[1] Zeitschrift für physik. Chemie 2, 613 (1888).
[2] Ebendas. 1, 481 (1887).
[3] Ebendas. 1, 631 (1887).

Verhältnissen ein galvanischer Strom auftreten, wenn auf die Jonen irgend welche Kräfte einwirken, unter deren Einfluss allein dieselben verschiedene Geschwindigkeit erlangen würden. Die Anordnung der elektrostatischen Ladung muss so beschaffen sein, dass in Folge der durch sie bedingten Zusatzkräfte und jener obigen zusammen die Jonen sich den elektrostatischen Gesetzen entsprechend bewegen.

Hiernach ist es ein Leichtes, worauf ich bereits hingedeutet habe, z. B. die Grösse des Hall'schen Phänomens oder der in einem rotirenden Elektrolyten auftretenden elektrostatischen Ladungen zu berechnen. Da es mir bis zur Zeit aber nicht möglich war, diese Probleme, welche ausserordentliche Hülfsmittel erfordern würden, experimentell anzugreifen, so verzichte ich auf ein weiteres Eingehen und möchte hier die elektromotorischen Kräfte behandeln, welche zwischen Lösungen desselben Elektrolyten aber verschiedener Concentration auftreten, und deren Grösse ich a. a. O. berechnet habe. Zunächst sei eine neue, von meiner früheren verschiedene Ableitungsweise dieser Formel mitgetheilt.

Zwei verdünnte Lösungen des gleichen binären Elektrolyten, in welchen der osmotische Partialdruck der Jonen p_1 und p_2 beträgt, seien mit einander in Berührung. Wenn wir uns dann die Elektricitätsmenge $+1$ (cgs) in der Richtung von p_1 nach p_2 hindurchgeschickt denken, so finden wir die gesuchte Potentialdifferenz zwischen beiden Lösungen, indem wir die hierzu aufgewendete Arbeit berechnen. Bezeichnen u und v die von Hrn. Kohlrausch eingeführten Beweglichkeiten des Kations und Anions, so wird der Transport obiger Elektricitätsmenge in der Weise besorgt, dass davon $\frac{u}{u+v}$ mit dem Kation, $\frac{v}{u+v}$ mit dem Anion wandert; ersterer Antheil wandere als $+$Elektricität von der concentrirten zur verdünnten, letzterer als $-$Elektricität in der entgegengesetzten Richtung. Vom Kation wird dann die Arbeit $\frac{u}{u+v}\int_{p_1}^{p_2} Vdp$, vom Anion diejenige $\frac{v}{u+v}\int_{p_2}^{p_1} Vdp$ geleistet. Führen wir zur Ausführung der Integrationen das Boyle'sche Gesetz in der Form

$$pV = p_0$$

ein, wo p_0 somit den Druck des Kations (bez. Anions) in einer Lösung bezeichnet, welche im Cubikcentimeter die an das Kation (bez. Anion) gebundene Elektricitätsmenge $+1$ (bez. -1) enthält, so liefert die Summe beider Arbeiten

$$(1) \qquad E_1 - E_2 = \frac{u-v}{u+v} p_0 \, ln \frac{p_1}{p_2} \text{ (cgs)}$$

die zwischen den beiden Lösungen auftretende Potentialdifferenz; wenn $u > v$ und $p_1 > p_2$, wird der Ausdruck > 0; ein durch letztere getriebener galvanischer Strom fliesst dann von der concentrirten zur verdünnten Lösung. Indem wir p_0 aus den Angaben, dass mit der Elektricitätsmenge $+1$ $1.037 \times 10^{-4\,g}\,H_1$ wandern, und dass der Druck in einem Raume, welcher im Cubikcentimeter $2^{g}\,H_2$ enthält, bei 0° 23080×981000 absolute Einheiten betragen würde, berechnen und oben einführen, wird

$$(2) \qquad E_1 - E_2 = 0.02347 \frac{u - v}{u + v} \, ln \frac{p_1}{p_2} \text{ Volt}$$

und indem wir berücksichtigen, das p_0 der absoluten Temperatur proportional ist:

$$(3) \qquad E_1 - E_2 = 0.860 \; T \frac{u - v}{u + v} \, ln \frac{p_1}{p_2} \times 10^{-4} \text{ Volt.}$$

Das Ergebniss obiger Rechnung, welche zu der gleichen Formel führt, die ich bei der Betrachtung der Diffusionsvorgänge[1] erhalten habe, und welche daher an der guten Bestätigung der Diffusionstheorie durch die Erfahrung gleichfalls eine Stütze gewinnt, könnte vielleicht direct, etwa durch Messung der elektrostatischen Ladungen mittels einer Condensatormethode, geprüft werden; wahrscheinlich aber würden derartige, jedenfalls schwierig auszuführende Messungen nicht entscheidend sein, weil in Folge Mitwirkung der Luft oder in Folge der eigenthümlichen Beschaffenheit der Oberflächenschichten leicht die oben berechneten elektrostatischen Ladungen erheblich geändert werden könnten. Besser geeignet erschien mir daher zunächst eine experimentelle Untersuchung der thermoelektrischen Erscheinungen zwischen Lösungen des gleichen Elektrolyten aber verschiedener Concentration, wie sie von Hrn. WILD beobachtet worden sind. Ihre Theorie ergibt sich unmittelbar aus den obigen Entwickelungen.

Die Thermokette, welche nach dem Schema: Lösung vom Druck p_1, Lösung vom Druck p_2, Lösung vom Druck p_1 zusammengesetzt sei, besitze an den beiden Berührungsstellen der verschieden concentrirten Flüssigkeiten die Temperaturen T_1 und T_2; dann betragen die beiden einander entgegen wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche an den Berührungsstellen (»Löthstellen«) ihren Sitz haben, nach Gleichung (3)

$$(4) \qquad E' - E'' = 0.860 \left[T_1 \frac{u_1 - v_1}{u_1 + v_1} - T_2 \frac{u_2 - v_2}{u_2 + v_2} \right] ln \frac{p_1}{p_2} \times 10^{-4} \text{ Volt.}$$

[1] A. a. O. S. 635.

u_1, v_1, u_2, v_2 sind die Beweglichkeiten von Kation und Anion bei T_1 und T_2. Die beiden Kräfte, welche im Innern der beiden verschieden temperirten Flüssigkeiten wirken, und durch einen Ausdruck von der Form

$$F(T_1, u_1, v_1) - F(T_2, u_2, v_2)$$

darstellbar sein müssen, wirken einander entgegen und sind bei sehr verdünnten Lösungen von der Concentration unabhängig; weil sie sich aus diesem Grunde gegenseitig aufheben, liefern sie keinen Beitrag zur beobachteten Gesammtkraft, welch letztere daher durch Gleichung (4) gegeben ist. Bevor man an eine genauere Prüfung dieser Beziehung gehen kann, ist eine Untersuchung über den Einfluss der Temperatur auf die Überführungszahl nothwendig, worüber zu wenige Messungen vorliegen; doch sei erwähnt, dass einige von mir angestellte vorläufige Versuche über die thermoelektrischen Ströme von Säuren den obigen Entwickelungen nicht ungünstige Resultate lieferten.

Die durch Gleichung (3) gegebenen elektromotorischen Kräfte gelangen offenbar in den Concentrationsströmen zur Wirkung; dort treten zu diesen jedoch noch solche hinzu, welche ihren Sitz an den beiden Trennungsflächen zwischen Pol und Elektrolyt haben. Über die Wirkungsweise der letzteren scheinen folgende Betrachtungen sich darzubieten, welche gleichzeitig zu einer einfachen experimentellen Prüfung der Gleichung (3) führen.

In weiterer Consequenz der Theorie von Hrn. van't Hoff haben wir in der Lösung und der Verdampfung eines Körpers sehr ähnliche Vorgänge zu erblicken; ein Körper wird hiernach so weit in Lösung gehen, bis seine »Lösungstension« seinem osmotischen Partialdruck in der Flüssigkeit gleich geworden ist. Wenn wir somit die Lösung eines Körpers mit diesem Körper selber in Berührung bringen, so werden entweder weitere Antheile des letzteren sich verflüchtigen, bis die Lösung gesättigt ist, oder ausfallen, wenn dieselbe mit diesem Körper übersättigt war.

Wie wir nun offenbar für jedes Gas einen, sei es festen, sei es flüssigen Körper ausfindig machen können, dessen Dampfspannung mit dem Druck jenes Gases in Concurrenz tritt, welcher also, sei es durch einfache Verdampfung, sei es durch Zersetzung, letzteres entwickelt, so werden wir auch für jede in Lösung und zwar im freien Bewegungszustande befindliche Molekel, daher auch z. B. für jedes Jon, die Existenz von Substanzen annehmen müssen, bei deren Auflösung Molekeln dieser Gattung entstehen. Da liegt es nun sehr nahe und bietet sich vielleicht als einzige Möglichkeit dar, um den eben ausgesprochenen Satz aufrecht zu erhalten, nämlich den Metallen die Fähigkeit zuzuschreiben, als Jon in Lösung gehen zu können.

Hiernach besässe jedes Metall in Wasser eine ihm eigenthümliche »elektrolytische Lösungstension«.

Beachten wir nun, was für Vorgänge nach diesen Entwickelungen eintreten müssen, wenn wir ein Metall von der elektrolytischen Lösungstension P in eine Lösung eines aus diesem Metall gebildeten Salzes eintauchen, in welch letzterer die Jonen dieses Metalles unter dem osmotischen Druck p stehen. Es sei zunächst $P > p$, so werden im ersten Augenblick der Berührung, getrieben von diesem Überdruck, eine Anzahl Jonen in Lösung gehen. Indem durch letztere eine gewisse +Elektricitätsmenge von dem Metall in die Lösung transportirt wird, erhält die Flüssigkeit eine positive Ladung, welche sich in Gestalt der in derselben enthaltenen positiven Jonen an ihrer Oberfläche anordnet; gleichzeitig wird natürlich im Metall eine entsprechende Menge —Elektricität frei, welche gleichfalls an die Oberfläche geht. Man erkennt unmittelbar, dass an der Berührungsfläche von Metall und Elektrolyt sich die beiden Elektricitäten in Form einer Doppelschicht anhäufen müssen, deren Existenz bekanntlich von Hrn. von Helmholtz schon vor einiger Zeit auf ganz anderem Wege wahrscheinlich gemacht worden ist.

Diese Doppelschicht liefert nun eine Kraftcomponente, welche senkrecht zur Berührungsfläche von Metall und Lösung gerichtet ist und die metallischen Jonen aus dem Elektrolyten zum Metall hinzutreiben sucht, der elektrolytischen Lösungstension somit entgegenwirkt. Der Gleichgewichtszustand wird offenbar so beschaffen sein, dass diese beiden Kraftäusserungen sich aufheben; als schliessliches Resultat erhalten wir das Auftreten einer elektromotorischen Kraft zwischen Metall und Elektrolyt, welche einen galvanischen Strom in der Richtung von Metall zur Flüssigkeit veranlasst, wenn durch irgend welche Vorrichtungen das Zustandekommen desselben ermöglicht wird.

Wenn $P < p$, findet natürlich der umgekehrte Vorgang statt; es treten aus dem Elektrolyten so lange metallische Jonen heraus und schlagen sich auf dem Metalle nieder, bis die elektrostatische Kraftcomponente der hierdurch entstandenen +Ladung des Metalles und —Ladung der Flüssigkeit dem osmotischen Überdruck das Gleichgewicht hält. Es tritt somit wiederum eine elektromotorische Kraft zwischen Metall und Elektrolyt auf, welche unter geeigneten Bedingungen hier aber einen galvanischen Strom in der entgegengesetzten Richtung veranlassen würde. In beiden Fällen sind entsprechend der ausserordentlich grossen elektrostatischen Capacität der Jonen die Mengen Metall, welche in Lösung gehen bez. ausfallen, sehr klein.

Naturgemäss erhebt sich hier die Frage, warum die Metalle gerade als mit +Elektricität geladenen Jonen, d. h. in der Form, wie

sie den basischen Bestandtheil des gelösten Salzes bilden, in Lösung gehen, und welcher Art die Kräfte sind, durch welche jene aus dem Metall in die Flüssigkeit getrieben oder derselben entzogen und auf dem Metall niedergeschlagen werden. Als nahe liegende Erklärungsweise bietet sich zunächst dar, mit Hrn. von Helmholtz den Metallen eine specifische Anziehung der Elektricität zuzuschreiben. Damit dann zwischen Metall und Elektrolyt Gleichgewicht besteht, muss im Augenblick der Berührung ein Transport von Elektricität, der hier nothwendig mit einem Übertritt materieller Theilchen verbunden ist, zwischen Metall und Elektrolyt stattfinden; oder aber man sieht diesen Übertritt primär als durch dem Dampfdruck analoge Kräfte bewirkt an, worauf dann erst elektrische Kräfte ins Spiel treten. Doch meine ich, dass man mit dem gleichen Rechte, mit dem man den osmotischen Druck als eine durch vielfache Erscheinungen wahrscheinlich gemachte Thatsache in die Betrachtungen und Rechnungen einführt, ohne auf die Frage, ob er seinen Ursprung etwa in anziehenden Kräften zwischen Lösungsmittel und gelöstem Körper oder in den wechselseitigen Stössen zwischen den Molekülen des gelösten Körpers findet, näher einzugehen, so auch hier mit dem Begriff der »elektrolytischen Lösungstension«, welcher sich durch auffallende Analogien aufdrängt, operiren darf, wenn man über seine physikalische Deutung auch noch im Unklaren ist. So lange Fragen, wie nach dem Zustandekommen des osmotischen Drucks, nach der Form, in welcher das Jon die Elektricität gebunden hält, ihrer Lösung so fern stehen, scheint eine eingehende Discussion über obige Frage noch nicht geboten, und wir müssen uns mit der Prüfung begnügen, ob die bei Einführung der elektrolytischen Lösungstension sich ergebenden formalen Beziehungen mit den Thatsachen im Einklange sich befinden.

Die Grösse der Potentialdifferenz zwischen einem Metall mit der Tension P und einer Lösung eines aus ihm gebildeten Salzes vom osmotischen Partialdruck des Kations p ergibt sich auf dem gleichen Wege, wie wir zur Gleichung (3) gelangten, indem wir die Arbeit berechnen, welche zum Transport der hier ausschliesslich mit dem Kation wandernden Elektricitätsmenge 1 vom Metall zum Elektrolyten nothwendig ist, zu

$$E_m - E_e = p_0 \, ln \frac{P}{p}. \tag{5}$$

Da P der Natur der Sache nach immer positiv sein muss, so folgt, dass für $p = 0$, d. h. im reinen Wasser, sich sämmtliche Metalle unendlich stark negativ laden; dies Resultat steht in engster Beziehung mit dem kürzlich von Hrn. von Helmholtz[1] erhaltenen, wonach sich für

[1] Berl. Sitzungsber. 1882. S. 836.

eine Concentrationskette, deren einer Pol von reinem Wasser umspült ist, unendlich starke elektromotorische Kräfte ergeben, welche einen in der Kette vom verdünnteren zum concentrirteren Theile verlaufenden galvanischen Strom zu veranlassen suchen.

Bekanntlich verdankt man Hrn. OSTWALD die ersten, auf einigermaassen sicherer Grundlage fussenden Messungen der Potentialdifferenz zwischen Metallen und Elektrolyten. Wie ich mir von Hrn. OSTWALD gütigst mitgetheilten, noch nicht publicirten Beobachtungen entnehme, ladet sich Zink in seinen Salzen ($ZnSO_4$, $ZnCl_2$, $ZnBr_2$) bei den Concentrationen $^1/_2$, $^1/_{20}$ und $^1/_{200}$ normal negativ; daraus wäre zu schliessen, dass die elektrolytische Lösungstension des Zinks in Wasser noch erheblich grösser, als der osmotische Druck dieses Metalls in einer $^1/_2$ normalen Zinksalzlösung, etwa 2—3 Atmosphaeren anzunehmen ist. Übrigens findet Hr. OSTWALD in Übereinstimmung mit Gleichung (5) eine Zunahme der Potentialdifferenz zwischen Zink und seinen Salzen mit der Verdünnung.

Um gleichzeitig eine Anwendung obiger Betrachtungen auf chemische Gleichgewichtszustände zu geben, so erkennt man sofort, dass, wenn zwei Metalle mit einer Lösung zweier aus ihnen gebildeten Salze in Berührung sind, dasjenige mit kleinerer Tension von dem andern ausgefällt wird. In der That hat man Beziehungen zwischen der Fähigkeit der Metalle, sich in Berührung mit einem Elektrolyten zu laden, und derjenigen, ein anderes aus seiner Lösung zu verdrängen, schon seit langer Zeit gefunden. War es doch bereits eine der Hauptstützen der elektrochemischen Theorie von BERZELIUS, dass das elektronegative Metall das elektropositive aus seinen Verbindungen vertreibt. Ferner ist die GULDBERG-WAAGE'sche Regel, wonach die chemisch wirksame Masse eines festen Körpers in Berührung mit einer Lösung constant ist, und die längst bekannte Thatsache, dass die elektromotorische Kraft galvanischer Elemente von der Oberflächengrösse ihrer Elektroden unabhängig sich erweist, ein Ausdruck nahe verwandter Gesetzmässigkeiten.

Die elektromotorische Kraft einer Concentrationskette lässt sich nach obigen Entwickelungen unmittelbar als die Summe ihrer Componenten, nämlich der Kräfte, welche zwischen der verdünnten und concentrirten Lösung (3) und derer, welche an den Grenzflächen zwischen Metall und Elektrolyten (5) wirken, berechnen:

$$E'_m - E''_m = p_0\left(ln\frac{P}{p_1} + \frac{u-v}{u+v}ln\frac{p_1}{p_2} - ln\frac{P}{p_2}\right) = p_0\frac{2v}{u+v}ln\frac{p_2}{p_1};$$

$$(6) \qquad E'_m - E''_m = 0.860\, T\frac{2v}{u+v}ln\frac{p_2}{p_1} \times 10^{-4} \text{ Volt.}$$

Der Strom fliesst somit von der verdünnten zur concentrirten Lösung. Die Formel ist zunächst nur für sehr grosse Verdünnungen und für binäre, aus einwerthigen Elementen oder Radicalen zusammengesetzte Elektrolyte abgeleitet; doch dürfte sie auch für andere binäre Elektrolyte, wie z. B. Zinksulfat, anwendbar sein, wo aber dann der in Gleichung (6) auftretende Zahlenfactor halbirt werden muss, weil in einem Raume, in welchem sich die an z. B. Zink gebundene Elektricitätsmenge + 1 befindet, der osmotische Druck dieses Metalls nur die Hälfte von dem beträgt, wenn z. B. Natrium an die Stelle von Zink tritt.

Um die Gleichung (6) zu prüfen, bieten sich demnach zunächst die Concentrationsströme von Silber als einem einwerthigen Metall in seinen Salzen dar; da meine eigenen Messungen in sehr verdünnten Lösungen mir bisher zu wenig constante Resultate geliefert haben, so beschränke ich mich hier, um so mehr, da ich auf einem etwas anderen Wege obige Gleichung (s. w. u.) experimentell befriedigend habe verificiren können, darauf, die Messungen von Hrn. Miesler[1] zu berechnen. Hr. Miesler gibt die elektromotorischen Verdünnungsconstanten, d. h. die elektromotorischen Kräfte einer Concentrationskette, in welcher die beiden Concentrationen sich wie 1 : 2 verhalten, von Silberacetat und Silbernitrat zu 0.0107 und 0.0162 Volt an; in wie weit dieselben thatsächlich von den Concentrationen unabhängig und bei welcher Temperatur die Messungen gemacht sind, darüber finde ich keine Angabe. Aus Gleichung (6) berechnen sich obige Grössen für sehr grosse Verdünnungen und für 18° zu 0.0129 und 0.0183; nach der oben entwickelten Theorie würden diese »Verdünnungsconstanten« mit zunehmender Concentration abnehmen, weil mit abnehmender Verdünnung die Zahl der nicht dissociirten Molekeln auf Kosten der activen wächst und daher der osmotische Druck der Jonen langsamer als die Concentration zunimmt. Für die elektromotorische Kraft einer Kette: Ag, $AgNO_3$ normal, $AgNO_3$ $^1/_2$ normal, Ag, berechnet sich daher ein dem von Hrn. Miesler erhaltenen nahe kommender Werth (0.0169). Die Überführungszahlen für das Anion $\frac{v}{u+v}$ sind den übereinstimmenden Messungen von Hrn. Hittorf[2] und Loeb und mir[3] entnommen. Somit dürfte schon hierdurch Gleichung (6) eine experimentelle Bestätigung erfahren haben.

Bekanntlich hat vor einiger Zeit Hr. von Helmholtz[4] auf einem

[1] Wiener Sitzungsber. 95, 642 (1887).
[2] Pogg. Ann. 89, 177.
[3] Zeitschrift f. phys. Chemie 2, 956 (1888).
[4] v. Helmholtz, Berl. Sitzungsber. 26. November 1877.

ganz anderen Wege, nämlich mittels thermodynamischer Behandlungsweise, das gleiche Problem gelöst, indem er die elektromotorische Kraft der Concentrationsströme aus den Dampfspannungen der Lösungen um die beiden Pole zu berechnen gelehrt hat. Die Formel von Hrn. VON HELMHOLTZ ist insofern viel allgemeiner, als sie sich nicht auf verdünnte Lösungen beschränkt; andererseits wird in der obigen Ableitung die elektromotorische Kraft aus der Summe ihrer Componenten berechnet, und erlangt man so einen Einblick darin, wie viel von ihr im Innern der verschieden concentrirten Lösung und wie viel an den Grenzflächen von den beiden Polen und Elektrolyt ihren Sitz hat.

Für den Fall verdünnter Lösungen vereinfacht lautete die Formel von Hrn. VON HELMHOLTZ:[1]

$$(7)\quad E'_m - E''_m = \frac{\pi_0 - \pi}{\pi} \cdot \frac{MS}{H_2O} \cdot 0.000933 \cdot \pi_0 V_0 \frac{v}{u+v}\, ln \frac{c_2}{c_1} \times 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Darin bedeuten π_0 den Dampfdruck des Wassers bei der betreffenden Temperatur, π denjenigen einer Lösung, welche auf 1^g Salz S^g Wasser enthält, V_0 das Volumen von 1^g Wasserdampf bei der betreffenden Temperatur und dem Druck p_0, 0.000933 die durch die elektromagnetische Einheit der Elektricitätsmenge zersetzte Wassermenge in Grammen, und $\frac{M}{H_2O}$ schliesslich die durch eine Elektricitätsmenge, welche 18^g Wasser zersetzt, zelegte Quantität des betreffenden Salzes. Indem wir obige Formel mit Gleichung (6)

$$(6)\qquad E'_m - E''_m = 0.860\; T \frac{2v}{u+v}\, ln \frac{p_2}{p_1} \times 10^{-4} \text{ Volt}$$

vergleichen, beachten wir zunächst, dass bei grossen Verdünnungen osmotischer Druck p und Concentration c einander proportional, somit $ln \frac{p_2}{p_1} = ln \frac{c_2}{c_1}$ ist. Wenden wir Gleichung (7) auf aus einwerthigen Radicalen zusammengesetzte Elektrolyte an, so ist $M = 2m$, wo m das Molekulargewicht des letzteren bedeutet. Der Factor $2 \times 0.000933 \times \pi_0 V_0$ ergibt sich mit Benutzung der REGNAULT'schen Zahlen zu 0.02542×10^{-8} bei $20°$; somit wird unter Einführung der absoluten Temperatur, welche hier unbedenklich gestattet ist, Gleichung (7)

$$(8)\quad E'_m - E''_m = \frac{\pi_0 - \pi}{\pi_0} \cdot \frac{mS}{18} \cdot 0.867\; T \frac{v}{u+v}\, ln \frac{p_2}{p_1} \times 10^{-4} \text{ Volt.}$$

Damit also die Formeln (6) und (8) mit einander verträglich sind, muss

$$(9)\qquad \frac{\pi_0 - \pi}{\pi_0} \cdot \frac{mS}{18} = 2$$

[1] J. MOSER, WIED. Ann. 14, 61 (1881).

sein. Die Constanten 0.867 und 0.860 würden genau einander gleich sein, wenn Wasserdampf bei diesen Temperaturen, wie Hr. von Helmholtz, und Wasserstoff bez. Sauerstoff, wie ich in der Ableitung der betreffenden Formeln vorausgesetzt haben, sich wie ideale Gase verhielten.

Führen wir in (9) für $\frac{mS}{18}\frac{\nu_1}{\nu_2}$, wo ν_1 die Anzahl Moleküle des gelösten Körpers und ν_2 die des Lösungsmittels bedeuten, ein, so wird

$$(10) \qquad \frac{\pi_0 - \pi}{\pi_0} = 2\frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

Nun haben zuerst Hr. van 't Hoff,[1] später Hr. Planck[2] den Satz durch thermodynamische Betrachtungen abgeleitet, dass die relative Dampfdruckerniedrigung einer verdünnten Lösung gleich der Anzahl Moleküle des gelösten Körpers durch die Anzahl Moleküle des Lösungsmittels ist. Nach Gleichung (10) ist bei binären Elektrolyten die relative Dampfdruckerniedrigung gleich dem doppelten dieses Verhältnisses. In der That ist nach allen bisherigen, für eine genauere Prüfung leider nicht ausreichenden Messungen letzteres der Fall. Bekanntlich hat daher Hr. Arrhenius die van 't Hoff'sche Formel dahin interpretirt, dass bei Elektrolyten die Jonen als im freien Bewegungszustande befindliche Moleküle anzusehen sind, und ist es daher nicht uninteressant, dass wir hier auf einem neuen Wege zur van 't Hoff'schen Formel in der Gestalt, wie sie nach Hrn. Arrhenius auf Elektrolyte Anwendung findet und wie sie den thatsächlichen Verhältnissen zu entsprechen scheint, gelangen.

Wie ich schon früher erwähnt habe,[3] lassen sich die Rechnungen von Hrn. von Helmholtz auch auf Concentrationsketten anwenden, deren Pole von Quecksilber gebildet werden, welches man mit dem unlöslichen Salz der in dem zu untersuchenden Elektrolyten enthaltenen Säure überschüttet. Die Ketten sind also z. B. nach dem Schema : Hg, Hg_2Cl_2, HCl conc., HCl verd. Hg_2Cl_2, Hg : zusammengesetzt. Auch diese Elektroden sind unpolarisirbar, um welcher Eigenschaft willen Hr. von Helmholtz sich ihrer bereits mehrfach bedient hat. Da bei diesen Ketten durch eine Elektricitätsmenge, welche bei den gewöhnlichen Concentrationsketten $\frac{v}{u+v}$ Aequivalente Salz von dem concentrirteren Theile der Flüssigkeit zu dem ver-

[1] van 't Hoff, Sv. Vet. Ak. Handlingar 21 Nr. 17 (1886) und a. a. O. 494.
[2] Planck, Wied. Ann. 32, 489 (1887).
[3] A. a. O. S. 635.

dünnteren transportirt, $\frac{u}{u+v}$ Aequivalente in der entgegengesetzten Richtung geführt werden, so tritt in die Formel (7) statt $\frac{v}{u+v}$ einfach $\frac{u}{u+v}$ ein, und gleichzeitig ergibt sich, dass hier der durch die Concentrationsdifferenzen getriebene galvanische Strom die entgegengesetzte Richtung hat, somit von concentrirter Lösung zur verdünnten fliesst.

Zu dem gleichen Resultat führt die Anwendung meiner Formel. Da der chemische Effect bei diesen Elektroden, wenn sie von einem Strom durchflossen werden, der gleiche ist wie etwa bei Anwendung einer metallisch leitenden Modification des Chlors, um bei obigem Beispiel zu bleiben, als Elektrodensubstanz, so sind hier dieselben Betrachtungen für das elektronegative Jon anzustellen, welche wir oben für das metallische Jon durchgeführt haben. Bezeichnet demgemäss P'_0 eine der oben definirten elektrolytischen Lösungstension eines Metalls sehr ähnliche Grösse, so wird die elektromotorische Kraft einer derartigen Concentrationskette als Summe dreier Componenten:

$$E'_n - E''_n = p_0\left(ln\frac{p_1}{P'_0} + \frac{u-v}{u+v}ln\frac{p_1}{p_2} - ln\frac{p_2}{P'_0}\right)$$

$$(11) \qquad E'_n - E''_n = 0.860\, T\frac{2u}{u+v}ln\frac{p_1}{p_2} \times 10^{-4} \text{ Volt.}$$

Diese Beziehung ist einer leichten und sicheren experimentellen Prüfung für eine grosse Anzahl mannigfach zusammengesetzter Ketten zugänglich, weil man hier selbst bei ziemlich beträchtlichen Verdünnungen bedeutend constantere Resultate erhält als bei Anwendung metallischer Elektroden.

Bisher habe ich Gleichung (11) an folgenden Combinationen geprüft, welche in unten stehender Tabelle verzeichnet sind; darin bedeuten μ_1 und μ_2 den Molekulargehalt der Lösungen (Grammaequivalente pro Liter) an Anode und Kathode. Für u und v sind die von Hrn. KOHLRAUSCH[1] berechneten Werthe benutzt, welche sich auf eine Temperatur von 18° beziehen:

	H	Li
$u =$	272	24
	Cl	Br
$v =$	54	55.

[1] F. KOHLRAUSCH. WIED. Ann. 26, 214 (1885).

Wenn auch, wie bereits bemerkt, die Absolutwerthe[1] dieser Beweglichkeiten einer erheblichen Correction bedürfen, so besteht dieselbe in einem für alle nahe gleichen Factor und kommt hier daher nicht in Betracht. Ferner ist für $\frac{p_1}{p_2}$ das Verhältniss der galvanischen Leitungsfähigkeiten der beiden Lösungen $\frac{k_1}{k_2}$ eingeführt, weil nach Hrn. Arrhenius in verdünnten Lösungen die Leitfähigkeit der Anzahl dissociirter Molekeln und somit dem osmotischen Druck der beiden Jonen proportional ist. k_1 und k_2 wurde zur Berechnung von Gleichung (11) ebenfalls der citirten Abhandlung von Hrn. Kohlrausch entnommen; für das Leitungsvermögen des Bromwasserstoffs wurde das sehr wenig davon verschiedene des Chlorwasserstoffs eingesetzt.

Combination	Elektromotorische Kraft bei 18°	
	beob.	ber.
1. $Hg, Hg_2Cl_2, HCl\mu_1 = 0.105, HCl\mu_2 = 0.0180, Hg_2Cl_2, Hg$.	0.0710	0.0717 Volt.
2. $Hg, Hg_2Br_2, HBr\mu_1 = 0.126, HBr\mu_2 = 0.0132, Hg_2Br_2, Hg$.	0.0932	0.0917 »
3. $Hg, Hg_2Cl_2, LiCl\mu_1 = 0.100, LiCl\mu_2 = 0.0100, Hg_2Cl_2, Hg$.	0.0354	0.0336 »
4. $Hg, Hg_2Cl_2, KCl\mu_1 = 0.125, KCl\mu_2 = 0.0125, Hg_2Cl_2, Hg$.	0.0532	0.0542 »

Der beobachtete Werth für die elektromotorische Kraft ist das Mittel aus einer grossen Anzahl Einzelbestimmungen, und wenn diese auch um 5 Procent und mehr variirten, so dürfte der Mittelwerth doch bis auf 1—2 Procent zuverlässig sein. Von den Daten, die in den berechneten Werth eingehen, sind die für $\frac{u}{u+v}$ bei weitem am unsichersten; doch dürfte auch hier, ausser beim Chlorlithium, wo naturgemäss diese Grösse besonders unsicher ist, ein Fehler über 2 Procent nicht vorkommen. Hiernach ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung so gut, als nur zu erwarten war, und erhalten dadurch nicht nur die hier mitgetheilten Entwickelungen eine gewichtige Stütze, sondern es wird auch die von den HH. van't Hoff und Planck abgeleitete Dampfdruckformel mit der Interpretation derselben für Elektrolyte durch Hrn. Arrhenius weit genauer experimentell verificirt, als es bisher möglich war.

Die Stromesrichtung war natürlich bei sämmtlichen obigen Combinationen die gleiche; im Sinne der Theorie bildete die von der verdünnteren Lösung bespülte Elektrode den positiven Pol der Kette.

[1] Zeitschr. f. physik. Chemie 2, 626 (1888).

Da wir die elektromotorische Kraft der Ketten aus der Summe ihrer Componenten, d. h. den Kräften, welche im Innern der verschieden concentrirten Lösung, und denen, welche an den Grenzflächen von Metall und Elektrolyt ihren Sitz haben, in einer den Thatsachen entsprechenden Weise berechnen konnten, so haben wir einige Sicherheit dafür, dass auch die beiden Componenten einzeln durch die betreffenden Formeln richtig bestimmt sind. Der Bruchtheil der Gesammtkraft, welcher im Innern der Flüssigkeit wirkt, beträgt nach Gleichung (3)

$$0.860\, T \frac{u-v}{u+v}\, ln\, \frac{p_1}{p_2} \times 10^{-4}\, \text{Volt.};$$

die Differenz der beiden an den Elektroden wirksamen Kräfte beträgt nach Gleichung (5)

$$0.860\, T\, ln \frac{p_1}{p_2} \times 10^{-4}\, \text{Volt.}$$

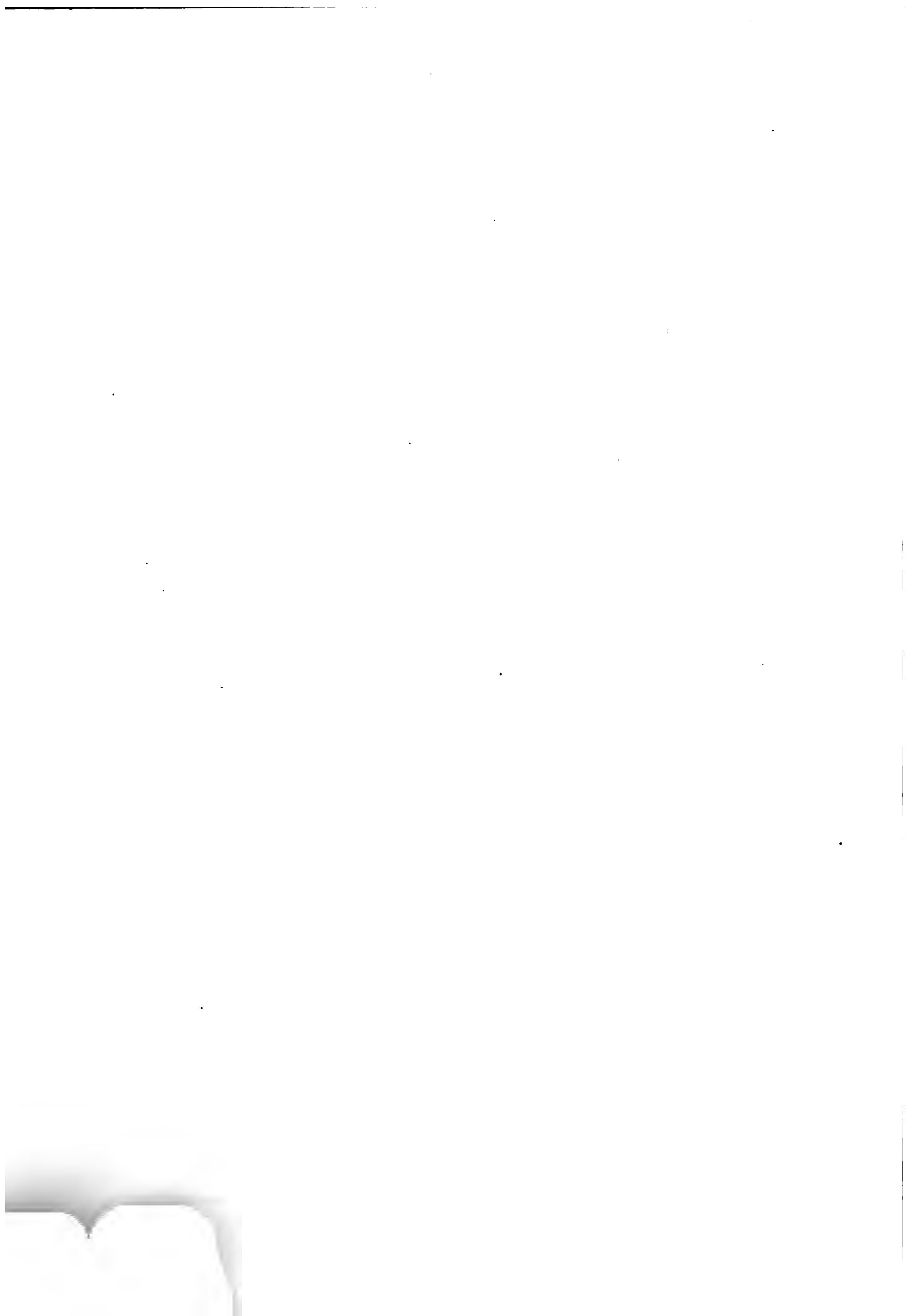
Hiernach ist ersterer Bruchtheil bei Combination 4. sehr klein im Vergleich zur gesammten Potentialdifferenz; bei 1. und 2. beträgt er etwa 0.67 vom letzteren und zwar addirt er sich zu diesem; bei 3. hingegen wirken die im Innern der Lösung vorhandenen den an den Grenzflächen auftretenden Kräften entgegen, von welchen sie das 0.39 fache betragen. Mit Rücksicht hierauf sind obige Combinationen als Typen besonders charakteristischer Fälle ausgewählt worden.

Diese Zerlegung der Gesammtkraft einer Concentrationskette in ihre Componenten gewinnt natürlich durch den Umstand noch ausserordentlich an Wahrscheinlichkeit, dass, als ich die ersteren, im Innern der Lösung wirkenden Kräfte zur Erklärung der Diffusionserscheinungen in die Rechnung einführte, die Diffusionsgeschwindigkeit sich im absoluten Maasse, und zwar in unerwartet guter Übereinstimmung mit den bis jetzt vorliegenden Beobachtungen, berechnen liess.

Schliesslich sei noch darauf hingedeutet, dass bei der hier versuchten Behandlungsweise, nach welcher gewisse elektromotorische Kräfte als durch Druckunterschiede veranlasst in Rechnung gesetzt wurden, die vornehmlich durch die Forschungen von Hrn. von HELMHOLTZ aufgedeckte Beziehung zwischen mechanischer und elektrischer Energie, nämlich die unbeschränkte Verwandelbarkeit der einen in die andere, zur unmittelbaren Anschauung gelangt.

Ausgegeben am 14. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



1889.

VIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

14. Februar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

Hr. Rammelsberg las über die chemische Natur der Glimmer.

Neben dieser umstehend folgenden Mittheilung überreicht derselbe eine ausführlichere Chemische Monographie der Glimmergruppe, welche in den Abhandlungen erscheinen wird.

Über die chemische Natur der Glimmer.

Von C. Rammelsberg.

Die fortschreitende Kenntniss der Mineralien in Bezug auf ihre geometrischen, physikalischen und chemischen Eigenschaften lehrt, dass in vielen Fällen dasjenige, was als ein Mineral einen Namen trug, eine Gruppe von Mineralien umfasst, deren Glieder in ihren Eigenschaften sich nahestehen, nicht aber als identisch betrachtet werden können. Was früher Feldspath, Glimmer, Augit, Granat, Turmalin u. s. w. hiess, ist zur Bezeichnung einer Gruppe geworden, und namentlich bei den Silicaten tritt dieser Fall am häufigsten ein.

Die Glieder einer Gruppe sind isomorph, d. h. ihre Krystallform ist die gleiche, mit solchen Abweichungen jedoch, wie sie bei isomorphen Körpern überhaupt in Folge ihrer individuellen Eigenthümlichkeit vorhanden sind.

Neben den isomorphen Grundverbindungen treten ihre Mischungen oft in den mannigfaltigsten Molekularverhältnissen hervor, und diese Mischungen sind oft selbst häufiger als ihre Componenten.

Die Entdeckung der Isomorphie erfolgte an Verbindungen, welche aus chemischen Gründen als analog constituirt gedacht werden müssen, und deshalb sah E. Mitscherlich in dieser Analogie die Ursache der Isomorphie.

Indessen kennen wir jetzt viele Fälle gleicher Form auch bei nicht analoger Zusammensetzung, und zwar bei Mineralien und bei künstlichen Verbindungen, so dass an einen Causalzusammenhang im Sinne Mitscherlich's nicht mehr zu denken ist.

Betrachtet man die grösseren Silicatgruppen des Mineralreichs, so sieht man, dass sie zweifacher Art sind. Die Glieder der einen sind stöchiometrisch gleich, also vollkommen analog. Die Gruppen Olivin, Granat, Epidot, Vesuvian, Turmalin sind von dieser Art. Ihre Glieder lassen sich durch eine allgemeine Formel ausdrücken.

So ist es aber nicht in anderen grossen und wichtigen Gruppen, deren Glieder trotz gleicher Form eine stöchiometrisch verschiedene,

nur mehr oder minder ähnliche Zusammensetzung haben. So steht in der Feldspathgruppe der aus Halbsilicaten (Singulosilicaten) bestehende Anorthit neben dem aus anderthalbfach sauren Silicaten (Trisilicaten) bestehenden Albit, und ihre Isomorphie bezeugen die Mischungen beider, die Kalknatronfeldspathe (Plagioklase), Oligoklas, Andesin und Labrador.

Es hat an recht unchemischen Versuchen nicht gefehlt, die Zusammensetzung beider Feldspathe als analog erscheinen zu lassen. Durch Verdoppelung der empirischen Formel des Anorthits hat man eine Analogie mit dem Albit darthun zu können gemeint. Man hat aus den Formeln beider aequivalente Bruchtheile, Ca + 2 Al einerseits, und 2 Si andererseits, herausgenommen, und diese als Vertreter bezeichnet. Zu einem solchen Trugschluss hätte man nicht kommen dürfen, denn man hätte sich sagen müssen, dass die Atomgruppen, welche in den Formeln der gleichen Zahl von Sauerstoffatomen vorangehen, aequivalent sein müssen, was selbstverständlich ist, und dass bei einem solchen Verfahren, Formeln auf gleiche Mengen Sauerstoff zu beziehen, alle möglichen Silicate isomorph sein müssten. Man hatte die Begriffe Aequivalenz und Vertretung ganz unrichtig aufgefasst, insofern eine wirkliche Vertretung eines Körpers durch einen anderen in einer mit jenem isomorphen Verbindung nur bei gleichartiger chemischer Natur beider Körper denkbar ist.

Es dürfte bei dieser Gelegenheit zeitgemäss sein, auf solche Mineralformeln hinzuweisen, welche in neuerer Zeit aufgestellt werden und den Gesetzen der chemischen Proportionen spotten. So schlägt man zu einem Mol. die verschiedensten Elemente zusammen.

Gleich vielen anderen Säuren bildet die Kieselsäure eine Reihe von Sättigungsstufen, in welchen das Atomverhältniss des Metalls und des Siliciums gesetzmässig in einer einfachen Reihe sich ändert. Aber die Erfahrung lehrt auch Salze kennen, in welchen jenes Verhältniss durchaus kein einfaches ist. Die Molybdate und Wolframiate $\acute{R}^6Mo^7O^{24}$, $\acute{R}^6W^7O^{24}$, die Wolframiate $\acute{R}^{10}W^{12}O^{41}$, die Vanadate $\acute{R}^8V^{14}O^{39}$ und viele andere gehören hierher. Das Gesetz der vielfachen Proportionen verlangt, solche Salze als intermediäre Verbindungen einer höheren und einer niederen Sättigungsstufe zu betrachten, und in der That zerfallen manche durch die Einwirkung des Wassers in diese Constituenten.

Nicht anders sind derartige Silicate aufzufassen. Ihre empirischen Formeln sind oft complicirt genug, ihre Zusammensetzung wird jedoch immer sehr einfach, wenn man sie auf die einfachen Sättigungsstufen der Säure zurückführt, in welchen $\acute{R}:Si = 1:1 - 2:1 - 4:1 - 6:1 - 8:1$ ist.

In dieser Weise sind im Nachfolgenden die Resultate der Glimmeranalysen gedeutet.

Die Glimmer bieten krystallographisch, physikalisch und chemisch ein gleich grosses Interesse dar.

Auch nach Kenntniss der Flächenneigungen und der Symmetrieverhältnisse blieb das Krystallsystem zweifelhaft, woran freilich die Seltenheit guter Krystalle theilweise Schuld war. Phillips (1837) und G. Rose (1844) hielten den Glimmer vom Vesuv für zwei- und eingliedrig, Marignac (1847) nahm ihn für sechsgliedrig. Kokscharow (1854) erklärte ihn für zweigliedrig, partialflächig, während Kinngott und Hessenberg die Ansicht Marignac's theilten, und G. vom Rath, selbst Kokscharow, wenn auch nur vorübergehend, ihr beipflichteten. Als Tschermak (1877) die Überzeugung von der gleichen Form aller Glimmer gewann, und die Ungleichheit der angeblichen Rhomboederflächen auffand, musste man zu der ursprünglichen Auffassung zurückkehren.

Alle Glimmer sind zwei- und eingliedrig, die Axen sind nahe rechtwinklig und es ist $a:b = \sqrt{3}:1$.

Nicht weniger eigenthümliche Resultate hat das optische Verhalten der Glimmer geliefert. Biot und Brewster unterschieden ein- und zweiaxige Glimmer; es zeigte sich der Axenwinkel der letzteren ungemein wechselnd, und Senarmont (1851) erklärte, die scheinbar einaxigen Glimmer seien in der That zweiaxige mit äusserst kleinen Winkeln. Demselben ausgezeichneten Forscher verdanken wir die Beobachtung, dass die Axenebene bei manchen Glimmern parallel der Symmetrieebene, bei anderen normal zu dieser liegt.

Für das Krystallsystem war die Beobachtung von Hintze (1874) entscheidend, dass die erste Mittellinie nicht genau mit der Normalen zur Spaltungsfläche zusammenfällt.

Hiernach bieten weder die Form, noch die optischen Eigenschaften ein Mittel, die einzelnen Glimmer in gewisse Abtheilungen zu bringen, und es bleibt daher nur übrig, ihre chemische Natur zu Rathe zu ziehen.

Die ersten genauen Analysen stellte H. Rose an, der im Jahre 1820 die Glimmer von Utö, Broddbo und Kimito, 1822 den Glimmer vom Baikalsee, und 1824 die Glimmer von Ochozk, Miask und Fahlun untersuchte. Ihm sind Andere gefolgt, Tschermak hat Analysen des von ihm geprüften Materials veranlasst, und ich selbst habe dann 18 verschiedene Abänderungen, sowie 4 Lithionglimmer chemisch untersucht und die Resultate, wenigstens grossentheils, der

Akademie schon früher vorgelegt.[1] In dem verflossenen Decennium ist neues Material hinzugekommen, und es schien angemessen, den heutigen Stand unserer Kenntnisse auf diesem Gebiet zu prüfen, wobei sich manches berichtigen liess und die Thatsache herausstellte, dass Glimmer vorkommen, welche noch basischer als Halbsilicate sind.

Bei allem Wechsel der elektropositiven Elemente bleibt nur Aluminium und Kalium (selten Natrium statt seiner) neben dem Silicium unwandelbar, und es treten in sehr vielen Glimmern sogenannte zweiwerthige Elemente, Magnesium und Eisen, zu jenen hinzu. Besonders aber sind es zwei Bestandtheile, welche für die Constitution der Glimmer in Betracht kommen: Wasser und Fluor.

Früher unterschied man wasserfreie und wasserhaltige Glimmer. H. Rose zeigte, dass die letzteren erst in starker Glühhitze Wasser liefern, aber die Zusammensetzung, wie sie H. Rose aus seinen Analysen der Kaliglimmer ableitete, war hinsichtlich des Kaliums für jede Abänderung eine andere. Als ich durch eigene Versuche mich von der Genauigkeit seiner Zahlen überzeugt hatte, sah ich, dass das Atomverhältniss Al : Si bei allen dasselbe war, während das von K : Al schwankte. Dies führte mich schon damals (1866) zu der Ansicht, das Wasser der Glimmer sei chemisch gebunden, der Wasserstoff sei als gleichwerthig dem Kalium im Mol. enthalten, und in der That ergab sich unter dieser Annahme für die Kaliglimmer die gleiche Zusammensetzung und Formel. In gleicher Art ist seitdem die Rolle, die das Wasser in dem Glimmer spielt, allgemein aufgefasst worden, sie hat auch für die Constitution anderer Silicate den Schlüssel geliefert.

Fluor lässt sich nicht in allen, wohl aber in vielen Glimmern nachweisen. Seine Menge ist häufig sehr gering, sie steigt aber in dem Lithionglimmer bis auf 8 Procent, und beträgt auch in dem reinen Magnesiaglimmer 2 bis 5 Procent. In keinem Falle ist seine Gegenwart an diejenige eines bestimmten Bestandtheils gebunden. Die Analogie, welche die Fluoride mit den Chloriden und den übrigen Haloidsalzen zeigen, stellt dieses Element zu den Salzbildnern[2], andererseits nähert es seine höchst elektronegative Natur dem Sauerstoff und es werden Sauerstoffsalze durch Fluorwasserstoff in entsprechend zusammengesetzte Fluoride verwandelt, wie denn z. B. K^2SiO^3 leicht zu K^2SiFl^6 wird.

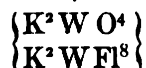
In fluorhaltigen Silicaten darf man deshalb wohl annehmen, dass Silicatmol. mit gleich zusammengesetzten Fluosilicatmol. isomorph ge-

[1] Sitzungsberichte 1879, 833.

[2] Apatit ist $CaCl^2$ und $CaFl^2$ mit $3\,Ca^3P^2O^8$ verbunden.

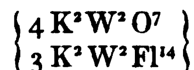
mischt sind, eine Ansicht, welche ich auch für den Topas geltend gemacht habe.

Solche Fluoxyverbindungen finden ihr Analogon in denen des Molybdäns, Wolframs, Niobs etc., denn $K^2WO^2Fl^4$ lässt sich als



$$\left\{\begin{matrix} K^2WO^4 \\ K^2WFl^8 \end{matrix}\right\}$$

und KWO^2Fl^3 als



$$\left\{\begin{matrix} 4\,K^2W^2O^7 \\ 3\,K^2W^2Fl^{14} \end{matrix}\right\}$$

auffassen.

Ein Glimmer, welcher aus den Halbsilicaten $\overset{\prime}{R}{}^4SiO^4 + Al^2Si^3O^{12}$ besteht, kann hiernach sehr wohl die Verbindung $\overset{\prime}{R}{}^4SiFl^8 + Al^2Si^3Fl^{24}$ beigemischt enthalten.

In neuerer Zeit haben einige Mineralogen die Hypothese aufgestellt, Fluor vertrete das sogenannte Hydroxyl OH, allein dies ist an sich schon chemisch unstatthaft, da die Verbindungen HFl und HOH danach analoge sein würden, für die Glimmer aber ganz zu verwerfen, weil dann z. B. der Glimmer von Rozena mit 8 Procent Fluor 0.4 Wasserstoff = 3.6 Wasser enthalten müsste, während er höchstens eine Spur desselben beim Glühen giebt.

Bei der Berechnung der Glimmeranalysen ist natürlich vorausgesetzt, dass sie correct seien und das Material rein war, welche Bedingungen wohl nicht immer erfüllt sind.

Das Nachfolgende stellt nicht diese Rechnungen, sondern nur die aus ihnen gezogenen Schlüsse zusammen.

In chemischer Beziehung zerfällt die Gruppe in:

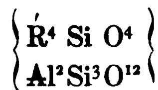
I. Alkaliglimmer.

II. Magnesia- und Eisenglimmer (einschliesslich Barytglimmer).

I. Alkaliglimmer.

Sie enthalten keine zweiwerthigen Elemente oder nur geringe Mengen derselben.

A. Natronglimmer. Sie sind stets Lepidolithe und bestehen aus Halbsilicaten

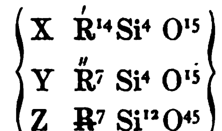


$$\left\{\begin{matrix} \overset{\prime}{R}{}^4\,Si\,O^4 \\ Al^2Si^3O^{12} \end{matrix}\right\}$$

worin R = Na und H ist.

B. Kaliglimmer. Zahlreiche weisse oder schwachgefärbte Glimmer, welche in drei Abtheilungen zerfallen, nämlich:

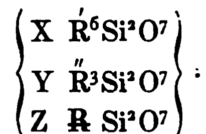
1. Halbsilicate, gleich den vorigen.
2. 1 Mol. normale und 3 Mol. Halbsilicate. In ihnen ist immer eine gewisse Menge Mg und Fe vorhanden, so dass ihre empirische Formel



ist. Dieses Verhältniss ergiebt sich
= 5 : 1 : 5 in Zillerthal, Aschaffenburg, S. Royalston, Ytterby,
7 : 1 : 7 Sissersk (Chromglimmer),
9 : 1 : 9 Soboth. Broddbo.

3. 1 Mol. normale und 1 Mol. Halbsilicate.

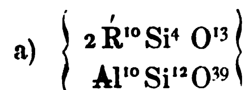
Auch sie sind



Hierher die Kaliglimmer aus dem sächsischen Gneis und einige neuerlich untersuchte. In ihnen ist X = 3 — 8Y, Z = 8 — 27Y.

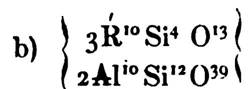
C. Lithionglimmer. Sie sind sämmtlich aus normalen und Halbsilicaten zusammengesetzt.

1. Je 1 Mol. beider. Formel von B. 3. Glimmer von Schüttenhofen mit 5.6 Procent Fluor und 1.7 Procent Wasser.
2. 3 Mol. normaler und 1 Mol. Halbsilicate



Rozena. Juschakowa. Paris (Maine).

Im Glimmer von Juschakowa ist das Mol.-Verhältniss vielleicht 7 : 3 statt 2 : 1



Chursdorf.

Diese Glimmer enthalten höchstens sehr kleine Mengen von H, dagegen viel Fl.

In a ist K : Li = 1 : 1, in b = 2 : 3.

II. Magnesia-, Baryt- und Eisenglimmer.

In dieser grossen Abtheilung treten die Silicate von Mg (Ba) oder von Fe, oder beide zu denen von $\overset{\prime}{R}$ und von R hinzu. Die Unterabtheilungen bildet man am besten nach der Natur der zweiwerthigen Elemente.

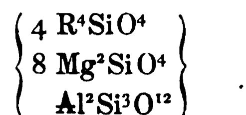
A. Magnesiaglimmer.

Hierher gehören jene hellen, grünlichen oder gelblichen Glimmer, welche kein oder fast kein Eisenoxydul und nur wenig Eisenoxyd als Vertreter der Thonerde enthalten. Die Menge der Magnesia erreicht 30 Procent. Die $\overset{\prime}{R}$ sind H, K (Na, öfters etwas Li). Der Fluorgehalt geht von 0 bis fast 6 Procent.

Nach den Sättigungsstufen sind sie zweierlei Art.

1. Halbsilicate.

Hierher gehören zwei Glimmer von Edwards, S. Lawrence Co., N. Y., nämlich ein grünlicher, welcher frei von Fluor, aber 5.4 Procent Wasser geben soll. Die Analyse SPERRY's führt zu


$$\left\{\begin{array}{l} 4\ R^4SiO^4 \\ 8\ Mg^2SiO^4 \\ \ \ Al^2Si^3O^{12} \end{array}\right\}$$

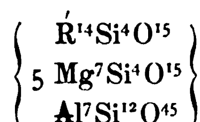
wobei K (Na, Li) : H = 1 : 2 ist.

Ferner ein brauner, nach BERWERTH's Analyse mit dem Mol. Verhältniss 9 : 23 : 5, oder vielleicht 5 : 12 : 3.

2. Normale- und Halbsilicate.

Die übrigen Glimmer dieser Abtheilung stellen Verbindungen von 1 Mol. jener und 3 Mol. dieser dar, gleich den Kaliglimmern der zweiten Abtheilung, obwohl die Analysen zuweilen es zweifelhaft lassen, ob nicht 4 Mol. Halbsilicate vorhanden sind.

Die Glimmer von Rossie, Gouverneur, Jefferson Co., Pargas führen übereinstimmend zu


$$\left\{\begin{array}{l} \ \ \overset{\prime}{R}{}^{14}Si^4O^{15} \\ 5\ Mg^7Si^4O^{15} \\ \ \ Al^7Si^{12}O^{45} \end{array}\right\}$$

während der von Pennsbury das Mol. Verhältniss 2 : 5 : 1, und der von Ratnapura 3 : 9 : 2 ergiebt, dieser aber einer Mischung reiner Halbsilicate nahekommt.

B. Magnesia-Eisenglimmer und Eisenglimmer.

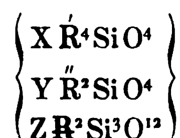
Eine grosse Zahl dunkler, äusserlich oft schwarzer Glimmer, deren Magnesiagehalt von 26 Procent bis o heruntergeht. Sie sind fluorfrei oder fluorarm. Auch sie setzen sich aus den Silicaten von $\overset{I}{R}$ (K, H), $\overset{II}{R}$ (Mg, Fe) und **R** (Al, **Fe**) zusammen. Viele von ihnen bestehen aus Halbsilicaten, allein nicht wenige sind noch basischer, aus Halb- und Drittelsilicaten zusammengesetzt, ein Resultat, welches freilich zur Voraussetzung hat, dass die Wasserbestimmungen genau seien und das Material keine Veränderung erlitten habe.

In dieser Beziehung möchten weitere Versuche erwünscht sein, da Glimmer des nämlichen Fundortes im Wassergehalt sehr verschieden angegeben werden.

So lieferte der dunkle Glimmer vom Vesuv, aus welchem Bromeis 0.75 Procent, ich selbst 0.65 Procent Wasser erhalten hatte, Berwerth zufolge die sechsfache Menge, nämlich 4 Procent. Natürlich hat diese Differenz, wenn das Wasser an der Constitution theilnimmt, einen bemerkbaren Einfluss auf das Resultat, denn der Glimmer vom Vesuv besteht dann aus Halb- und Drittelsilicaten. Neue Analysen und sorgfältige Wasserbestimmungen bei manchen Glimmern dieser Art sind durchaus nicht überflüssig.

Es ist sehr auffällig, dass unter der grossen Zahl hierher gehöriger Glimmer nur wenige das gleiche Mol. Verhältniss der Silicate zeigen, und man wird zu der Vermuthung geführt, dass die einzelnen Theile einer grösseren Masse in dieser Hinsicht verschieden sein dürften, worüber vielleicht die optische Prüfung entscheiden könnte.

1. Halbsilicate.



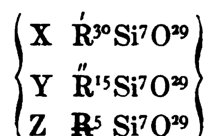
$$\left\{\begin{array}{l} X\,\overset{I}{R}{}^4SiO^4 \\ Y\,\overset{II}{R}{}^2SiO^4 \\ Z\,\mathbf{R}^2Si^3O^{12} \end{array}\right\}$$

X:Y:Z

1 : 2 : 1 Lierwiese. Hitterö,
1 : 3 : 1 Sterzing. Servance (?),
1 : 4 : 1 Monzoni. Arendal. Baikalsee,
1 : 4 : 2 Adamello (?),
2 : 1 : 2 Branchville (der dunkle Glimmer),
2 : 2 : 1 Långban (Manganglimmer),
3 : 3 : 4 S. Dennis,
3 : 4 : 2 Brevig (Scheerer). Sutherland,

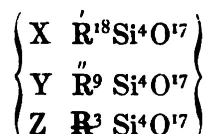
3 : 4 : 6 Persberg (SOLTMANN),
3 : 6 : 2 Miask.
3 : 7 : 2 Greenwood Furnace,
3 : 8 : 2 Mainland,
4 : 8 : 3 Persberg (RG.),
6 : 1 : 6 Branchville (der hellere Glimmer),
6 : 4 : 5 Geier.

2. 6 Mol. Halb- und 1 Mol. Drittelsilicate.



X : Y : Z
1 : 2 : 2 Grönland. New-York,
1 : 2 : 4 Wiborg,
1 : 3 : 3 Filipstad,
1 : 4 : 4 Klausenalpe,
2 : 3 : 6 Freiberg,
3 : 2 : 6 Eibenstock,
3 : 4 : 6 } Freiberg,
5 : 6 : 12 }
5 : 10 : 12 Middletown.

3. 3 Mol. Halb- und 1 Mol. Drittelsilicate.

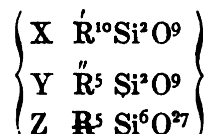


X : Y : Z
1 : 1 : 11 Renchthal (NESSLER),
1 : 2 : 2 Christiania,
1 : 2 : 3 Radauthal. Renchthal (KILLING). Sutherland,
1 : 2 : 4 Schüttenhofen,
1 : 2 : 9 Canton,
2 : 3 : 3 Weilen. Brevig (DEFRANCE)[1],
2 : 3 : 9 Aberdeen,
2 : 4 : 3 Vesuv (BERWERTH),
2 : 5 : 5 Oberbergen. Easton,
3 : 8 : 6 Morawiza.

[1] Natronglimmer.

4 : 5 : 9 Brevig (Rg.).
5 : 6 : 7 Böstenbach.

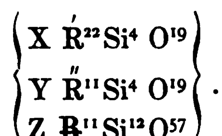
4. Je 1 Mol. Halb- und Drittelsilicate.



$$\left\{\begin{matrix} X & \overset{\prime}{R}{}^{10}Si^2O^9 \\ Y & \overset{\prime\prime}{R}{}^{5}Si^2O^9 \\ Z & \mathbf{R}^{5}Si^6O^{27} \end{matrix}\right\}$$

X : Y : Z
2 : 1 : 2 Ballygihen. Ballyellin.
3 : 6 : 2 Freiersbach.
5 : 4 : 4 Pike's Peak.
3 : 6 : 4 Baltimore.

5. 1 Mol. Halb- und 3 Mol. Drittelsilicate.

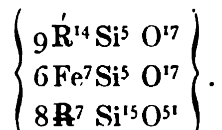


$$\left\{\begin{matrix} X & \overset{\prime}{R}{}^{22}Si^4O^{19} \\ Y & \overset{\prime\prime}{R}{}^{11}Si^4O^{19} \\ Z & \mathbf{R}^{11}Si^{12}O^{57} \end{matrix}\right\}.$$

X : Y : Z
1 : 1 : 1 Auburn.
3 : 2 : 3 Litchfield (Maine).

C. Lithion-Eisenglimmer.

Grossblättrige fluorreiche Glimmer, von denen jedoch nur der von Zinnwald genauer untersucht ist, welcher Li : K = 1 : 1, aber, meinen Versuchen zufolge, nicht wesentlich Wasser enthält. Er besteht aus 3 Mol. normaler und 2 Mol. Halbsilicate.



$$\left\{\begin{matrix} 9\overset{\prime}{R}{}^{14}Si^5O^{17} \\ 6Fe^7Si^5O^{17} \\ 8\mathbf{R}^7Si^{15}O^{51} \end{matrix}\right\}.$$

Ähnlich ist der Glimmer von Altenberg beschaffen, von dem aber nur eine ältere Analyse existirt; und vor allem wären neue Versuche an den Cornwaller Lithionglimmern zu wünschen.

D. Barytglimmer.

Es sind nur wenige Glimmer, welche eine grössere Menge Baryum enthalten. Ihre $\overset{\prime}{R}$ sind H und K, die $\overset{\prime\prime}{R}$ = Mg, Ba, Fe. Fluor ist nicht angegeben.

Sterzing. Halbsilicate im Mol.-Verhältniss 2 : 1 : 2.

Scheelingen (Kaiserstuhl). Je 1 Mol. Halb- und Drittelsilicate (gleich C. 4). X : Y : Z = 1 : 8 : 2. Soll wasserfrei sein.

Habachthal. Je 1 Mol. normaler und Halbsilicate (gleich dem Kaliglimmer 3). X : Y : Z = 2 : 1 : 4.

Auf Grund der vorhandenen Analysen muss also, auch wenn einzelne vielleicht nicht ganz zuverlässig sein sollten, der Schluss gezogen werden, dass an der Constitution der Glimmer drei Sättigungsstufen der Kieselsäure theilnehmen, normale, Halb- und Drittelsilicate, jedoch so, dass weder die ersten noch die letzten selbständig erscheinen, beide vielmehr stets nur in Verbindung mit Halbsilicaten. Und diese grosse stöchiometrische Verschiedenheit besteht bei gleicher Krystallform; ein neuer schlagender Beweis dafür, dass die Gleichheit der Form nicht in der analogen Zusammensetzung ihren Grund hat.

Innerhalb noch weiterer Grenzen bewegt sich die Zusammensetzung der Feldspathe, aber hier ist allen Gliedern doch das Aequivalentverhältniss $\overset{\prime}{R}^2 : Al = \overset{\prime\prime}{R} : Al$ gemein.

In unserer Gruppe kehrt dieses Verhältniss nur bei einem Theil der Kaliglimmer und der Lithionglimmer wieder, bei allen anderen ist es nicht vorhanden, wechselt überhaupt, namentlich beim Hinzutreten der Silicate von Mg und Fe, in hohem Grade.

Nun gilt das constante und einfache Verhältniss der verschiedenwerthigen Elemente für ein Kriterium der Doppelsalze, als welche Orthoklas, Albit und Anorthit betrachtet werden, während schwankende Verhältnisse, welche die Krystallform unverändert lassen, als isomorphe Mischungen aufgefasst werden.

Als solche erscheinen nun auch die Glimmer, und es scheint in der That, als lasse sich zwischen Doppelsalzen und isomorphen Mischungen eine scharfe Grenze nicht ziehen.

Wir erklären uns schliesslich gegen die hypothetische Annahme extremer Grenzglieder, aus deren Mischung die zwischenliegenden hervorgehen sollen, weil solche Hypothesen keinen thatsächlichen Boden haben.

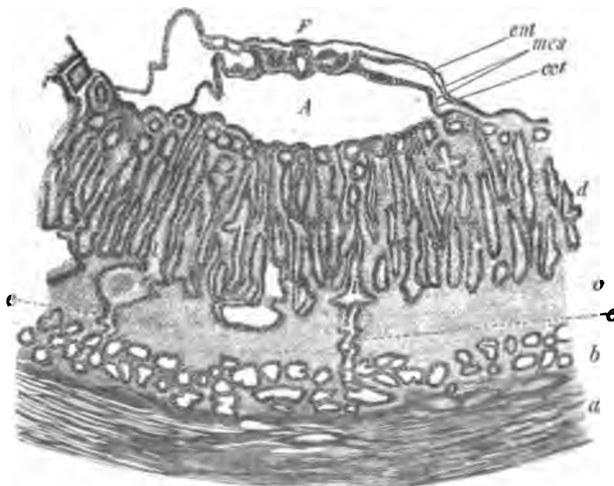
Die Arbeit selbst, deren Resultate im Vorstehenden angegeben sind, wird mit den Rechnungen als »Chemische Monographie der Glimmergruppe« in den Abhandlungen der Akademie erscheinen.

Die Entwickelung der Hunde-Placenta.

Von Dr. G. Heinricius,
Privatdocent an der Universität Helsingfors.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer am 31. Januar [s. oben S. 51].)

Bekanntlich zeigt die Uterinschleimhaut des Hundes — s. die Angaben von Bischoff »Entwickelungsgeschichte des Hunde-Eies« Braunschweig, 1845 — zweierlei Arten von schlauchförmigen Drüsen, kurze sogenannte Krypten in grösserer Zahl und in oberflächlicher Schicht, und längere in geringerer Menge, welche zugleich tiefer, bis zur Muskelhaut des Uterus, hinabreichen. Man sehe hierzu die gleichlautenden Angaben von Ellenberger und Eichbaum, s. Vergleichende Histologie der Haussäugethiere, herausgegeben von Ellenberger, Berlin 1884—1887, Th. II. S. 320 ff. Mit dem Eintritte des befruchteten Eies in den Uterus zeigt sich nun, als die erste für die Placentarbildung maassgebende Erscheinung, eine bemerkenswerthe Veränderung an diesen beiderlei Drüsen. Die Krypten beginnen sich zu verlängern, Seitensprossen zu treiben und sich zu erweitern; die längeren, tiefer hinabreichenden Drüsen erweitern sich noch viel bedeutender, jedoch



in einer mittleren Zone, welche dem Niveau des unteren Endes der Krypten entspricht, zu förmlichen cystischen Räumen. Von diesen gehen dann wieder schmalere Verbindungsgänge zu den unteren (distalen) Enden dieser Drüsen hin, welche Enden vielfach gewunden sind und auf den Durchschnittsbildern eine besondere distale Drüsenschicht bilden. Die beistehende Figur gibt ein getreues Bild dieses Verhaltens. *a* stellt die Ringmuskelschicht des Uterus dar, *b* die distale oder tiefe Drüsenschicht, d. h. die stark geschlängelten, in einer Schicht zusammenlagernden distalen Endstücke der langen Uterindrüsen *l l*. Es folgt dann eine bindegewebige Zwischenschicht (*c*), darauf die oberflächliche (proximale) Drüsen- oder Kryptenschicht (*d*), welche indessen wieder zweierlei drüsige Elemente beherbergt: 1. die kürzeren Krypten selbst und 2. zwischen ihnen die Ausführungsgänge der längeren Knäueldrüsen (*l l*). Wie gesagt, zeigen nun mit dem Beginne der Festheftung des Eies im Uterus einerseits die Krypten eine Vergrösserung und Ausbuchtung durch seitliche Anhänge, andererseits aber die längeren Drüsengänge erhebliche cystische Aussackungen in der genannten bindegewebigen Schicht *c* in der Nähe des unteren Endes der Krypten. In der Figur sind 3 solcher Aussackungen zu erkennen. Von den letzteren sieht man dann (*e e*) die Verbindungskanälchen zu der distalen Drüsenschicht (*b*) verlaufen. *F* stellt den Fötus dar, wie er sich um diese Zeit der Entwickelung verhält. Man sieht das eben geschlossene Medullarrohr, die Chorda, die Urwirbel mit den Seitenplatten (Mesoderm — *mes.* in der Figur), das Entoderm (*ent.*) und das Ectoderm (*ect.*). Bei der schwachen Vergrösserung ist die parietale Seitenplatte vom Ectoderm in den peripheren Bezirken nicht gut unterscheidbar. *A* bezeichnet den zwischen Embryo und Uterinwand befindlichen Raum, welcher um diese Zeit noch keinen Ectodermbelag besitzt und in welchen sich später das Amnion hineinentwickelt (S. unter Anderen: Frommel, die Entwicklung der Placenta von *Myotus murinus* 1888). Von diesem Stadium haben wir bei der Betrachtung der Placentarentwickelung Ausgang zu nehmen.

Sobald das fötale Ectoderm mit der Innenwand des Uterus in Berührung tritt, geht an der Berührungsfläche das Uterinepithel zu Grunde, indem dessen Zellen zerfallen und wahrscheinlich resorbirt werden. Das Bindegewebe zwischen den Krypten und Drüsenmündungsstücken wird zellenreicher, während die Krypten und Drüsen zunächst in ihrem Wachsthum und in der cystischen Erweiterung der vorhin namhaft gemachten Stellen noch fortfahren.

Demnächst gehen vom fötalen Ectoderm plus der anschliessenden Lage des Mesoderms, soweit diese Häute das spätere Chorion bilden, die fötalen Zotten aus. Dieselben wachsen in die nunmehr nackt zu

Tage liegenden Bindegewebssepta der Kryptenschicht hinein, indem sie sich dort eigene Wege bahnen. Dass ab und zu eine fötale Zotte auch in eine Krypte eindringt, soll nicht in Abrede gestellt werden; jedenfalls ist dies aber das seltenere Vorkommniss und kann man, wie ich meine, nicht etwa sagen, dass die Krypten dazu bestimmt seien die Zotten aufzunehmen. Ich kann mich in diesem Punkte mit Fleischmann[1], dessen Darstellung ich sonst vielfach zu bestätigen vermag, nicht einverstanden erklären.

Mit dem weiteren Vordringen der Zotten in die Kryptenschicht hinein vergesellschaftet sich nun ein Process, der mit dem Untergehen des Uterin-Epithels, sobald das fötale Ectoderm mit letzterem in Berührung kommt, verglichen werden muss. Es geht nämlich das Epithel der Krypten und Drüsenschläuche mit dem weiteren Vordringen der Zotten ebenfalls zu Grunde, und zwar immer zunächst dasjenige Epithel, welches den Zotten am meisten benachbart ist. Der Zerfall der Drüsenzellen offenbart sich durch eine regellose Lagerung der Zellen, durch Verlust der Kerne, durch Zerstückelung des Protoplasmas, durch das Auftreten freier Kerne. Unterhalb dieser Zone der zerfallenden Drüsen, welche genau so weit reicht, wie die vordringenden Zotten, zeigen sich normale Epithelien in den Drüsenschläuchen. Die cystischen Erweiterungen, sowie die distale Drüsenschicht lassen noch keine weiteren Veränderungen wahrnehmen.

Gleichzeitig mit dem Verschwinden der Krypten tritt aber um die vorwachsenden Zotten ein ächtes Syncytium auf, in welchem sich Gefässe zeigen und in welches die Zotten fortan eingebettet sind. Ob dieses etwa von nicht untergegangenen Drüsenzellen herrührt — wie Fleischmann a. a. O. meint[2] — oder von den bindegewebigen Zellen, das will ich vor der Hand nicht entscheiden. Von derartigen Syncytien ist aber in der neueren Zeit bezüglich der Placenta öfters die Rede gewesen, z. B. bei Duval (Société de biologie, 1887, p. 49 et 425 — Kaninchen und Meerschweinchen) und Frommel l. c.

In einem folgenden Stadium sieht man die tiefe Drüsenschicht (*b*) und die bindegewebige Zwischenschicht (*c*) ziemlich unverändert, die cystösen Drüsenräume sind mächtig entwickelt; aber die Schicht

[1] Über die erste Anlage der Placenta bei den Raubthieren. Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Erlangen. 8. November 1886.

[2] Ich habe hier Fleischmann etwas anders interpretirt, als sensu strictiore seine Worte zu verstehen sind. Er sagt nämlich S. 2 »dringen die Zotten in die Uterindrüsen ein, so werden auch deren Epithelzellen dem Untergange geweiht«, und bald darauf heisst es: »und schliesslich ist das Epithel der Drüsen zu einem formlosen stark färbbaren Syncytium geworden«. Ich denke mir, dass Fleischmann entweder die Sache so auffasst, wie oben im Text von mir angenommen wurde, oder nur sagen will, das Epithel gehe als Epithel zu Grunde, um als Syncytium wieder zu erscheinen.

der geraden, oberflächlichen Drüsen (*d*) ist jetzt völlig zur Placenta materna im engeren Sinne umgewandelt. Die fötalen Zotten dringen bis zur Nähe der cystös erweiterten Drüsen vor, von diesen noch durch eine Zone im Zerfall begriffener Drüsen (Krypten) geschieden, welche hier breiter ist und in deren Zusammensetzung verschiedene Elemente eingehen.

Die Chorionzotten erscheinen aus Gallertgewebe und einer einfachen Lage Epithel von cubischen Zellen mit runden oder ovalen Kernen bestehend, welche durch Haematoxylin etwas schwächer als die Kerne des zwischen den Zotten befindlichen Gewebes gefärbt werden. Das Zottenepithel ist in so inniger Verbindung mit dem darunter liegenden mütterlichen Gewebe, dass es gewöhnlich an diesem haften bleibt, während das Gallertgewebe in den Härtungsflüssigkeiten einschrumpft und sich vom Epithel zurückzieht. Dieser Umstand bewirkt, dass die Zotten bei oberflächlicher Betrachtung als von Epithel unbekleidet, nur durch in Reihen angebrachte, spindelförmige Zellen (die äussersten Zellen des Gallertgewebes) begrenzt erscheinen. Das zwischen den Zotten befindliche mütterliche Gewebe besteht aus dem stark färbbaren Syncytium, in welchem grosse runde und ovale Kerne besonders hervortreten. In diesem Syncytium bemerkt man ferner Längs- und Querschnitte von Gefässen, nicht besonders zahlreich, mit Wandungen gewöhnlicher Beschaffenheit und mit deutlich sichtbarem Endothel.

Unterhalb der Zotten beginnt, wie gesagt, eine Schicht im Zerfall begriffenen Gewebes; diese Schicht besteht theils aus den Resten der kleinen Drüsen (Krypten), theils aus dem Secrete der cystisch erweiterten Drüsenabschnitte. Man bemerkt in dieser Schicht stark gefärbte Kerne verschiedener Form und Grösse, runde, längliche und geschrumpfte; weiter feinkörnigen Detritus, Riesenzellen mit schwach gefärbten Kernen. Ein besonderer Aufbau der Theile ist in dieser Schicht nicht wahrzunehmen. Ein wenig tiefer beginnen die cystisch erweiterten Drüsenräume; an der Grenze gegen diese sind die Gefässe der Zwischenwände recht stark entwickelt.

Der Zerfall der Drüsen nimmt ein Ende mit der oberflächlichen Drüsenschicht; die cystisch erweiterten Drüsen werden nicht durch die Zotten vernichtet, sondern haben eine andere später zu erwähnende Function zu erfüllen. An die Stelle der zerfallenen Drüsenschicht tritt überall das vorhin beschriebene Syncytium.

Schon in einem Fruchtsacke, dessen Embryo eine Länge von $1\frac{1}{2}^{cm}$ hat, sieht man um beide Pole herum ein Paar schmale dunkler gefärbte Zonen, welche später eigenthümliche lacunäre Blutanhäufungen rings um die Placenta, die sogenannte Sinus laterales, darstellen. An

den Stellen, wo das Chorionepithel den Inhalt dieser Sinus laterales berührt, werden die Epithelzellen bedeutend grösser und länglich und enthalten einen vergrössertern Kern. Sie sind von dem Epithel, welches die Mehrzahl der Zotten bekleidet, die in die eigentliche Schleimhaut eindringen, ganz verschieden. Gleichzeitig sieht man bei Benutzung stärkerer Linsensysteme, dass diese Chorionepithelzellen, welche so zu sagen vom Blute des Sinus lateralis umspült werden, rothe Blutkörper enthalten.

Das Protoplasma der genannten Zellen schliesst nämlich eine Menge runder bräunlicher Bildungen ein, die in ihrer Grösse, Form und Farbe vollständig mit den die Zotten umgebenden Blutkörpern übereinstimmen, so dass ich an der Identität der intracellularen Körper mit rothen Blutkörpern nicht zweifeln kann. Ausser diesen Gebilden bemerkt man auch in den Zellen kleine feine Körnchen, dem feinkörnigen Detritus gleich, den man auch im Sinus lateralis in der Nähe des Chorionepithels beobachtet; es stellt dies wahrscheinlich zerfallene rothe Blutkörper dar. Die rothen Blutkörperchen lagern mehr in den peripheren, gegen das Blut gerichteten Theile der Epithelzellen; gegen die Basis der Zellen zu werden sie seltener.

Auf Grund dieser angeführten Beobachtung muss man annehmen, dass das Chorionepithel dort, wo es mit den Sinus laterales in Berührung kommt, die Eigenschaft erhält, in sich rothe Blutkörperchen aufnehmen zu können und diese wahrscheinlich so zu verändern, dass sie weiterhin als Nahrung dienen; ob sie vom Chorionepithel weiter zum Fötus hin gebracht werden und in welcher Form dieses geschieht, ist nicht zu entscheiden; aber der Befund, dass das Chorionepithel hier eine ganz andere Form hat und mit rothen Blutkörperchen gefüllt ist, spricht zu Gunsten der Annahme, dass dieses Epithel hier eine ganz besondere Rolle zu erfüllen hat.

In diesem Stadium (Embryo von 2^{mm}) nimmt das Epithel nicht nur in dem Theile des Chorion, der den Sinus lateralis bekleidet, das genannte Aussehen an; man findet auch hier und da in der Schicht des zerfallenden Gewebes das Ende der Zotten mit ähnlichem Epithel bekleidet; welches dem übrigen Chorionepithel gänzlich unähnlich ist. Vergl. hierzu auch die Angaben von TAFANI, Sulle condizioni utero-placentali della vita fetale. Reale Istit. super. di Firenze 1886. 8.

In demselben Entwickelungsstadium beginnt auch in den cystisch erweiterten Drüsenräumen eine lebhafte Thätigkeit, welche von den sie bekleidenden Cylinderzellen ausgeht. Die Zellen werden grösser, das Protoplasma entsendet Ausläufer, welche sich mehr und mehr verlängern und schliesslich nur noch durch einen schmalen Faden mit der Zelle im Zusammenhange stehen; dieser Faden reisst und das

runde Protoplasmaklümpchen liegt frei in dem Drüsenraume. Diese Thätigkeit der Drüsenzellen geht in allen Theilen der erweiterten Drüsenräume vor sich; die abgeschnürten Protoplasmaklümpchen werden wahrscheinlich von den Zotten absorbirt; sie dienen also dem Embryo als Nahrung (Uterinmilch). Wenn der Embryo die Grösse von 3^{cm} erreicht hat, sind die Zotten tiefer eingedrungen und strecken sich bis in die cystisch erweiterten Drüsenräume hinein. Das Epithel der erweiterten Drüsen, welches den einwachsenden Zotten entgegen stand, ist jetzt verschwunden, wahrscheinlich in Zerfall übergegangen, und die Enden der Zotten liegen nackt in den Drüsenräumen.

Die Seiten der Zotten sind von einem kleinzelligen Epithel bekleidet; aber ihr Ende, welches sich in die cystisch erweiterten Räume hinein erstreckt, ist mit einem ganz anderen Epithel überzogen. Dieses ähnelt dem, vorhin von den Zotten der Sinus laterales beschriebenen. Es erhebt sich hier die Frage, warum verändert sich das Zottenepithel, so wie es die cystisch erweiterten Drüsenräume erreicht, in derselben Weise wie die den Sinus lateralis auskleidenden Zellen? Die Antwort will ich unter folgender Annahme geben. So lange die Schicht der zerfallenen Drüsen noch in ihrer ganzen Länge nicht von den Zotten durchdrungen ist, besteht das Epithel der letzteren in seiner gewöhnlichen Form und verwendet wahrscheinlich die zerfallenen Gewebsproducte. Nachdem alle diese absorbirt worden sind, müssen die Zotten ihre Nahrung sich anderswo suchen; die Zellenproducte der cystisch erweiterten Drüsen dienen nunmehr dem Fötus als Nahrung durch Vermittelung der Zotten; um diese Nahrung aufnehmen zu können, gewinnt das Epithel wohl auch diese veränderte Form. Man findet auch längs den grossen Epithelzellen in den cystisch erweiterten Drüsenräumen Anhäufungen amorpher und feinkörniger Massen, welche wahrscheinlich von den activen Drüsenzellen herrühren. Die hauptsächliche Ernährung des Fötus scheint somit theils durch die zerfallenden Drüsen, theils durch das Secret der erweiterten Drüsen stattzufinden. Die viel discutirte Frage von dem Dasein und der Bedeutung der sogenannten Uterinmilch ist durch meine Beobachtungen insofern weiter gebracht, als dieselbe beim Hunde wirklich vorkommt und hauptsächlich von den Zellen der erweiterten Drüsen abgesondert wird. Vergl. hierzu die citirte Arbeit Tafani's.

Eigenthümlich ist hier, wie bei der ganzen Placentarentwickelung, dass die mütterlichen Gefässe ziemlich wenig ausgebildet sind und keine erhebliche Rolle bei dem Aufbau der Placenta zu spielen scheinen.

Bei hochschwangeren Thieren ist die Structur der Placenta ziemlich dieselbe, wie in Fruchtsäcken des eben geschilderten Stadiums.

Im Anschlusse an die vorstehende Mittheilung demonstrirte Hr. Waldeyer die Placenta von Inuus nemestrinus, welche, wie bereits Rolleston (Transact. Zool. Soc. Vol. V. 1863) angibt, eine Doppelplacenta ist. Die beiden getrennten einander völlig gleichen Scheiben befinden sich je an der vorderen und hinteren Uteruswand und stehen durch fötale Gefässe in Verbindung; von der einen (hinteren) geht die Nabelschnur aus. Bekanntlich war J. Hunter, Animal oeconomy 1786, der Erste, welcher die Affenplacenta, und zwar eine Doppelplacenta, bei einem Inuus beschrieben hat (Inuus rhesus nach Owens Meinung). Dann gab Rudolphi (Abhandlungen der K. Preuss. Akad. 1828) die Beschreibung der einfachen Placenta von Hapale jachus. Nach den Untersuchungen Breschet's, Turner's Deniker's u. A. — s. bei Turner: on the placentation of apes, London Philos. Transact. P. II 1878 und Ribemont-Dessaignes: Des Placentas multiples dans les grossesses simples, Ann. de Gynécologie, T. 27, 1887, p. 12 — besitzen die geschwänzten Affen der alten Welt vorwiegend Doppelplacenten, während der Mutterkuchen bei den Platyrrhinen und Anthropomorphen gewöhnlich einfach ist.

Ausgegeben am 21. Februar.

1889.

IX.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

14. Februar. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

Hr. Schmidt las über die indogermanischen Benennungen des Auges.

Ausgegeben am 21. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.
X.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

21. Februar. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Weierstrass las den ersten Theil einer Abhandlung, in der das Fundamentaltheorem der Algebra, dass jede Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln besitzt, auf directeste Weise rein arithmetisch begründet wird durch Entwickelung eines Verfahrens, mittels dessen man, ohne den genannten Satz vorauszusetzen, sämmtliche Wurzeln jeder algebraischen Gleichung, deren Coefficienten gegebene Zahlgrössen sind, mit Sicherheit bestimmen kann.

Die Abhandlung wird mit der Fortsetzung in einem der nächsten Sitzungsberichte erscheinen.

2. Hr. Kronecker las: Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Die Mittheilung erfolgt umstehend.

3. Hr. Auwers überreichte einen weiteren Band des Berichts über die deutschen Beobachtungen der Venusdurchgänge von 1874 und 1882 (Band II: die Beobachtungen der Expeditionen von 1874).

4. Durch Erlass des vorgeordneten K. Ministeriums vom 9. d. M. wird der Akademie mitgetheilt, dass Seine Majestät der Kaiser und König aus Allerhöchstseinem Dispositionsfonds einen Zuschuss bis zum Höchstbetrage von 70000 Mark zu den Kosten der Untersuchung des »Meeresplanktons« im atlantischen Ocean bewilligt habe, zu welchem von den HH. Hensen, Brandt und Schütt in Kiel geplanten und im nächsten Sommer unter Leitung des Prof. Hensen

auszuführenden Unternehmen zufolge vorjährigen Beschlusses der Akademie die verfügbaren Mittel der Humboldt-Stiftung verwendet werden sollen.

5. Von der physikalisch-mathematischen Classe sind zur Unterstützung wissenschaftlicher Arbeiten folgende Bewilligungen gemacht: von 600 Mark für Hrn. Dr. Dahl in Kiel zu Untersuchungen über die niedere Süsswasserfauna der Elbmündung; von 2500 Mark für Hrn. Prof. Dr. R. Lepsius in Darmstadt zur Fortsetzung der geologischen Kartirung Attika's; von 700 Mark für Hrn. Dr. Wortmann in Strassburg i. E. für eine Reise nach Neapel zu Untersuchungen an Meeresalgen; ferner von der philosophisch-historischen Classe: von 500 Mark an die G. Reimer'sche Buchhandlung hierselbst für die Ausstattung des Werkes von Dr. Pomtow über Delphi mit Karten und Bildtafeln.

Das correspondirende Mitglied der Akademie Hr. von Dechen ist am 15. Januar in Bonn gestorben.

Die HH. Julius Hann in Wien und Archibald Geikie in London sind zu correspondirenden Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Classe erwählt worden.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 31. Januar 1889, VI.)

XIII.

Im Verfolg der Untersuchungen, über welche ich in der Classensitzung vom 31. Januar d. J. vorgetragen habe, bin ich zu überraschend einfachen Resultaten gelangt, welche den Inhalt meiner verschiedenen, auf die Theorie der elliptischen Functionen bezüglichen Mittheilungen vom 29. October 1857, vom 26. Juni 1862, vom 22. Januar 1863 und vom 30. Juli 1885 in erwünschtester Weise vervollständigen und ergänzen. Es ist namentlich die für die Theorie der singulären Moduln wichtige Aufgabe der Ermittelung des Grenzwerthes von:

$$-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\rho}} \qquad (m,n=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots)$$

für $\rho = 0$, deren vollständige Lösung mir jetzt geglückt ist, während ich mich noch in der Mittheilung vom 30. Juli 1885 damit begnügen musste, den Grenzwerth in dem Falle zu bestimmen, wo a, b, c reelle ganze oder rationale Zahlen sind. In der That habe ich auch erst aus meinen neueren Studien über die eigentliche Bedeutung des Irrationalen[1] die Überzeugung geschöpft, dass die vor vier Jahren bei Behandlung jener Frage noch festgehaltene Unterscheidung sich bei genauerer Untersuchung als unwesentlich erweisen, und vielmehr eine allgemeine und vollständige Bestimmung jenes Grenzwerthes möglich sein müsste; dies hat sich vollkommen bewährt, und ich will im Folgenden die Methode auseinandersetzen, mittels deren mir die Werthbestimmung gelungen ist.

§. 1.

Ich beginne mit der Herleitung der Transformationsformel:

$$(1)\quad \sum_{m,n} e^{-2\pi u(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)+2(m\sigma+n\tau)\pi i} = \frac{1}{u}\sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u}\left(a_0(\tau-n)^2-b_0(\tau+n)(\sigma+m)+c_0(\sigma+m)^2\right)},$$

$$(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots)$$

[1] Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme, art. XXXVIII und flgde. Sitzungsbericht vom 26. Juli 1888. XXXVII.

welche weiterhin gebraucht wird. Sie findet sich für den besonderen Fall, wo a_0, b_0, c_0 reell und beide Grössen σ, τ gleich Null sind, schon im art. V meiner Mittheilung vom 30. Juli 1885 angegeben und ist dort mit ($\mathfrak{J}^0$) bezeichnet.

In der Formel (1) haben $a_0, b_0, c_0, u, \sigma, \tau$ folgende Bedeutung. Erstens sind a_0, b_0, c_0, wie im art. I meiner Mittheilung vom 19. April 1883, durch die Gleichungen:

$$a_0 = -\frac{w_1 w_2 i}{w_1 + w_2}, \quad b_0 = -\frac{(w_1 - w_2) i}{w_1 + w_2}, \quad c_0 = \frac{i}{w_1 + w_2}$$

bestimmt, in denen:

$$w_1 i, \quad w_2 i$$

als complexe Grössen mit negativen reellen Theilen vorausgesetzt sind. Die Grössen w_1 und $-w_2$ sind demnach die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0,$$

deren Discriminante:

$$-(4a_0 c_0 - b_0^2)$$

den Werth -1 hat. Zweitens ist u eine complexe Grösse mit positivem reellen Theil, und es sind drittens σ, τ beliebige reelle oder complexe Grössen.

Hierbei ist zu bemerken, dass die für die Wahl der Grössen a_0, b_0, c_0, u angegebenen Bedingungen zur Convergenz der Reihen in der Formel (1) nöthig und hinreichend sind. Denn, wenn:

$$w_1 = u_1 + v_1 i, \quad w_2 = u_2 + v_2 i$$

gesetzt wird, so müssen gemäss jenen Bedingungen v_1 und v_2 positiv sein. Nun wird der reelle Theil der quadratischen Form mit complexen Coefficienten:

$$a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$$

gleich der quadratischen Form mit reellen Coefficienten:

$$\frac{\big((u_1^2 + v_1^2) v_2 + (u_2^2 + v_2^2) v_1\big) x^2 - 2(u_1 v_2 - u_2 v_1) xy + (v_1 + v_2) y^2}{(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2^2)},$$

und diese ist, wenn v_1 und v_2 positiv sind, eine positive Form.

Zur Herleitung der Formel (1) benutze ich die Relation:

$$(2) \qquad \sum_n e^{-\left(\frac{n^2}{w} - 2n\eta + n\right)\pi i} = (\sqrt{-wi}) \sum_\nu e^{\left(\eta - \frac{1}{2}\nu\right)^2 w\pi i},$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \; \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

welche die Transformation der einfachen ϑ-Reihen enthält, und welche

ich genau in dieser Form im art. III meiner Mittheilung vom 19. April 1883 angegeben habe.

Nimmt man zuvörderst:

$$w = \frac{i}{2c_0 u}, \quad \eta = mb_0 ui + \tau + \tfrac{1}{2},$$

so geht die Reihe auf der linken Seite der Gleichung (1) in folgende über:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2c_0 u}}\right) \sum_{m,\nu} e^{-2a_0 m^2 u\pi + 2m\sigma\pi i - \frac{\pi}{2c_0 u}\left(mb_0 ui + \tau + \frac{1}{2}(1-\nu)\right)^2},$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \ \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

welche, wenn darin $\frac{1}{2}(1-\nu) = n$ gesetzt und von der Relation:

$$4a_0c_0 - b_0^2 = 1$$

Gebrauch gemacht wird, auch in der Form:

$$(3) \qquad \left(\sqrt{\frac{1}{2c_0 u}}\right) \sum_{m,n} e^{-\frac{m^2 u\pi}{2c_0} + \left(2\sigma - \frac{b_0}{c_0}(\tau + n)\right) m\pi i - \frac{\pi}{2c_0 u}(\tau + n)^2}$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)$$

dargestellt werden kann.

Nimmt man ferner in der Relation:

$$(2^*) \qquad \sum_m e^{-\left(\frac{m^2}{w} + 2m\eta + m\right)\pi i} = (\sqrt{-wi}) \sum_m e^{w\pi i\left(\eta + m - \frac{1}{2}\right)^2},$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

welche mit der obigen Gleichung (2), abgesehen von der Bezeichnung, völlig übereinstimmt:

$$w = \frac{2c_0 i}{u}, \quad \eta = -\frac{b_0}{2c_0}(\tau + n) + \sigma + \tfrac{1}{2},$$

so geht die Reihe (3) in die folgende über:

$$\frac{1}{u} \sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u}\left(a_0(\tau+n)^2 - b_0(\tau+n)(\sigma+m) + c_0(\sigma+m)^2\right)},$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

welche die rechte Seite der Transformationsformel (1) bildet; die beabsichtigte Herleitung dieser Formel ist also in der That, und zwar nur durch zweimalige Anwendung der Relation (2), erfolgt.

Um die Transformationsformel (1) in derjenigen Gestalt zu haben, in welcher sie im Folgenden gebraucht wird, setze ich:

$$u = -\frac{\log z}{2\pi}$$

und sondere auf jeder der beiden Seiten der Gleichung (1) dasjenige

Glied ab, für welches $m=n=0$ ist. Ich bezeichne ferner die beiden zu einander »reciproken« quadratischen Formen:

$$a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2, \quad c_0x'^2 - b_0x'y' + a_0y'^2$$

beziehungsweise mit:

$$f(x, y), \quad f'(x', y').$$

Alsdann erscheint die Formel (1) in folgender Gestalt:

$$(4) \quad \sum_{m,n} z^{f(m,n)} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} = -1 - \frac{2\pi}{\log z} e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma,\tau)} - \frac{2\pi}{\log z} \sum_{m,n} e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma+m, \tau+n)};$$

die Summationen sind hier auf alle ganzen Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ mit alleiniger Ausnahme des Werthsystems $m=0$, $n=0$ zu erstrecken, und z bedeutet eine Grösse, deren absoluter Werth kleiner als Eins ist.

§. 2.

Nunmehr soll der Grenzwerth ermittelt werden, welchen der zur Abkürzung mit:

$$\mathrm{T}(\rho, \sigma, \tau)$$

zu bezeichnende Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{f(m,n)} + \log f'(\sigma,\tau) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{1}{(f(m,n))^{1+\rho}} + \frac{1}{\rho}$$

annimmt, wenn die Grössen ρ, σ, τ sich der Null nähern. Dabei werden ρ, σ, τ als reell vorausgesetzt, und ρ überdies als positiv.

Zu dem angegebenen Zwecke führe ich zuvörderst für die beiden zweifach unendlichen Reihen, in welchen die Summationen, wie durchweg im Folgenden auf alle ganzen Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ mit Ausschluss des Werthsystems $m=0, n=0$ zu erstrecken sind, in Dirichlet'scher Weise Integral-Ausdrücke ein, und zwar mittels der Gleichungen:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{f(m,n)} = \int_0^1 \sum_{m,n} z^{f(m,n)} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} d\log z,$$

$$\Gamma(1+\rho) \sum_{m,n} \frac{1}{(f(m,n))^{1+\rho}} = \int_0^1 \sum_{m,n} z^{f(m,n)} \left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho} d\log z.$$

Alsdann zerlege ich jedes dieser beiden Integrale in zwei, von denen das eine sich nur von 0 bis zu irgend einem echten Bruche $\frac{1}{s}$, das

andere von $\frac{1}{s}$ bis 1 erstreckt. Endlich wende ich auf die beiden Reihen:

$$\sum_{m,n} z^{f(m,n)} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}, \quad \sum_{m,n} z^{f(m,n)},$$

welche unter den von $\frac{1}{s}$ bis 1 erstreckten Integralen vorkommen, die obige mit (4) bezeichnete Transformationsformel an.

Nach Ausführung der angegebenen Operationen erscheint die Function $\mathrm{T}(\rho, \sigma, \tau)$ als ein Aggregat folgender sieben Ausdrücke:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{s}} \sum_{m,n} z^{f(m,n)} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}\, d\log z,$$

$$-\frac{1}{2\pi\Gamma(1+\rho)}\int_0^{\frac{1}{s}} \sum_{m,n} z^{f(m,n)} \left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho} d\log z,$$

$$\int_1^{\frac{1}{s}} \sum_{m,n} e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma+m,\tau+n)} \frac{d\log z}{\log z},$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_1^{\frac{1}{s}} \sum_{m,n} e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(m,n)} \left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho} \frac{d\log z}{\log z},$$

$$\int_1^{\frac{1}{s}} \left[\frac{1}{2\pi} + \frac{e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma,\tau)}}{\log z}\right] d\log z,$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_1^{\frac{1}{s}} \left[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\log z}\right] \left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho} d\log z,$$

$$\log f'(\sigma,\tau) + \frac{1}{\rho}.$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{s}} \sum_{m,n} z^{f(m,n)} \left(e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} - 1\right) d\log z,$$

$$P_1 = \frac{1}{2\pi\Gamma(1+\rho)}\int_0^{\frac{1}{s}} \sum_{m,n} z^{f(m,n)} \left(\Gamma(1+\rho) - \left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho}\right) d\log z,$$

$$Q = \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \sum_{m,n} \left[e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f(\sigma+m,\tau+n)} - e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f(m,n)} \right] \frac{d\log z}{\log z},$$

$$Q_1 = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \sum_{m,n} e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f(m,n)} \left(\Gamma(1+\rho) - \left(\log \frac{1}{z}\right)^{\rho} \right) \frac{d\log z}{\log z},$$

$$R = \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \left[\frac{1}{2\pi} + \frac{e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma,\tau)}}{\log z} \right] d\log z,$$

$$R_1 = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \left[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\log z} \right] \left(\log \frac{1}{z} \right)^{\rho} d\log z,$$

so wird:

$$\mathrm{T}(\rho, \sigma, \tau) = P + P_1 + Q + Q_1 + R - R_1 + \log f'(\sigma, \tau) + \frac{1}{\rho}.$$

§. 3.

Der reelle Theil von $f(m, n)$ ist, wie schon im §. 1 hervorgehoben worden, für alle Werthsysteme m, n, über welche sich die Summationen erstrecken, positiv; man kann also eine reelle positive Grösse $\mathfrak{p}$ so wählen, dass auch die Differenz:

$$-\mathfrak{p} + f(m, n)$$

in ihrem reellen Theile positiv ist. Dann kann, da:

$$z^{f(m,n)} d\log z = \frac{1}{\mathfrak{p}} z^{-\mathfrak{p}+f(m,n)} dz^{\mathfrak{p}}$$

ist, der mit P bezeichnete Integralausdruck in folgender Form dargestellt werden:

$$\frac{1}{2\pi\mathfrak{p}} \int_0^{\epsilon} \sum_{m,n} [e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} - 1] z^{-\mathfrak{p}+f(m,n)} dz^{\mathfrak{p}}.$$

Hierin kann ferner, da $f(m, n) = f(-m, -n)$ ist, der Exponentialausdruck $e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}$ durch $\cos 2(m\sigma + n\tau)\pi$ ersetzt und die Differenz:

$$\cos 2(m\sigma + n\tau)\pi - 1$$

auf die Form:

$$\sigma\phi(m, n, \sigma, \tau) + \tau\psi(m, n, \sigma, \tau)$$

gebracht werden, in welcher:

$$\phi = \frac{-2}{\sigma} \sin m\sigma\pi \cos n\tau\pi \sin(m\sigma + n\tau)\pi\,,$$

$$\psi = \frac{-2}{\tau} \cos m\sigma\pi \sin n\tau\pi \sin(m\sigma + n\tau)\pi$$

ist, so dass ϕ und ψ für alle Werthe von σ und τ endlich bleiben. Der mit P bezeichnete Ausdruck wird hiernach gleich:

$$\frac{\sigma}{2\pi\mathfrak{p}}\int_0^{\frac{1}{e}} \sum_{m,n} \phi(m,n,\sigma,\tau) z^{-\mathfrak{p}+f(m,n)} dz^{\mathfrak{p}} + \frac{\tau}{2\pi\mathfrak{p}}\int_0^{\frac{1}{e}} \sum_{m,n} \psi(m,n,\sigma,\tau) z^{-\mathfrak{p}+f(m,n)} dz^{\mathfrak{p}},$$

und da offenbar sowohl der mit σ als auch der mit τ multiplicirte Integralausdruck für alle Werthe von σ und τ endlich bleibt, so nähert sich der eine der beiden Theile, in welche P hier zerlegt ist, mit absolut abnehmendem σ, der andere mit absolut abnehmendem τ dem Grenzwerthe Null, und es ist daher:

$$(5) \qquad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} P = 0\,.$$

Um den Grenzwerth von P_1 für $\rho = 0$ zu ermitteln, benutze ich die Gleichungen:

$$\Gamma(1+\rho) = 1 + \rho\,\Gamma'(1+\delta\rho)\,, \quad \left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho} = 1 + \rho\left(\log\frac{1}{z}\right)^{\delta'_z\rho},$$

in welchen Γ' die Ableitung von Γ bedeutet und δ, δ'_z positive echte Brüche sind. Dann wird P_1 gleich:

$$\frac{\rho\Gamma'(1+\delta\rho)}{2\pi\Gamma(1+\rho)}\int_0^{\frac{1}{e}} \sum_{m,n} z^{-\mathfrak{p}+f(m,n)} dz^{\mathfrak{p}} - \frac{\rho}{2\pi\Gamma(1+\rho)}\int_0^{\frac{1}{e}} \sum_{m,n} z^{-\mathfrak{p}+f(m,n)} \left(\log\frac{1}{z}\right)^{\delta'_z\rho} dz^{\mathfrak{p}},$$

und da jeder der beiden mit ρ multiplicirten Theile für beliebig kleine positive Werthe von ρ offenbar endlich bleibt, so ergiebt sich das Resultat:

$$(6) \qquad \lim_{\rho=0} P_1 = 0\,.$$

Zur Bestimmung des Grenzwerthes, welchen Q für $\sigma = 0, \tau = 0$ annimmt, mache ich von der Gleichung:

$$F(x+\sigma, y+\tau) - F(x,y) = \sigma F_1(x+\delta_1\sigma, y+\varepsilon_1\tau) + \tau F_2(x+\delta_2\sigma, y+\varepsilon_2\tau)$$

Gebrauch, in welcher F_1, F_2 die beziehungsweise nach x und y genommenen Ableitungen von $F(x,y)$ und $\delta_1, \varepsilon_1, \delta_2, \varepsilon_2$ positive echte Brüche bedeuten. Benutzt man nämlich diese Darstellung der Differenz $F(x+\sigma, y+\tau) - F(x,y)$ für die der Differenz:

$$e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma+m,\tau+n)} - e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(m,n)},$$

welche unter dem Integral Q vorkommt, so wird Q gleich dem Aggregat der beiden Ausdrücke:

$$-\sigma\int_0^{\frac{1}{e}}\sum_{m,n}\Big(2c_0(m+\delta_1\sigma)+b_0(n+\varepsilon_1\tau)\Big)e^{\frac{4\pi^2}{\log z}f'(m+\delta_1\sigma,\,n+\varepsilon_1\tau)}\,d\frac{4\pi^2}{\log z},$$

$$-\tau\int_0^{\frac{1}{e}}\sum_{m,n}\Big(2a_0(n+\varepsilon_2\tau)+b_0(m+\delta_2\sigma)\Big)e^{\frac{4\pi^2}{\log z}f'(m+\delta_2\sigma,\,n+\varepsilon_2\tau)}\,d\frac{4\pi^2}{\log z}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass $\delta_1, \varepsilon_1, \delta_2, \varepsilon_2$, die als Bezeichnungen positiver echter Brüche eingeführt worden sind, hier Functionen von m, n, σ, τ, z bezeichnen, deren Werthe stets in dem Intervalle von o bis 1 bleiben.

Bedeutet nun $\mathfrak{p}'$ eine positive Grösse, für welche der reelle Theil der Differenz:

$$-\mathfrak{p}'+f'(m+\sigma,\,n+\tau)$$

bei allen in Q vorkommenden Werthsystemen m, n, und wenn σ, τ in beliebig klein anzunehmenden, die Null einschliessenden Grenzen bleiben, positive Werthe hat, so lassen sich die beiden Ausdrücke in folgender Form darstellen:

$$-\frac{\sigma}{\mathfrak{p}'}\int_0^{\frac{1}{e}}\sum_{m,n}\Big(2c_0(m+\delta_1\sigma)+b_0(n+\varepsilon_1\tau)\Big)e^{\frac{4\pi^2}{\log z}(-\mathfrak{p}'+f'(m+\delta_1\sigma,\,n+\varepsilon_1\tau))}\,de^{\frac{4\pi^2\mathfrak{p}'}{\log z}},$$

$$-\frac{\tau}{\mathfrak{p}'}\int_0^{\frac{1}{e}}\sum_{m,n}\Big(2a_0(n+\varepsilon_2\tau)+b_0(m+\delta_2\sigma)\Big)e^{\frac{4\pi^2}{\log z}(-\mathfrak{p}'+f'(m+\delta_2\sigma,\,n+\varepsilon_2\tau))}\,de^{\frac{4\pi^2\mathfrak{p}'}{\log z}},$$

und es zeigt sich hierbei, dass sowohl der mit σ als auch der mit τ multiplicirte Ausdruck für beliebig kleine Werthe von σ und τ endlich bleibt. Es wird hiernach:

(7) $$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} Q = 0.$$

Um endlich noch die Gleichung:

(8) $$\lim_{\rho=0} Q_1 = 0$$

in Evidenz zu setzen, braucht man nur, wie oben, die Differenz:

$$\Gamma(1+\rho)-\left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho},$$

welche unter dem Integral von Q_1 vorkommt, in der Form:

$$\rho\Gamma'(1+\delta\rho) - \rho\left(\log\frac{1}{z}\right)^{\delta'_{z\rho}}$$

und demgemäss Q_1 als Aggregat der folgenden beiden Ausdrücke darzustellen:

$$\frac{\rho\Gamma'(1+\delta\rho)}{4\pi^2\mathfrak{p}'\Gamma(1+\rho)}\int\limits_{\frac{1}{s}}^{1}\sum_{m,n} e^{\frac{4\pi^2}{\log z}(-\mathfrak{p}'+f'(m,n))}\log z\, de^{\frac{4\pi^2\mathfrak{p}'}{\log z}},$$

$$\frac{\rho}{4\pi^2\mathfrak{p}'\Gamma(1+\rho)}\int\limits_{\frac{1}{s}}^{1}\sum_{m,n} e^{\frac{4\pi^2}{\log z}(-\mathfrak{p}'+f'(m,n))}\left(\log\frac{1}{z}\right)^{1+\rho} de^{\frac{4\pi^2\mathfrak{p}'}{\log z}},$$

denn in beiden Ausdrücken ist ρ mit Functionen von ρ multiplicirt, welche offenbar für $\rho = 0$ endliche Werthe haben.

§. 4.

Nach den im vorigen Paragraphen erlangten, mit (5), (6), (7), (8) bezeichneten Grenzwerth-Bestimmungen für P, P_1, Q, Q_1 ist der Grenzwerth, welchen:

$$P + P_1 + Q + Q_1$$

für $\rho = 0$, $\sigma = 0$, $\tau = 0$ annimmt, gleich Null. Da nun gemäss der Formel am Schlusse von §. 2:

$$T(\rho,\sigma,\tau) = P + P_1 + Q + Q_1 + R - R_1 + \log f'(\sigma,\tau) + \frac{1}{\rho}$$

war, so ist:

$$\lim_{\substack{\rho=0\\ \sigma=0\\ \tau=0}} T(\rho,\sigma,\tau) = \lim_{\substack{\rho=0\\ \sigma=0\\ \tau=0}}\left(R - R_1 + \frac{1}{\rho} + \log f'(\sigma,\tau)\right). \tag{9}$$

Nun war im §. 2:

$$R = \int\limits_{1}^{\frac{1}{s}}\left[\frac{1}{2\pi} + \frac{e^{\frac{4\pi^2}{\log z}f'(\sigma,\tau)}}{\log z}\right] d\log z,$$

$$R_1 = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int\limits_{1}^{\frac{1}{s}}\left[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\log z}\right]\left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho} d\log z$$

gesetzt worden; es ist daher:

$$R = \frac{-1}{2\pi}\log s + \int\limits_{1}^{\frac{1}{s}} e^{\frac{4\pi^2}{\log z}f'(\sigma,\tau)}\, d\log\log\frac{1}{z},$$

$$R_1 = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\left[\frac{-1}{2\pi(1+\rho)}(\log s)^{1+\rho} + \frac{1}{\rho}(\log s)^{\rho}\right],$$

also:

$$\lim_{\rho=0}\left(R - R_1 + \frac{1}{\rho}\right) = -\log\log s + \Gamma'(1) + \int_1^{\frac{1}{s}} e^{\frac{4\pi^2}{\log z}f'(\sigma,\tau)} d\log\log\frac{1}{z}.$$

Setzt man in dem letzteren Integral:

$$z = e^{\frac{-\log s}{x}},$$

so geht dasselbe in folgendes über:

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2 f'(\sigma,\tau)}{\log s}x} d\log x,$$

welches nichts Anderes als der negativ genommene Integrallogarithmus von $e^{-\frac{4\pi^2 f'(\sigma,\tau)}{\log s}}$ und also in üblicher Weise mit:

$$-\text{li.}\left(e^{-\frac{4\pi^2 f'(\sigma,\tau)}{\log s}}\right)$$

zu bezeichnen ist. Hiernach wird:

$$\lim_{\rho=0}\left(R - R_1 + \frac{1}{\rho}\right) = -\log\log s + \Gamma'(1) - \text{li.}\left(e^{-\frac{4\pi^2 f'(\sigma,\tau)}{\log s}}\right)$$

und folglich:

$$(10)\quad \lim_{\substack{\rho=0\\ \sigma=0\\ \tau=0}} \mathrm{T}(\rho,\sigma,\tau) = \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\left[\log f'(\sigma,\tau) - \log\log s + \Gamma'(1) - \text{li.}\left(e^{-\frac{4\pi^2 f'(\sigma,\tau)}{\log s}}\right)\right].$$

Es ist also nur noch der Grenzwerth zu bestimmen, den der Integrallogarithmus für $\sigma = 0$, $\tau = 0$ annimmt.

§. 5.

Bedeutet $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}i$ eine complexe Grösse, deren reeller Theil $\mathfrak{p}$ positiv ist, so besteht bekanntlich die Gleichung:

$$(11)\qquad \log(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}i) = \int_0^{\infty}(e^{-z} - e^{-(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}i)z})\, d\log z.$$

Dabei ist auf der linken Seite derjenige Werth des Logarithmus zu nehmen, dessen absoluter Betrag möglichst klein ist. Ferner ist gemäss

der Formel (77) in GAUSS' Abhandlung über die hypergeometrische Reihe:[1]

$$-\psi(0) = -\Gamma'(1) = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right) e^{-z}\, dz\,,$$

und es kann daher $\psi(0)$ oder $\Gamma'(1)$ als Aggregat von Integralen in folgender Weise dargestellt werden:

$$\int\limits_0^1 (e^{-z}-1)\, d\log z + \int\limits_1^\infty e^{-z} d\log z - \int\limits_1^\infty d\log(1-e^{-z}) - \int\limits_0^1 d\log\frac{1-e^{-z}}{z}\,.$$

Da aber die beiden letzten Theile dieses Ausdrucks sich gegenseitig aufheben, so wird:

$$(12) \qquad \Gamma'(1) = \int\limits_0^1 (e^{-z}-1)\, d\log z + \int\limits_1^\infty e^{-z} d\log z\,.$$

Benutzt man nun die beiden mit (11) und (12) bezeichneten Darstellungen von $\log(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}i)$ und $\Gamma'(1)$ sowie die Definitionsgleichung:

$$\text{li.}\,(e^{-(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}i)}) = -\int\limits_1^\infty e^{-(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}i)z} d\log z\,,$$

so erhält man das (übrigens bekannte) Resultat:

$$(13) \qquad -\text{li.}\,(e^{-(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}i)}) = \Gamma'(1) - \log(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}i) + \int\limits_0^1 (1-e^{-(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}i)z})\, d\log z\,,$$

mit Hülfe dessen der Ausdruck unter dem Zeichen »lim« auf der rechten Seite der Gleichung (10) in folgenden übergeht:

$$2\Gamma'(1) - 2\log 2\pi + \int\limits_0^1 \left(1 - e^{-\frac{4\pi^2 f^0(\sigma,\tau)}{\log z}}\right) d\log z\,.$$

Da nun offenbar der Grenzwerth des Integrals:

$$\int\limits_0^1 \left(1 - e^{-\frac{4\pi^2 f^0(\sigma,\tau)}{\log z}}\right) d\log z\,,$$

für $\sigma = 0$, $\tau = 0$, gleich *Null* ist, so ergiebt sich schliesslich für den gesuchten Grenzwerth von $T(\rho, \sigma, \tau)$ die einfache Bestimmung:

$$(14) \qquad \lim_{\substack{\rho=0\\ \sigma=0\\ \tau=0}} T(\rho,\sigma,\tau) = 2\Gamma'(1) - 2\log 2\pi\,.$$

---

[1] GAUSS' Werke, Bd. III, art. 35, S. 159.

§. 6.

Aus der Gleichung (14) folgt gemäss der Bedeutung von $T(\rho, \sigma, \tau)$, dass der Grenzwerth, welchem sich der Ausdruck:

$$-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(f(m,n))^{1+\rho}}$$

für $\rho = 0$ nähert, gleich:

$$2\log 2\pi - 2\Gamma'(1) + \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\left\{\log f(\sigma,\tau)+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{f(m,n)}\right\}$$

ist. Wendet man auf dieses Resultat die mit (𝔄) bezeichnete »Hauptgleichung« an, welche ich im Art. I meiner Mittheilung vom 19. April 1883 hergeleitet habe, so ergiebt sich die Gleichung:

$$(15)\quad \lim_{\rho=0}\left(-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(f(m,n))^{1+\rho}}\right) = -2\Gamma'(1) - \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\log\frac{\mathrm{A}(\sigma,\tau,w_1,w_2)}{4\pi^2 f(\sigma,\tau)}.$$

Nun ist:

$$\mathrm{A}(\sigma,\tau,w_1,w_2) = (4\pi^2)^{\frac{1}{3}}\, e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\frac{\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)}{(\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2))^{\frac{1}{3}}}.$$

Bei Anwendung der Gleichung:

$$c_0(\sigma+\tau w_1)(\sigma-\tau w_2) = c_0\sigma^2 - b_0\sigma\tau + a_0\tau^2$$

wird also:

$$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{\mathrm{A}(\sigma,\tau,w_1,w_2)}{4\pi^2(c_0\sigma^2-b_0\sigma\tau+a_0\tau^2)} = \frac{1}{c_0}\left(\frac{\vartheta'(0,w_1)}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\vartheta'(0,w_2)}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

und folglich:

$$(16)\quad \lim_{\rho=0}\left(-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(f(m,n))^{1+\rho}}\right) = -2\Gamma'(1) - \log\frac{1}{c_0}\left(\frac{\vartheta'(0,w_1)}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\vartheta'(0,w_2)}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Führt man an Stelle der Coefficienten a_0, b_0, c_0 der quadratischen Form:

$$f(x,y) = a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2$$

die Quotienten:

$$\frac{a}{\sqrt{4ac-b^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}},\quad \frac{c}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

und an Stelle der ϑ-Reihen mittels der Gleichung:

$$\vartheta'(0,w) = 2\pi e^{\frac{1}{4}w\pi i}\,\Pi(1-e^{2nw\pi i})^3$$

die unendlichen Producte ein, so gelangt man zu dem **Hauptresultat**, dass der Grenzwerth von:

$$-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\rho}$$

für $\rho = 0$, d. h. also:

der Coefficient des von ρ unabhängigen Gliedes in der Entwickelung von:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\rho}$$

nach steigenden Potenzen von ρ

durch den Ausdruck:

$$(17)\quad -2\Gamma'(1)+\log\frac{c}{\sqrt{4ac-b^2}}+\frac{\pi\sqrt{4ac-b^2}}{6c}-2\log\prod_n(1-e^{2nw_1\pi i})(1-e^{2nw_2\pi i})$$

$$(n=1,2,3,\ldots)$$

dargestellt wird, in welchem w_1 und $-w_2$ als die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a+bw+cw^2=0$$

definirt sind, und dessen merkwürdige Eigenschaft,

eine Invariante der im GAUSS'schen Sinne einander aequivalenten quadratischen Formen (a, b, c) zu sein,

durch seine hier dargelegte Bedeutung vollkommen in Evidenz tritt. Dabei sind

$$a,\ b,\ c$$

irgend welche reelle oder complexe Grössen, welche nur der Bedingung genügen müssen, dass der reelle Theil von $ax^2+bxy+cy^2$ eine positive quadratische Form ist.

(Fortsetzung folgt.)

Ausgegeben am 28. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.
XI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

28. Februar. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Tobler las vermischte Beiträge zur französischen Grammatik.

2. Hr. Schmoller überreichte im Namen des Verfassers: Das Münzwesen der Mark Brandenburg von den ältesten Zeiten bis zum Anfange der Regierung der Hohenzollern von Emil Bahrfeldt. Berlin 1889.

Ausgegeben am 14. März.

1889.

XII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

28. Februar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

1. Hr. Ewald las über südliche Turongebilde. — Die Mittheilung erscheint später.

2. Hr. von Helmholtz legte eine zweite Abtheilung der Arbeit der HH. Proff. H. Kayser und C. Runge in Hannover über die Spectren der Elemente vor: über die im galvanischen Lichtbogen auftretenden Bandenspectra der Kohle, welche in den Abhandlungen erscheinen wird.

3. Hr. Schulze überreichte eine zweite Abtheilung des Berichts des Hrn. Prof. Chun in Königsberg über seine mit Unterstützung der Akademie ausgeführte Reise nach den Canarischen Inseln: Beobachtungen über die pelagische Tiefen- und Oberflächenfauna des östlichen Atlantischen Oceans. — Diese Mittheilung erscheint in einem der nächsten Stücke dieser Berichte.

Ausgegeben am 14. März.

1889.
XIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

7. März. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Wattenbach las über die mit Gold auf Purpur geschriebene Evangelienhandschrift der Hamilton'schen Bibliothek.

Die Mittheilung erfolgt umstehend.

2. Hr. Schulze überreichte eine Abhandlung über die Bezeichnung der Spongiennadeln von Franz Eilhard Schulze und R. von Lendenfeld.

Erscheint in den Abhandlungen.

3. Hr. Brunner legte vor als Geschenk des Verfassers die Ausgabe des Liber diurnus romanorum Pontificum ex unico codice Vaticano von Th. von Sickel.

4. Die Akademie beschloss an ihr Ehrenmitglied den Generalfeldmarschall Grafen von Moltke Exc. zu seinem 70 jährigen Dienstjubiläum die S. 157 folgende Adresse zu richten.

5. Von der physikalisch-mathematischen Classe ist dem Dr. Franz Stuhlmann, Assistenten am zoologischen Institut in Würzburg, zur Zeit in Sansibar, zur Fortsetzung der faunistischen Erforschung von Sansibar eine weitere Beihülfe von 1000 Mark, und von der philosophisch-historischen Classe dem Dr. Gustav Weigand in Leipzig

zu seinen linguistisch-ethnographischen Forschungen im Gebiete der Zinzaren eine Unterstützung von 1200 Mark bewilligt worden.

6. Hr. Prof. Heinrich Hertz zur Zeit am Polytechnicum in Karlsruhe und Hr. Prof. Adolf Wüllner an der technischen Hochschule in Aachen sind zu correspondirenden Mitgliedern der Königlichen Akademie im Fache der Physik erwählt.

Über die mit Gold auf Purpur geschriebene Evangelienhandschrift der Hamilton'schen Bibliothek.

Von W. Wattenbach.

Aus der Bibliothek des Herzogs von Hamilton wurde im Jahre 1882 eine grosse Anzahl vorzüglich schöner und bedeutender Handschriften für die hiesigen Sammlungen erworben; ein Theil derselben, welcher für England eine besondere Wichtigkeit hatte, sollte vom Britischen Museum übernommen werden. Der Direction desselben gelang es jedoch nicht, die dazu erforderliche Geldbewilligung zu erhalten, und in Folge davon ist jetzt eine Anzahl von Handschriften dieser Sammlung dem Buchhändler Trübner überlassen, welcher sie zum Verkauf ausbietet. Leider gehört dazu auch die mit Gold auf Purpurpergament geschriebene Evangelienhandschrift, über welche ich schon gleich nach der Erwerbung derselben kurz berichtet habe,[1] und deren eingehendere Behandlung ich beabsichtigte. Als ich jedoch diesen Vorsatz ausführen wollte, war die Handschrift schon fortgegeben, und nur der sehr gütigen Vermittelung des Generaldirectors Hrn. Wilmanns und der Freundlichkeit des Hrn. Trübner verdanke ich es, dass ich sie wenigstens doch noch einmal durchsehen, und zu dem für den jetzigen Besitzer sehr schön in Gold und Farben ausgeführten Facsimile ein zweites von der anderen Schreiberhand mir verschaffen konnte.

Bevor ich aber auf die Beschaffenheit dieser Handschrift näher eingehe, erlaube ich mir, etwas weiter ausholend, einige allgemeine Bemerkungen über die Majuskelhandschriften überhaupt voraus zu schicken.

Diese bieten nämlich, vorzüglich in Hinsicht auf die Abschätzung des Alters, ganz besondere Schwierigkeiten dar. Wir nennen Majuskelschrift diejenige, in welcher die Buchstaben in den Formen des einmal fertig ausgebildeten Alphabets, mehr oder weniger genau, gebildet werden, ursprünglich von ganz gleicher Grösse und unter

---

[1] Neues Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde VIII, S. 343—346.

einander nicht verbunden. Während der Blüthezeit der griechischen Litteratur kennen wir sie nur aus Inschriften; in regelmässiger Gestalt als Steinschriften, in flüchtigerer als Inschriften auf Vasen und anderen Gegenständen. Es findet sich jedoch kein Unterschied, welcher uns berechtigen könnte, den Gebrauch verschiedener eigenthümlich ausgebildeter Schriftarten zu gleicher Zeit anzunehmen. Wie um diese Zeit die massenhaft schon vorhandene Bücherschrift auf Wachstafeln und Papyrus aussah, ob man auch im gewöhnlichen Leben an dieser wenig bequemen Schriftart festhielt, das wissen wir nicht; doch spricht alle Wahrscheinlichkeit dafür, dass es nur den Unterschied sorgfältiger und flüchtiger Schrift gegeben hat. Erst aus alexandrinischer Zeit liegen uns Schriften auf Papyrus vor. Hier nun begegnet uns als das älteste Werk, dessen Zeit sich mit Sicherheit bestimmen lässt, die Τέχνη des Eudoxos; auf der Rückseite der Rolle sind Schriftstücke aus den Jahren 165 und 164 a. C. eingetragen, während Eudoxos selbst um 350 a. C. gestorben ist. Die Rolle war aber schon beschädigt und am Anfang verstümmelt, als ihre Rückseite für jene Schriften benutzt wurde.[1]

Man hat früher wohl geglaubt, und namentlich Pertz hat für lateinische Schrift an diesem Satze festgehalten, dass ein allmähliches Entarten von ursprünglicher Normalform anzunehmen sei, und also die grössere oder geringere Reinheit und Regelmässigkeit der Schrift einen Maassstab für das Alter gewähre. Allein dieser Satz, welcher innerhalb gewisser Grenzen allerdings seine Berechtigung hat, ist doch als allgemeine Regel ganz unhaltbar, und ihm widerspricht auch gänzlich jene Eudoxosrolle. Die Form der Buchstaben hat hier durchaus nicht die Regelmässigkeit anderer, viel jüngerer Schriftstücke, und namentlich findet sich hier eine fast ganz durchgeführte Worttrennung, nur mit derselben Beschränkung, welche auch den Minuskelhandschriften eigen ist, dass nämlich Praepositionen, Conjunctionen und andere kleine und unselbständige Wörter mit den zugehörigen grösseren unmittelbar verbunden werden. Ebenso finden sich hier auch Interpunctionen, und mindestens die grösseren Satzglieder werden durch Zwischenräume und Zeichen kenntlich gemacht.

Es ist ja auch in der That so natürlich, die Wörter zu trennen und die Sätze zu scheiden, es erleichtert so sehr das Lesen und schützt vor vielen, sonst unvermeidlichen Gefahren des Missverständnisses, dass kaum anzunehmen ist, es sei ursprünglich anders gewesen. Auch finden wir dasselbe Verfahren in den wenig jüngeren geschäftlichen Actenstücken, welche wir besitzen.

---

[1] Facsimile der ganzen Rolle von Th. Devéria in: Notices et Extraits des Manuscrits XVIII, 2 (1865) Atlas pl. I—X.

Sehen wir dagegen in den mehr kalligraphisch geschriebenen Bücherrollen und überhaupt viele Jahrhunderte hindurch in der Majuskelschrift durchgängig die vollständigste Abwesenheit aller Worttrennung, nicht selten auch den Mangel irgend einer Andeutung der Trennung bei dem Beginn eines neuen Satzes, so scheint mir die Annahme geboten, dass diese Art der Kalligraphie nicht etwas ursprüngliches, nicht unmittelbar aus dem gewöhnlichen Gebrauch hervorgegangen ist, sondern vielmehr ein technisches Kunstproduct, entstanden aus dem Streben nach einem äusserlich schönen Eindruck vollkommener Gleichförmigkeit, und unter dem Eindruck der Lapidarschrift, welche man nachahmte; ein Product, welches, einmal eingeführt, sich sehr lange behauptet hat, und vermuthlich auch als Vorbild auf die lateinische Schreibart einwirkte.

Wir finden nämlich bei der lateinischen Schrift ganz dieselbe Entwickelung, wie bei der griechischen, und eben deshalb habe ich um der Analogie willen mit der letzteren begonnen, obgleich ich diese hier nicht weiter verfolgen will. Auch in der lateinischen Schrift sind die ältesten uns erhaltenen Proben keineswegs kalligraphisch ausgebildet und der Normalform sich nähernd.

Die einzige in Herculaneum entdeckte Bibliothek enthält bekanntlich nur griechische Schriftrollen; es bedurfte besonders glücklicher Umstände, damit sich diese, wenn auch in verkohltem Zustande, doch überhaupt erhalten konnten. An ganz anderer Stelle, in einiger Entfernung von jener Fundstelle, fand sich ein Haufen lateinischer Rollen, vermuthlich ein aus der Bibliothek entnommener Rollenkasten; sie sind aber in noch viel schlechterem Zustand, als die griechischen, und nur geringe lesbare Fragmente hat man daraus gewinnen können. Die einzelnen Schichten der Rollen haften so fest an einander, dass sie wie die griechischen abzuwickeln nicht möglich ist, und unvermeidlich die Ablösung der obersten Schicht Löcher in der unteren hervorbringt. Man vermuthet, dass ausser der Hitze auch Flüssigkeiten auf die Rollen eingewirkt haben, und zwar auf die lateinischen andere, als auf die entfernt davon gefundenen griechischen. Doch ist nach DAVY auch die ursprüngliche Beschaffenheit verschieden, der Stoff stärker und daher auch die Rollen dicker, die Buchstaben grösser.

Am meisten hat sich gewinnen lassen aus dem epischen Gedicht über die Schlacht bei Actium[1], und hier sind die Worte durch Punkte getrennt. Wären nun auch diese Punkte, was ich früher, wohl mit

[1] Volumina Herculan. II. ZANGEMEISTER et WATTENBACH, Exempl. tab. III. W. SCOTT, Fragmenta Herculan. (1886) nach HAYTER's Kupfertafeln, als Augusti res gestae von Varius.

Unrecht, für möglich hielt, erst vom Nachzeichner zugesetzt, so würden doch für die Worttrennung schon die Zwischenräume entscheidend sein, da auch hier Praepositionen und andere kleine Worte mit dem zugehörigen grösseren verbunden sind, was ein moderner Copist nicht gethan haben würde. Aber nicht nur die Punkte, sondern auch andere Interpunctionen, auf welche wir noch zurückzukommen haben, finden sich gleichfalls auf den noch genaueren Tafeln von Hayter.

Andere geringere Fragmente zeigen noch viel stärkere Abweichung von der Normalform der Buchstaben, so dass Zangemeister sie sogar als cursiv bezeichnet.[1] Zugleich sehen wir aus den neu entdeckten Wachstafeln und aus den Wandschriften, dass sogar manche Minuskelformen bis in diese Zeit hinaufreichen.

Wir sind also wohl berechtigt anzunehmen, dass erst in der Folgezeit eine Durchbildung der Schrift zu grösserer Regelmässigkeit der Formen stattgefunden hat, und zugleich ist, vielleicht eben der äusserlichen Gleichmässigkeit wegen, die fortlaufende Schrift ohne Worttrennung, ja in der Regel oder doch häufig sogar ohne Trennung und Unterscheidung der Sätze[2] aufgekommen. Zu der festeren kalligraphischen Ausbildung der Formen wird auch der neue Schreibstoff, das Pergament, beigetragen haben.

Es fehlt aus den nächstfolgenden Jahrhunderten nicht an Beispielen solcher Bücherschrift, aber wohl an der Möglichkeit, bestimmte Daten dafür anzugeben. Wir wissen ferner, dass vermuthlich schon im vierten Jahrhundert der Capitalschrift eine zweite Majuskelschrift zur Seite trat, welche wir Uncialschrift zu nennen pflegen; diese erscheint sofort als eine zweite völlig ausgebildete Kunstform, ohne dass irgendwo eine Übergangsform oder eine mit Uncialformen gemischte Capitalschrift sich nachweisen liesse.

Durch die bequemere Uncialschrift wurde immer mehr die feierliche Capitalschrift verdrängt. Als jene schon längst die gewöhnliche war, hielten doch, wie W. Studemund bemerkt,[3] die Schreiber noch lange für poetische Werke und für einige Reden an der Capitalschrift fest, wie denn namentlich von Vergil sich dergleichen Handschriften

---

[1] Exempla, Tab. I. II u. Text zu Tab. III. Sir Humphry Davy in: Philosoph. Transactions 1821, Part. I, Tab. XIII. XVI. XVII. XVIII, 1.

[2] Das überragende P am Anfang der Seite im Berliner Sallustfragment, welches Pertz als 'Paragraphus' erklärte, ist als Abkürzung von 'Publius' nachgewiesen von Hauler: Ein neues Palimpsestfragment zu Sallust's Historien, Wiener Studien VIII, 2, S. 315—330. Einen grösseren Anfangsbuchstaben hat in dieser Handschrift jede Seite; was auch sonst vorkommt.

[3] L. Annaei Senecae librorum quomodo amicitia continenda sit et de vita patris quae supersunt (Wrat. 1887), p. IX.

und Fragmente erhalten haben,[1] und auch die jüngsten bekannten Beispiele, Prudentius und Sedulius, sind poetische Werke. Nach dem Anfang des siebenten Jahrhunderts scheint der Gebrauch für ganze Handschriften aufgehört zu haben. Dagegen blieb die Uncialschrift auch neben anderen Gattungen als die eigentliche vornehme Bücherschrift im Gebrauch bis in's neunte Jahrhundert; ja, die Handschrift der Gesta Pontificum in Lucca, wo Minuskel damit wechselt und kalligraphische Schönheit nicht beabsichtigt ist, zeigt uns einen Schreiber, dem diese Schriftart noch vollkommen geläufig ist.

Zugleich war daneben seit dem fünften Jahrhundert eine der Minuskel schon sehr nahestehende Schrift gebräuchlich, nebst verschiedenen als Halbunciale oder alte Minuskel bezeichneten Formen. Die Uncialschrift selbst, als eine vielgebrauchte, war starker Veränderung unterworfen, und hier fehlt es nicht an Beispielen mit sicherer Zeitbestimmung, welche uns als Richtschnur dienen können, und von welchen deshalb ZANGEMEISTER und ich eine Sammlung zusammengestellt haben.

Es würde also hier keine erhebliche Schwierigkeit sich darbieten, wenn nicht die im natürlichen Verlauf der Dinge sich vollziehende Veränderung durchkreuzt würde durch die Kunstfertigkeit der technisch ausgebildeten Kalligraphen. Diese nämlich haben sich noch Jahrhunderte lang erhalten. Es waren ihrer nicht mehr so viele, dass alle Bücherhandschriften den Stempel künstmässiger Vollendung hätten tragen können, aber es gab noch immer Kalligraphen von Beruf, welche nach den besten Vorbildern sich ausbildeten, und deren Zeit sich daher nicht nach dem Maassstab der übrigen Handschriften bestimmen lässt; ohne Zweifel werden auch Bücherliebhaber diese Schrift aus der guten alten Zeit bevorzugt, wohl manchmal ausdrücklich verlangt haben. Namentlich auf Bibeln und Evangelien wurde die grösste Kunst verwandt, und bei diesen ist jeder Versuch der Zeitbestimmung um so leichter irreführend, weil auch die Schulen der Angelsachsen und die Meister der karolingischen Zeit sehr ähnliche Kunstwerke anzufertigen lernten.

Der Hauptmarkt für Bücher war in dieser ganzen Zeit in Rom, ohne Zweifel auch gerade für kalligraphisch schön ausgeführte Exemplare; verspottet doch noch im zehnten Jahrhundert Liudprand die Römer, dass sie das Gold, womit andere Völker ihre Waffen schmückten, zur Verzierung der Handschriften verwendeten.[2] Oft

[1] Es war ein Irrthum von mir, dass ich (Neues Archiv VIII, 345 Anm.) den cod. Vat. 3867 mit seiner, allerdings affectirten, Schrift für jüngere Nachahmung hielt, wie früher schon SEROUX D'AGINCOURT.

[2] Antapod. I, 26: Magnanimi proceres et clari marte secundo, Arma quibus studium fulvo radiare metallo, Romulidae sueti vacuis quod condere scriptis.

genug lesen wir davon, dass Bücher von dort geholt wurden, ohne Zweifel also dort käuflich waren. Aber auch nach England war seit der Mission des h. Augustinus, vorzüglich aber seit der Aussendung des Theodor von Tarsus im J. 668 mit neuen Bücherschätzen, diese Kunst zu sehr gelehrigen Schülern gekommen.

Davon ist erst in neuester Zeit ein merkwürdiges Beispiel uns bekannt geworden. Der Codex Amiatinus des Neuen Testamentes, eine der schönsten Uncialhandschriften, welche wir überhaupt besitzen, galt im Anschluss an die Tradition für ein Werk des sechsten Jahrhunderts und römischen Ursprungs. Solche Traditionen, welche hervorragende Werke alter Zeit an die hervorragendsten Namen anknüpfen, in diesem Falle an Gregor den Grossen, sind, obgleich in vielen einzelnen Fällen verworfen und überhaupt in zunehmendem Maasse skeptisch behandelt, doch noch immer zu viel beachtet worden: sie haben, wo nicht andere Umstände sie stützen, was hier allerdings der Fall zu sein schien, durchaus nicht mehr Autorität, als jene sehr alte und ehrwürdige Tradition der Venetianer, welche ihr lateinisches Marcus-Evangelium für das Autograph des Evangelisten hielten, oder als die der Spanier, welche noch jetzt in einer Uncialhandschrift des sechsten oder siebenten Jahrhunderts die Hand des h. Augustin verehren,[1] oder die römische Tradition, dass Hieronymus die Bibel von San Callisto mit eigener Hand geschrieben habe. So hielt man auch in Tours eine von alter irischer Hand geschriebene Evangelienhandschrift für ein eigenhändiges Werk des h. Hilarius von Poitiers.[2]

Nur weil die auf den ersten Blick unmöglichen Fälle solcher Art schon lange nicht mehr beachtet werden, wird den noch übrigbleibenden, nicht gerade absolut unmöglichen, leicht zu viel Gewicht beigelegt.

In diesem Falle nun hat der Commendatore Giovan-Battista de Rossi mit grossem Scharfsinn nachgewiesen,[3] dass in den durch Rasur veränderten Widmungsversen der Handschrift ursprünglich der Abt Ceolfrid von Jarrow in Northumberland genannt ist, welcher ihm aus Beda bekannt war; dann aber hat der Prof. Hort in Cambridge[4] diese Vermuthung bestätigt und gesichert, indem er die Quelle der Angaben bei Beda nachwies, nämlich die alte Vita Ceolfridi,[5] in

---

[1] Ewald et Loewe, Exempla scripturae Visigoth. Tab. I.

[2] Delisle, Catalogue des fonds Libri et Barrois, p. 10.

[3] Am vollständigsten zusammengefasst in: 'La Bibbia offerta da Ceolfrido abbate al sepolcro di San Pietro', enthalten in: 'Al Sommo Pontefice Leone XIII. Ommaggio giubbilare della Biblioteca Vaticana', 1888. Vergl. Palaeogr. Society, Serie II. pl. 65. 66.

[4] In der Zeitschrift Academy, 1887 Febr. 26, S. 148.

[5] Gedr. von Stevenson in Operum Bedae Append. II, 318 ff. und von Giles, Bedae Opp. VI, 416 ff.

welcher sich ganz dieselben Verse in ihrer ursprünglichen Gestalt finden. Hiernach also haben Benedict Biscop und Ceolfrid aus Rom eine Abschrift der älteren Übersetzung der Bibel mitgebracht, und Ceolfrid liess dazu noch drei Exemplare der Übersetzung des h. Hieronymus schreiben. Eines davon nahm er als Geschenk mit nach Rom, starb aber auf der Reise am 25. September 716 in Langres. Seine Schüler brachten dann den Codex nach Rom, wo er geblieben ist, bis er später nach Montamiata kam. Denn obgleich der Codex Amiatinus nur das Neue Testament umfasst, so lassen doch die eingeschriebenen Verse keinen Zweifel daran, dass es dieselbe Handschrift ist. Auch stimmt die Schrift sehr gut dazu.

Möglich bleibt ja immer, dass Benedict, neben anderen Künstlern, auch Kalligraphen aus Rom mitgebracht hat, oder auch, dass die aus Rom mitgebrachte Handschrift, in welcher man das von Cassiodor für sein Kloster gestiftete Exemplar vermuthet, als Vorbild gedient hat. Aber sicher ist es, dass diese Handschrift in der Zeit zwischen 690, dem Todesjahr des Abtes Benedict Biscop, und dem Jahre 716 in England geschrieben ist.

Dieselbe Kunst ist nun auch unter Karl dem Grossen zu den Franken gekommen. Dass für die unvergleichlichen kalligraphischen Kunstwerke aus seiner und seiner nächsten Nachfolger Zeit römische Vorbilder benutzt sind, hat man nie bezweifelt, aber nachzuweisen sind dergleichen nicht. Als das früheste bekannte Kunstwerk dieser Art hat man immer das Werk des Kalligraphen Godesscalk betrachtet, die mit Gold auf Purpur in Uncialschrift sehr schön geschriebene Evangelienhandschrift von Saint-Sernin.[1]

In den dazu gehörigen Versen heisst es:

Septenis cum aperit felix bis fascibus annum,
Hoc opus eximium Franchorum scribere Carlus
Rex pius egregia Hildgarda cum conjuge jussit,
Quorum salvifico tueatur nomine vitas
Rex regum dominus, caelorum gloria, Christus.
Ultimus hoc famulus studuit complere Godesscalc,
Tempore vernali transcensis Alpibus ipse
Urbem Romuleam voluit quo visere consul,
Ut Petrum sedemque Petri rex cerneret atque
Plurima celsithrono deferret munera Christo.

Karl hatte hiernach zum Andenken an die Taufe seines Sohnes

[1] Jetzt in Paris, Nouv. acquis. lat. 1993. Beschreibung von Piper, Karls d. Gr. Kalendarium, Berl. 1858. Die Verse correcter bei Dümmler, Poetae lat. aevi Carol. I, 94. Facs. bei Bastard 81—87; de Wailly, pl. IV, n. 10; Delisle, Cabinet des Mss. pl. XX, n. 1. 2. 4.

Pippin durch den Pabst am 14. April 781, den Befehl zur Verfertigung dieser prächtigen Handschrift gegeben, im Beginn seines 14. Regierungsjahres, also im October des Jahres 781, wie Piper (S. 14) richtig erklärt hat, desselben Jahres, in welchem er im Frühling nach Rom gekommen war; nur durch ein an falsche Stelle gesetztes Komma war die Meinung aufgekommen, dass Godesscalc im Frühjahr das Werk ausgeführt habe. Vor dem 30. April 783, dem Todestage der Königin Hildegard, muss das Werk vollendet gewesen sein.

Ich habe mich hierbei etwas aufgehalten, weil Th. Sickel[1] kürzlich gesagt hat, Godesscalc habe die Handschrift in Rom geschrieben, was hiernach nicht wahrscheinlich ist, denn Karl hatte Rom damals schon lange verlassen. Bei dem Wunsche aber, eine Anknüpfung der karolingischen an die römische Kalligraphie zu finden, könnte man hieraus leicht weiter schliessen wollen, dass Godesscalc trotz seines deutschen Namens überhaupt in Rom gearbeitet habe, was hierdurch ausgeschlossen ist. Dass er aber ein römisches Vorbild benutzt hat, kann man zuversichtlich vermuthen.

So viel erkennt man hieraus vollkommen sicher, dass damals, und vielleicht schon früher, im Frankenreiche einheimische Künstler vorhanden waren, welche an kalligraphischer Ausbildung den römischen gleichstanden. Es fehlt nicht an Uncialhandschriften des neunten und zehnten Jahrhunderts von grosser Schönheit und Reinheit der Formen, welche, besonders wenn nur Fragmente uns erhalten sind, leicht irreführen können. Ich erinnere nur an die schöne Evangelienhandschrift, welche in Nürnberg zu Umschlägen von Acten verbraucht war, und von welcher sich einige Blätter im Germanischen Museum befinden, andere im Besitz von Libri waren und von denen dieser eine Schriftprobe gegeben hat.[2] Er setzte die Schrift ins sechste Jahrhundert, und nach der Form der Buchstaben war das ganz gerechtfertigt. Aber es hat sich seitdem noch ein Blatt gefunden mit einer farbigen, aus Fischen zusammengesetzten Initiale, wie sie wohl kaum vor dem siebenten Jahrhundert vorkommt, dann aber auch nur in Handschriften von mehr oder weniger barbarischem Character und in ungeschickter Zeichnung; hier aber in so kunstreich durchgebildeter Form, dass wir wohl nicht umhin können, Zucker beizustimmen, welcher, vorzüglich hierauf gestützt, daneben auch auf andere kleinere bunte Initialen, die Handschrift für ein Product karolingischer Kalligraphie erklärt hat.[3] Auch das oft geltend

---

[1] Prolegomena zum Liber diurnus S. 19.
[2] Monum. inédits, pl. 58.
[3] Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit XXIX (1882) S. 33—43.

gemachte Kennzeichen, dass nachgeahmte Uncialschrift weniger wie geschriebene, als wie gemalte und gezeichnete Buchstaben aussieht, hält hier nicht Stich.

Bekannt ist die Controverse über den Utrechter Psalter,[1] dessen Schätzung in Betreff des Alters um mehrer Jahrhunderte schwankte; er ist in der leichten und gefälligen Schrift geschrieben, welche man, im Gegensatz zu der feierlichen, fast lapidaren Capitalschrift, als Capitalis rustica zu bezeichnen pflegt, ein Ausdruck, welcher jedoch einer bestimmten Definition ermangelt. A. Springer erklärt Schrift und Bilder für nicht älter, als die zweite Hälfte des neunten Jahrhunderts,[2] und als sicher festgestellt dürfen wir betrachten, dass die Handschrift zu einer Zeit geschrieben ist, in welcher die Anwendung der Capitalschrift schon ganz ungewöhnlich war, dass wir es also hier mit einer genauen Nachahmung aus karolingischer Zeit zu thun haben. Diese findet nach einer treffenden Bemerkung von E. A. Bond[3] ihre Erklärung darin, dass, um zwischen den drei Columnen des Textes immer den gleichen freien Raum für die Bilder auszusparen, die Schrift überall genau denselben Raum ausfüllen musste. Aus ganz ähnlichem Grunde sind griechische Exemplare heiliger Schriften mit Randcommentaren (Catena) vollkommen übereinstimmend geschrieben;[4] ist in einer lateinischen Handschrift saec. XIV. der Decretalen mit der Glosse die Schrift auf der letzten Zeile der Seite aus einander gezerrt, und, wo auch das noch nicht ausreichte, um die Seite zu füllen, sind ganz sinnlose Wörter und Buchstabenverbindungen hingesetzt, um keinen leeren Raum zu lassen; darunter auch einmal ein Liebesseufzer in altschwedischer Sprache.[5] Umgekehrt wurde dem Schreiber einer Canonensammlung saec. VII. in irischer Halbunciale der Raum zu enge, und er schieb am Schluss jeder Seite einige Zeilen in enger spitziger Cursive, um den Raum nicht zu überschreiten.[6] Diese Analogien sind vielleicht geeignet, jene Vermuthung zu unterstützen.

Ein anderes Problem bietet uns nun jenes Prachtstück der Hamilton-Sammlung, welches mir den Anlass zu dieser Untersuchung gegeben hat. Diese Handschrift, welche früher sich in der Bibliothek

---

[1] Vollständige Autotypie 1873. Proben in: Reports adressed to the trustees of the British Museum (1874); Birch, The history, art and palaeography of the Ms. styled the Utrecht Psalter (1876); Arntz, Beknopt historisch overzigt over den oorsprong van het Quicunque, Utrecht 1874.

[2] Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft d. Wiss. VIII.

[3] In den oben angeführten Reports, S. 2.

[4] Montfaucon, Diarium Ital. p. 278.

[5] Jaffé et Wattenbach, Codices Colonienses p. 54.

[6] Ebendas. p. 95.

des Marquis of Douglas and Clydesdale befunden hat, ist eine Abschrift der Evangelien, in Uncialschrift mit Gold auf Purpur geschrieben. Das Pergament ist von grossem Folioformat, mit breitem Rande, mit einem eingeritzten Linienschema für zwei Columnen. Die Schrift steht auch auf der obersten Zeile, welche eigentlich hätte frei bleiben sollen. Senkrechte Doppellinien begrenzen die Schrift an den Seiten; zwischen ihnen stehen vortretend die Anfangsbuchstaben der Abschnitte. Diese sind etwas grösser, aber fast ganz von derselben Form, nur zuweilen in Capitalform, ohne alle Verzierung. Das Pergament ist stark und glatt, vorzüglich bereitet, und von tiefer, satter Purpurfärbung, echte Purpurfarbe, wie mir scheint, aber in den verschiedenen Evangelien von etwas verschiedener Färbung. Im frischen Zustande wird es noch viel glänzender ausgesehen haben, auch wohl gleichmässiger. Schwerlich wurde solches Pergament anderswo als im griechischen Reiche verfertigt, und in Rom wird man es von dort bezogen haben. Das Gold strahlt noch in unverminderter Frische. Fragen wir nach der Herkunft der Handschrift, so belehren uns mit Goldschrift auf der Innenseite des ursprünglich leer gelassenen ersten Blattes eingetragene Verse, dass sie dem König von England dargebracht sei: unter dem königlichen Wappen von England geschrieben, lauten sie so:

Fato servatus tibi sum, ter maxime princeps:
Te quoque servarunt aurea fata michi.
Instaurata nitent per te sacra dogmata, per te
Aureus est author Christus ubique meus.

Ein eingelegtes Blatt besagt, dass es ein Geschenk vom Pabst Leo X. an den König Heinrich VIII. sei, als er ihm den Titel 'Defensor fidei' verlieh. Allein dem stehen erhebliche Gründe entgegen. Das ebenfalls in Gold darüber gezeichnete Königswappen zeigt englischen, und nicht italienischen Stil, ebenso die Ornamente am Schluss. Auch sind die Verse, namentlich der letzte, für die Humanisten in Leo X. Umgebung nicht gut genug. Auf noch andere Gegengründe kommen wir später zurück.

Lässt man aber diese Tradition fallen, welche vielmehr eine sehr moderne Vermuthung ist, so ist allerdings auch die Person des Königs, welchem das Geschenk dargebracht wurde, nicht gesichert; noch weniger aber der Zeitpunkt, und der Inhalt der Verse scheint eigentlich mehr für einen späteren Zeitpunkt, nach der Durchführung der Reformation zu sprechen. Diese Untersuchung muss ich jedoch Kennern der englischen Geschichte überlassen, und hoffe auch zuversichtlich, dass aus den massenhaften Papieren des 16. Jahrhunderts einmal irgend eine Aufklärung sich ergeben werde.

Halten wir aber an der früheren Zeit fest, so erschien es mir am wahrscheinlichsten, in dem Geschenkgeber, welcher zu dem König in ziemlich vertrautem Verhältniss gestanden haben muss, den Cardinal Wolsey zu vermuthen.

Solche Prachtstücke sind zu allen Zeiten selten gewesen, und wenn auch etwas später, nach der Aufhebung der Klöster, Seltenheiten und Kostbarkeiten aller Art auf den Markt kamen, so war es doch damals nur durch ganz besonders glückliche Umstände möglich, sich einen Gegenstand der Art zu verschaffen.

Nun war Wolsey Erzbischof von York, und zu seinem Sprengel gehörte das Kloster Ripon, für welches der Erzbischof Wilfrid einst einen solchen Schatz gestiftet hatte. Es ist mir freilich nicht gelungen, etwas brauchbares über die Geschichte von Ripon in Erfahrung zu bringen, aber es kann kaum bezweifelt werden, dass Wolsey völlig in der Lage war, über dessen Schätze zu verfügen.

So werden wir also zu Wilfrid geführt, von dem wir wissen, dass er die vier Evangelien mit dem reinsten Golde auf Purpurpergament hat schreiben lassen. Als ein in unseren Zeiten unerhörtes Wunderwerk (inauditum ante saeculis nostris miraculum) preist es sein Biograph,[1] und auch in seiner von Beda[2] uns aufbewahrten Grabschrift wird es rühmend erwähnt. Die Zeit seines Glanzes, in welcher er in der Lage gewesen ist, ein solches, gewiss sehr kostbares Werk ausführen zu lassen, fällt ungefähr in die Jahre 670 bis 680. Er hat in dieser Zeit grosse Summen auf kostbaren und prächtigen Kirchenschmuck verwendet, und ein längerer Aufenthalt in Rom hat ihm ohne Zweifel Gelegenheit gegeben, Künstler für diese Zwecke zu gewinnen. Ob aber nun diese Handschrift dort, ob sie von römischen oder von einheimischen Kalligraphen ausgeführt ist, darüber wissen wir nichts. Welche schöne Werke die englischen Schreiber damals zu machen verstanden, das zeigt uns ja der Codex Amiatinus.

Natürlich kann diese Vermuthung nur bestehen, wenn auch die Schrift zu dieser Zeit passt, und ich glaube, dass man das unbedenklich bejahen kann. Mit dem Codex Amiatinus zusammengehalten erscheint sie von grösserer Festigkeit und Sicherheit; manche Formen erinnern an die Laurentianische Handschrift des Orosius, welche dem ausgehenden sechsten Jahrhundert zugeschrieben wird. Das U, dessen Form ich früher hervorgehoben habe, hat in der Regel eine ganz normale Gestalt, nur hin und wieder hat der vordere gerundete Theil

[1] Mabillon, Acta Sanctorum Ord. S. Benedicti IV, 2. 552.
[2] Hist. eccl. Angl. V, 19.

eine gebrochene, winkelige Form angenommen, woraus sich schwerlich irgend ein Schluss ziehen lässt. Von der starken Entartung der Buchstabenformen in anderen Handschriften des siebenten Jahrhunderts ist hier noch gar keine Spur.

Übrigens lassen sich zwei verschiedene Hände unterscheiden. Die eine, welche den Eindruck grösserer Regelmässigkeit macht und die reine Uncialform des E anwendet, hat nur 28 Blätter geschrieben, von Matth. 7, 13 'Quam angusta porta' bis zum Ende des Matthaeus. Es könnte das ja allenfalls ein älteres Stück sein, doch ist das sehr unwahrscheinlich, denn auch am Ende des Lucas ist eine Schlussschrift ganz derselben Art. Auch die ganz gleiche Beschaffenheit des Pergaments spricht gegen eine solche Annahme und ebenso ist auch in anderen Eigenthümlichkeiten Übereinstimmung.

Die Worttrennung, welche in dieser Zeit schon nicht mehr auffallen kann und z. B. im Codex Amiatinus viel deutlicher vorhanden ist, beschränkt sich hier auf oft kaum merkliche Zwischenräume zwischen den Wörtern, fehlt auch nicht selten völlig.

Dagegen widerspricht es dem älteren Herkommen, dass sich nicht nur am Ende der Zeilen, sondern auch innerhalb derselben, der Abkürzungsstrich für m und n angewendet findet,[1] und dass ausserdem die bekannten Abkürzungen für ur und für us vorkommen, Zeichen welche freilich sehr alt sind, indem sie aus den tironischen Noten stammen, aber der älteren Uncialschrift fremd sind.

Ein bedenklicherer Umstand ist, dass, während die mehr alterthümlich aussehende Hand ganz correcte Interpunction hat, so dass der oben am Buchstaben stehende Punkt den Schluss des Satzes bezeichnet, die andere sehr häufig den schräg über einen Punkt gestellten Strich anwendet, eine Interpunction, welche bis jetzt nur in karolingischer Zeit nachgewiesen ist.

In meiner Anleitung zur lateinischen Palaeographie (4. Aufl.) habe ich, wie ich bekennen muss, unüberlegter Weise im letzten Augenblick noch eine nachträgliche Bemerkung angebracht, dass für diese Eigenthümlichkeiten sich eine Analogie darbiete, ausser dem Utrechter Psalter, der, wie wir oben sahen, nichts beweisen kann, in den tironisch geschriebenen Psaltern, welche dem 7. Jahrhundert zugeschrieben werden. Auf diese berief ich mich auch in den Jahresberichten der Geschichtswissenschaft VI, S. II, 331.

Damit aber verhält es sich so:

---

[1] Das findet sich auch in dem Berner Oribasius, welcher dem 6. Jahrhundert zugeschrieben wird, s. H. Hagen: De Oribasii versione latina Bernensi commentatio, Bern. 1875.

Die von O. Lehmann in Facsimiledruck herausgegebene Wolfenbütteler Handschrift, welche in der Majuskelschrift der Überschriften manche Ähnlichkeit mit dem Hamilton-Codex darbietet, glaubte allerdings C. Krause spätestens dem 7. Jahrhundert zuschreiben zu müssen; Lehmann aber selbst schliesst sich mehr Schoenemann an,[1] welcher sie dem 9. Jahrhundert zuschreibt.

F. U. Kopp, welcher diese Handschrift nicht gesehen hatte, billigt[2] in Betreff des Sangermanensis 61,2 (jetzt Lat. 13160) Montfaucon's Meinung, welcher diese Handschrift dem 7. Jahrhundert zuweist; Delisle aber setzt sie in's neunte, und ebenso die jetzt aus dem Fonds Libri 94 erworbene, Nouv. acq. lat. 442, welche einst dem Präsidenten Bouhier, dann der École de médecine in Montpellier (H 449) angehörte.

Von diesen Handschriften lässt sich also, wenn auch noch Zweifel bleiben mögen, doch ein Beweis nicht entnehmen; eher würden sie für das Gegentheil in's Gewicht fallen. Allein woher stammt denn diese Interpunction, welche wir in der karolingischen Zeit in ganz allgemeinem Gebrauch finden? Ist sie eine ganz neue Erfindung? Das ist schwer zu glauben. Unmöglich ist es wohl nicht, dass sie sich auch in älteren Handschriften noch nachweisen lässt, und in der That finde ich dieselbe in recht alter Halbuncialschrift bei Delisle, im Catalogue des Manuscrits des fonds Libri et Barrois (1888), pl. VI, 5.

Sie findet sich aber auch schon in dem neuen Abdruck der Fragmenta Herculanensia nach Hayter's Kupfertafeln, E. 8, dann H. 6 ähnlich, aber mit hakenförmig gekrümmtem Oberstrich, und C 7 mit weniger gekrümmtem Strich als Fragezeichen. Hierbei ist allerdings nicht zu vergessen, dass der Punkt in dieser Schrift als Worttrennung angewandt ist, und also die Interpunction eigentlich allein in dem oberen Strich besteht. Vielleicht aber ist sie eben aus dieser Verbindung herzuleiten, und nur erst spät zu allgemeiner Anwendung gekommen, als die kleinere Minuskelschrift den Gebrauch von dreierlei Punkten nicht mehr gestattete.

Natürlicher Weise liegt doch immer die Vermuthung nahe, dass wir es vielleicht nur mit einer Nachahmung aus karolingischer Zeit zu thun haben könnten. Allein, wie ich schon früher bemerkt habe, die feste und sichere Schrift spricht dagegen, und jeder Vergleich mit den Prachthandschriften des 9. Jahrhunderts verstärkt nur den Eindruck, dass der Charakter ein sehr verschiedener ist. Namentlich auch finden wir in der karolingischen Zeit eine solche Freude an bildlicher Verzierung, kunstreich ausgeführten Initialen und Randleisten,

[1] Hundert Merkwürdigkeiten der Wolfenb. Bibl. S. 26.

[2] Palaeographia critica I, 316.

dass mir eine so vollkommene Schmucklosigkeit bei kostbarster Ausstattung für diese Zeit geradezu unmöglich erscheint. Hat doch auch für die oben erwähnten Nürnberger Blätter gerade die Entdeckung einer Initiale den Beweis späterer Entstehung gegeben.

Bei den Zweifeln nun, welche doch nicht ganz abzuweisen sind, und welche ich auch früher nicht verschwiegen habe, war es mir sehr willkommen, im Lit. Centralblatt von 1888 Sp. 1790 zu lesen, in einer Besprechung des von der Vaticanischen Bibliothek dem Pabste Leo XIII. zu seinem Jubiläum dargebrachten Werkes, wo von Heinrichs VIII. Schrift gegen Luther die Rede ist: 'Ein lateinisches Evangeliar auf Purpur hat er als Gegengeschenk erhalten'. Hier also schien sich nun eine bestimmte Nachricht über eine römische Herkunft der Handschrift darzubieten. Und richtig, in dem Werke von Müntz: La bibliothèque du Vatican au XVI[e] siècle, p. 54 steht es,[1] aber nicht etwa aus vaticanischen Documenten, sondern ohne Angabe der Quelle, und ohne Zweifel nur zurückzuführen auf jenen oben schon berührten Zettel.

Dagegen in der Abhandlung von de Rossi über den Codex Amiatinus, welche sich in jenem Ommaggio giubbilare befindet, ist auf S. 4 nicht nur mit ausdrücklichem Widerspruch gegen die Angabe von Müntz, meine Vermuthung angenommen und wiedergegeben, sondern sie ist auch durch ein neues Argument verstärkt. Indem nämlich de Rossi über das Dedicationsexemplar von Heinrichs VIII. Buch gegen Luther berichtet, mit dem Epigramm von der eigenen Hand des Königs

Anglorum rex Henricus, Leo Decime, mittit
Hoc opus et fidei testem et amicitiae,

bemerkt er, dass dem König dafür die Evangelienhandschrift geschenkt sei: 'non però da Leone X, al quale non allude punto l'epigramma' etc. Und in der That, in einer solchen Zuschrift im Namen des Pabstes könnte nicht gut dessen Name fehlen, besonders in Erwiderung des königlichen, wenn auch metrisch missrathenen Epigramms. Es ist wohl geradezu unmöglich, besonders wenn man den letzten Vers betrachtet, diese Zuschrift Leo X. zuzuschreiben.

So muss ich also einstweilen an meiner früheren Vermuthung festhalten.

---

[1] Un Évangéliaire du VII[e] siècle en lettres d'or sur parchemin teinté de pourpre a quitté la Vaticane du vivant même de Léon, qui l'offrit à Henri VIII d'Angleterre. Ce volume est entré au Cabinet des Estampes de Berlin, en 1882, avec la collection Hamilton.

Dem General-Feldmarschall Hrn. Grafen von Moltke Excellenz zum 8. März 1889.

An dem seltenen Ehrentage, den Euer Excellenz morgen zu feiern vergönnt ist, darf die Königliche Akademie nicht zurückbleiben. Ist es doch ihr Stolz, den grossen Feldherrn, der durch seinen genialen Blick und seine mit weiser Besonnenheit gepaarte Kühnheit das Vaterland in den gefahrvollsten Momenten seiner Geschichte sicher und rasch von Sieg zu Sieg geführt hat, seit 29 Jahren zu den Ihrigen zählen zu dürfen, und während sie mit der ganzen Nation in liebender Bewunderung einmüthig ist, hat sie noch den besonderen Beruf, dem Lenker der Schlachten dafür zu danken, was er in friedlicher Musse der Wissenschaft gewesen ist. Wie Xenophon und Caesar, haben Sie Ihre glorreichen Feldzüge in Osten und Westen mit mustergültiger Unbefangenheit Selbst in die Jahrbücher der Geschichte eingetragen oder unter Ihrer Leitung darstellen lassen. Mit dem Geiste des echten Forschers, der mit liebevoller Sorgfalt allen Entwickelungen des Menschengeschlechts nachgeht, haben Sie die Bahnen eröffnet, um eines der wichtigsten Gebiete alter Völkergeschichte, die kleinasiatische Halbinsel, unserer Kenntniss wieder aufzuschliessen. Jeden denkwürdigen Platz haben Sie in seiner Eigenart aufzufassen und mit voller Geistesfrische zu schildern gewusst. Byzanz und der Bosporus, Rom und die Campagna sind uns in dem von Ihrer Hand gezeichneten Bilde neu lebendig geworden. Das sind Friedensthaten von unvergänglicher Bedeutung. Auch die erste, des Gegenstandes würdige Darstellung von Athen und seiner Landschaft verdanken wir dem langjährigen Chef des Grossen Generalstabes, der jeder ernsten Forschung auf dem Felde alter Länder- und Völkerkunde mit Rath und That kräftige Hülfe zu leisten bereit war, und es waren uns unvergessliche Festtage, wenn wir an unseren öffentlichen Sitzungen Euer Excellenz als akademischen Genossen in unserer Mitte sehen durften. Dafür sei es

der Akademie verstattet, heute ihren dankerfüllten Festgruss auszusprechen mit dem tiefempfundenen Wunsche, dass es Euer Excellenz noch lange vergönnt sei, zur Freude des deutschen Volkes mit ungeschwächter Kraft auf ein so wunderbar reich gesegnetes Leben dankbar und froh zurückzuschauen.

Berlin, den 7. März 1889.

Die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 14. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1889.

XIV.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

14. März. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

1. Hr. von Hofmann las die umstehend folgende Mittheilung: Zur Kenntniss der Amine der Methyl- und Äthylreihe.

2. Derselbe las ferner: Neue Untersuchungen über hochgegliederte Äthylenbasen. Einreichung für die »Abhandlungen« nach Vollendung der Arbeit bleibt vorbehalten.

3. Hr. Landolt legte die umstehend folgende Mittheilung des Hrn. Prof. O. Liebreich hierselbst vor: Weitere Untersuchungen über den todten Raum bei chemischen Reactionen.

4. Hr. von Helmholtz legte eine Mittheilung des Hrn. Dr. M. Thiesen, Assistenten am internationalen Maass- und Gewichts-Institut zu Sèvres vor: Theorie der pendelartigen Schwingungen. Dieselbe wird in einem spätern Stück dieser Berichte veröffentlicht.

Zur Kenntniss der Amine der Methyl- und Äthylreihe.

Von A. W. von Hofmann.

Als ich vor mehr als dreissig Jahren eine Reihe von Gliedern dieser Gruppe kennen lehrte, habe ich auch, soweit mir dies damals möglich war, die Siedepunkte derselben zu bestimmen gesucht. Die ersten bahnbrechenden Untersuchungen über die Siedepunktregelmässigkeiten von Hermann Kopp lagen damals bereits vor und Jeder, der einen neuen Körper auffand, fühlte im Interesse der Weiterführung jener Untersuchungen das Bedürfniss, die Siedetemperatur desselben mit Sorgfalt zu ermitteln. Wie sehr ich aber auch damals bemüht gewesen war, das Dimethyl- und Trimethylamin, sowie das Diäthyl- und Triäthylamin, mit denen ich mich vorzugsweise beschäftigt hatte, nach dieser Richtung hin genau zu erforschen, so waren mir doch bezüglich der Richtigkeit der gewonnenen Daten, insbesondere der die Methylkörper betreffenden, stets einige Zweifel geblieben, welche im Hinblick auf die Nothwendigkeit mit verhältnissmässig kleinen Mengen vielleicht noch nicht absolut reiner Substanzen zu arbeiten gewiss gerechtfertigt erschienen.

Da einige dieser Verbindungen überdies unterhalb der gewöhnlichen Zimmertemperatur sieden, ein Umstand, der die richtige Bestimmung des Siedepunkts wesentlich erschwert, so habe ich schon seit Jahren den Wunsch gehegt, diese Bestimmungen zu wiederholen.

In den Jahrzehenden, welche seit der Entdeckung der Alkoholbasen verflossen sind, hat diese Körpergruppe das Interesse der chemischen Forscher mit Vorliebe in Anspruch genommen. Die Alkylamine gehören heute zu den bekanntesten Körpern, welche in zahlreichen Reactionen umfassende Verwerthung gefunden haben und noch finden. Sie werden daher auch gegenwärtig in grossem Maassstabe dargestellt und vielleicht nirgends in grösserem als in den Werkstätten der berühmten Fabrik wissenschaftlicher chemischer Praeparate von C. A. F. Kahlbaum in Berlin, deren Thätigkeit — in dem von Dr. Gustav Krämer und Dr. Adolf Bannow begründeten und heute von

letzterem geleiteten Laboratorium — so wesentlich zu dem beispiellosen Aufschwung der organischen Chemie während der letzten Decennien beigetragen hat. Bei einem Besuche der höchst interessanten und lehrreichen KAHLBAUM'schen Werkstätten in Adlershof zeigte mir Hr. Dr. BANNOW unter anderen merkwürdigen Praeparaten auch Vorräthe von Methyl- und Äthylaminen, wie sie den Chemikern nur selten zu Gesicht kommen dürften, und ich erfuhr bei dieser Gelegenheit mit einiger Genugthuung, dass diese grossen Quantitäten — sämmtliche Amine waren durch eine stattliche Anzahl von Kilogrammen vertreten — ausschliesslich nach dem von mir ursprünglich angegebenen Verfahren, nämlich durch die Einwirkung von Brommethyl und Bromäthyl auf Ammoniak, gewonnen worden waren. Obwohl seit jener Zeit nicht wenige andere Darstellungsmethoden in Vorschlag gebracht worden sind — ich selbst habe noch in den letzten Jahren für die Erzeugung der primären Amine die Einwirkung des Broms in alkalischer Lösung auf die Säureamide empfohlen[1] — so hat sich doch, wie mich Dr. BANNOW versichert, für die Darstellung der aliphatischen Amine im Grossen, kein anderer Process in ähnlicher Weise leicht ausführbar und ergiebig erwiesen, als die Wechselwirkung zwischen dem Ammoniak und den Alkylhalogeniden.

Beim Anblick dieser Schätze kamen mir aber auch meine alten Siedepunktszweifel wieder in den Sinn, und ich glaubte, dass ich die mir gebotene vortreffliche Gelegenheit, sie zu lösen, nicht ungenützt vorübergehen lassen dürfe, zumal auch der scharfe Frost an jenem Tage — das Thermometer zeigte eine Temperatur von 10°—12° unter Null — die Bestimmung der Siedepunkte dieser flüchtigen Substanzen wesentlich zu erleichtern versprach.

Hrn. Dr. BANNOW bin ich für die liebenswerthe Bereitwilligkeit, mit welcher er alsbald auf meiner Wunsch einging, indem er mir die umfassenden Hülfsmittel seines Laboratoriums für die Ausführung der Versuche zur Verfügung stellte, zu bestem Danke verpflichtet.

Zu den Siedepunktsbestimmungen diente ein Apparat, im Allgemeinen demjenigen nachgebildet, welchen Dr. BANNOW[2] als Referent der von dem Verein für die Wahrung der Interessen der chemischen Industrie Deutschlands ernannten Commission zur Ausbildung der analytischen Methode der fractionirten Destillation vorgeschlagen hat. Das Gefäss, welches in den Werkstätten von Adlershof zur genauen Feststellung der Siedepunkte sämmtlicher von der Fabrik in den Handel

---

[1] HOFMANN, Sitzungsberichte 1882. 343.
[2] BANNOW, die chemische Industrie, 1886, 328.

gebrachten Praeparate angewendet wird, ist aus etwas mehr als $^1/_2{}^{mm}$ starkem Platinblech gefertigt und besteht aus zwei mit Flanschen versehenen Halbkugeln von etwa $7^1/_2{}^{cm}$ Durchmesser, welche nach Einschiebung eines Papperinges zwischen die Flanschen mittels Packschrauben gedichtet werden.

Für die im Folgenden aufgeführten Versuche wurde in den Hals der oberen Halbkugel ein Kork eingefügt, welcher ein Glasrohr von 1^{cm} Durchmesser und 15^{cm} Höhe trug. Dieses Rohr umgab, unten mit einem Korke geschlossen, ein Glasmantel, zur Aufnahme abgekühlten Salzwassers bestimmt, welches man durch ein am unteren Ende des Mantels angebrachtes mit einem Quetschhahn geschlossenes Röhrchen nach Bedürfniss abfliessen lassen konnte. Das obere Ende des Rohres war mit einem Korke verschlossen, an welchem das Thermometer hing. Dieses war, da das rechtwinklig angelöthete Abzugsrohr nur wenige Centimeter unterhalb des Korkes austrat, seiner ganzen Länge nach von dem Dampfe der siedenden Flüssigkeit umhüllt. Aus dem Abzugsrohre gelangte der Dampf durch einen geeignet gebogenen Vorstoss in einen Literballon, welchen man durch eine kräftige Kältemischung (1 Theil Kochsalz und 3 Theile Eis) abgekühlt hatte. Was sich hier nicht verdichtete, wurde von kaltem Wasser absorbirt. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass man Sorge getragen hatte, zwischen dem Verdichtungsballon und dem Absorptionsgefäss eine leere Woolf'sche Flasche einzuschalten, um bei momentan stockender Dampfbildung ein Zurücksteigen des Wassers bis in den Verdichtungsballon zu verhindern. Aus dem Spiele der Flüssigkeitssäule in der Röhre, welche in das Absorptionswasser tauchte, liess sich der Gang der Destillation mit Genauigkeit verfolgen.

Bei den Siedepunktsbestimmungen wurde, wenn die Lufttemperatur nicht unterhalb der beobachteten Siedetemperatur lag, die Temperatur des Dampfrohrs durch in den Mantel gegossenes abgekühltes Salzwasser hinreichend herabgestimmt. Das Thermometer, ein Geissler-sches, in fünftel Grade getheilt, war mit einem Normalthermometer der physikalischen Reichsanstalt verglichen worden.

Für jede Siedepunktsbestimmung wurden 100^{ccm} des mehrmals über metallischem Natrium destillirten Amins in Anwendung gebracht.

Amine der Methylreihe.

Methylamin. Der Siedepunkt der monomethylirten Base war bisher nicht bestimmt worden. Wurtz,[1] der Entdecker des Methyl-

[1] Wurtz, Ann. chim. phys. [3] XXX, 449.

amins giebt nur an, dass sich die Base einige Grade unter dem Gefrierpunkte des Wassers verdichte. Dies bewahrheitete sich sofort bei unseren Versuchen. Die Verdichtung des Methylamingases gelang ohne alle Schwierigkeit durch eine Kältemischung von Salz und Eis. Die Reinheit der aus dem mehrfach umkrystallisirten Chlorhydrate gewonnenen Base war auf die Weise erhärtet worden, dass man eine kleine Menge des Amins in ein Glasröhrchen eingeschmolzen, gewogen und letzteres unter einem gemessenen Volum Normalsäure zerbrochen hatte. Das angewandte Praeparat zeigte einen Titre von 100.2 Procent. Titrirt man das Methylamin ohne es einzuschmelzen, so erhält man in Folge der ausserordentlichen Flüchtigkeit der Base stets einen zu niedrigen Titre.

Das verdichtete Methylamin raucht stark an der Luft. Das Volumgewicht der Base wurde bei $-10^\circ\!.8$ zu 0.699 gefunden.

Siedepunktsbestimmung.

Barometerstand 768.35, Lufttemperatur $+4^\circ$. Dauer des Versuchs 25 Minuten. Siedepunkt -6° bis $-5^\circ\!.5$.

Es schien mir nicht ohne Interesse, das Verhalten des flüssigen Methylamins bei sehr niedriger Temperatur zu prüfen. In einem Bade von Aether und starrer Kohlensäure verändert sich, wie bereits Wurtz beobachtet hat, die flüssige Base nicht. Es ist aber bekannt, dass Faraday[1] auch das flüssige Ammoniak in der gedachten Kältemischung nicht zum Erstarren bringen konnte. Erst als er noch die Luftpumpe zu Hülfe nahm, sah er das Ammoniak zn Krystallen erstarren, welche bei -103° schmolzen. Das Methylamin zeigte jedoch auch im luftverdünnten Raume keine Neigung zum Festwerden. Der Versuch wurde nach dem von Loir und Drion[2] angegebenen Verfahren angestellt, indem man zwischen die Luftpumpe und die das Methylamin enthaltende Röhre, welche im Aetherkohlensäurebad stand, eine mit schwefelsäuregetränktem Bimstein gefüllte Flasche einschaltete. Das in das Methylamin eintauchende Alkoholthermometer zeigte bei einer 5 Minuten lang andauernden Druckverminderung bis auf 15 und selbst 10^{mm} eine Temperatur von -75°. Das Methylamin war vollkommen flüssig geblieben.

Dimethylamin. Den Siedepunkt dieser Base habe ich[3] schon früher einmal bestimmt. Das damals zum Versuche verwendete Amin war von dem gleichzeitig in der Reaction zwischen Brommethyl und Ammoniak auftretenden Monomethyl- und Trimethylamin, durch Um-

---

[1] Faraday, Ann. chim. phys. XV, 278.
[2] Loir und Drion, Lieb. Ann. CXX, 211.
[3] Hofmann, Proc. R. Soc. XII, 382, (1862-63).

wandlung in den Dimethyloxaminsäureäthylaether mittels Oxalsäureaether, getrennt worden. Die aus dem Dimethyloxamat durch Alkali befreite Base war zur Entwässerung über Natrium destillirt. Den Siedepunkt des so gewonnenen Amins hatte ich zwischen 8° und 9° gefunden. Barometerstand und Lufttemperatur sind in der veröffentlichten Notiz leider nicht angegeben.

Für die Wiederholung des Versuchs war die aus Brommethyl und Ammoniak gewonnene Base in die Nitrosoverbindung übergeführt und nach Abscheidung aus derselben mit verdünnter Natronlauge mehrfach über Natrium destillirt worden. Das so erhaltene Amin zeigte bei —5°8 das mit Hülfe des Piknometers bestimmte Volumgewicht 0.6865.

Siedepunktsbestimmung.

Barometerstand 764.1. Lufttemperatur —5°8. Dauer des Versuchs 20 Minuten. Siedepunkt 7°2 bis 7°3.

Versuche, das Dimethylamin zum Erstarren zu bringen, genau so angestellt, wie die für das Methylamin angegebenen, waren erfolglos.

Trimethylamin. Kurz nachdem ich diese Base durch Destillation des Tetramethylammoniumhydroxyds gewonnen hatte, war von einem meiner Schüler, Hrn. Henry Winkles,[1] die von Wertheim[2] in der Häringslake aufgefundene und für Propylamin gehaltene Base näher studirt und als identisch mit dem aus der Ammoniumbase gewonnenen Trimethylamin erkannt worden. Diese Base stand in erheblicher Menge zur Verfügung, so dass der Siedepunkt ohne Schwierigkeit bestimmt werden konnte. Er hatte sich bei 4° bis 5° ergeben.

Als ich später, wie im vorigen Paragraphen angeführt worden ist, den Siedepunkt des Dimethylamins bei 8° bis 9° gefunden hatte, glaubte ich das Ergebniss des Versuchs mit dem Trimethylamin bezweifeln zu sollen, da es mir unwahrscheinlich schien, dass das Dimethylamin mit dem niedrigeren Moleculargewicht höher siede als das Trimethylamin. Aus diesem Grunde wurde gleichzeitig mit der Siedepunktsbestimmung des Dimethylamins und bei demselben Barometerstande auch der Siedepunkt des Trimethylamins noch einmal bestimmt. Der mit allerdings nur einer kleinen Menge von Base ausgeführte Versuch ergab den Siedepunkt 9°. Nach dieser Bestimmung würden Dimethylamin und Trimethylamin bei derselben Temperatur sieden.

---

[1] Winkles, Journ. Chem. Soc. VII. 62 (1855).
[2] Hofmann, a. a. O.

Für die neuerdings ausgeführte Siedepunktsbestimmung war die Base aus Tetramethylammoniumhydroxyd gewonnen und zur vollständigen Entwässerung mehrmals über Natrium destillirt worden. Das Volumgewicht, mit dem Piknometer bestimmt, betrug 0.662 bei — 5°2.

Siedepunktsbestimmung.

Barometerstand 746.6. Lufttemperatur — 5°2. Dauer des Versuchs 20 Minuten. Siedepunkt 3°2 bis 3°8.

Aus diesem Versuche erhellt, dass die ursprüngliche Bestimmung des Siedepunkts des Trimethylamins die richtigere war und dass also das Trimethylamin wirklich niedriger siedet als das Drimethylamin. Der Irrthum in der späteren Bestimmung ist theilweise wohl durch die kleine Menge des Amins, welche zur Verwendung kam, verursacht worden, theilweise aber gewiss auch durch Nichtbeachtung der Lufttemperatur, was auch erklären würde, weshalb die Siedepunkte des Dimethylamins und des Trimethylamins bei derselben Temperatur gefunden wurden.

Das Trimethylamin bleibt wie die beiden anderen methylirten Amine bei 10^{mm} Druck und — 75° flüssig.

Bei dieser Gelegenheit soll nicht unerwähnt bleiben, dass das Trimethylamin, wie Dr. Bannow beobachtet hat, in der Kälte ein krystallisirtes Hydrat bildet, welches bei 4°3 schmilzt. Nach einer approximativen Bestimmung enthält dasselbe etwa 30 Procent wasserfreien Trimethylamins. Dies würde ungefähr einer Verbindung mit 1 Mol. Trimethylamin mit 7 Mol. Wasser entsprechen. Eine solche Verbindung, welche etwas mehr als 31 Procent wasserfreier Base enthalten würde, hat jedoch nur geringe Wahrscheinlichkeit. Diese Verbindung verdient genauer untersucht zu werden.

Amine der Äthylreihe.

Gelegentlich der Versuche über die Methylkörper sind auch die äthylirten Basen noch einmal bezüglich ihrer Siedepunkte geprüft worden, obwohl hier keine erheblichen Abweichungen von den bereits bekannten Siedetemperaturen erwartet werden durften.

Äthylamin. Wurtz,[1] der Entdecker, hat das Volumgewicht desselben 0.6964 bei 8° gefunden. Nach demselben Beobachter liegt der Siedepunkt unter Normaldruck bei 18°7.

---

[1] Wurtz, Ann. chim. phys. [3] XXX, 471.

Die für den folgenden Versuch verwendete Base, war aus dem vielmals umkrystallisirten Chlorhydrate dargestellt worden. Das Volumgewicht wurde bei — 2° zu 0.708 gefunden. Die Siedepunktsbestimmung bei dem Barometerstand 768.35 und der Lufttemperatur + 4° führte zu einem Ergebniss, welches mit dem von Wurtz beobachteten nahezu übereinstimmte.

Auch das Äthylamin wird bei einem Druck von 10^{mm} und einer Temperatur von — 75° nicht starr.

Diäthylamin. In der Abhandlung, in welcher ich diese Base zuerst beschrieben habe,[1] ist der Siedepunkt bei 57°5 angegeben. Diese Bestimmung wurde kurz nach der Entdeckung des Diäthylamins zu einer Zeit gemacht, in welcher nur noch eine sehr geringe Menge dieser Base zur Verfügung stand. Viele Jahre später ist die Untersuchung der Eigenschaften des Diäthylamins von A. C. Oudemans[2] wieder aufgenommen und mit peinlichster Sorgfalt ausgeführt worden. Das für die Versuche gebrauchte Material stammte aus den Kahlbaum'schen Werkstätten. Oudemans fand das Volumgewicht 0.72623 bei 0° und den Siedepunkt 55°5 bei dem Barometerstande 759, also 2° niedriger als ich ihn beobachtet hatte.

Das für die neue Siedepunktsbestimmung verwendete Diäthylamin war aus der Nitrosoverbindung gewonnen worden. Mehrmals über metallischem Natrium destillirt, zeigte es das Volumgewicht 0.7107 bei 15°.

Siedepunktsbestimmung.

Barometerstand 767.8; Lufttemperatur 20°. Dauer des Versuchs 15 Minuten. Siedepunkt 55°5 bis 56°.

Der Diäthylamin — seltsame Ausnahme — erstarrt leicht und schnell unter gewöhnlichem Druck bei einer Temperatur von — 50° zu einer krystallinischen Masse. Bei — 40° sind die Krystalle bereits wieder vollständig geschmolzen. Da kein anderes der von mir untersuchten Alkylamime fest wurde, so war ich zunächst geneigt, ein zufälliges Eindringen von Wasser anzunehmen. Allein die Erscheinung blieb unverändert, auch nachdem die Base nochmals über metallisches Natrium rectificirt worden war.

Triäthylamin. Die in meiner Abhandlung angegebene Siedepunktsbestimmung dieser Base stammt ebenfalls aus der Zeit unmittelbar nach ihrer Entdeckung. Der Siedepunkt wurde damals bei 91° gefunden, später hat Brühl[3] den Siedepunkt 89° bis 89°5 bei 336^{mm}5 Barometerstand gefunden.

[1] Hofmann, Proc. R. Soc. XI, 67.
[2] Oudemans, Rec. trav. chim. Pays-Bas. I, 59.
[3] Brühl, Lieb. Ann. CC, 186.

Für die Wiederholung des Versuchs war das Triäthylamin aus Teträthylammoniumhydroxyd dargestellt worden; es zeigte das Volumgewicht 0.735 bei 15°.

Siedepunktsbestimmung.

Barometerstand 767.8; Lufttemperatur 20°. Dauer des Versuches 18 Minuten. Siedepunkt 89° bis 90°.

Bei einem Druck von 10^{mm} und einer Temperatur von — 75° erhielt sich das Triäthylamin vollkommen flüssig.

Weitere Untersuchungen über den todten Raum bei chemischen Reactionen.

Von Prof. Oscar Liebreich.

(Vorgelegt von Hrn. Landolt.)

In einer früheren Mittheilung (diese Berichte 1886 S. 959) habe ich auf eine eigenthümliche Erscheinung aufmerksam gemacht, welche sich bei einigen langsam verlaufenden chemischen Reactionen zeigt. Dieselbe besteht darin, dass in gewissen Theilen der Flüssigkeit die Umsetzung entweder gar nicht oder verspätet oder im geringeren Maasse als in der übrigen Masse auftritt. Diese reactionsfreien Theile habe ich mit dem Namen des todten Raumes bezeichnet.

Um die Ursache der Erscheinung des todten Raumes zu erforschen, ist eine neue Reihe von Versuchen angestellt worden, über welche ich in der vorliegenden Abhandlung berichte.

Als brauchbare Reactionen benutzte ich, wie bisher, die Chloral-Chloroformreaction und ausserdem die Jodausscheidung, welche beim Zusammenbringen von Jodsäurelösung und schwefliger Säure entsteht. Diese beiden sind für das Studium des todten Raumes die geeignetsten.

Andere Reactionen, wie die von Adolf v. Baeyer angegebene Synthese des Indigos aus Orthonitrobenzaldehyd mit Aceton und Kalilauge zeigen ebenfalls die Erscheinung, aber ihre Dauer ist kürzer.

Es lag nahe, Messungen über die Ausdehnung des todten Raumes vorzunehmen, um dieselben zur Erklärung der Gesetzmässigkeit zu verwerthen. Von der Ausführung derselben wurde jedoch vorläufig Abstand genommen, da es vor Allem darauf ankommen musste, die qualitative Natur der Erscheinungen festzustellen, um eine breitere Basis der Anschauung zu gewinnen.

I. Chloral-Reaction.

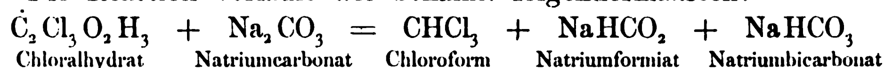
§. 1. Zu derselben wurden benutzt:

1. Eine Lösung von 82gr5 Chloralhydrat im Liter Wasser, (1/2 Molecül im Liter),

2. Natriumcarbonat-Lösungen von 106[gr] im Liter (1 Molekül im Liter).

Es kamen auch Lösungen von doppelter Stärke zur Anwendung, jedoch tritt hier der Übelstand auf, dass das Natriumcarbonat bei der Abkühlung leicht auskrystallisirt, dieselben daher nur leicht angewärmt verwendet werden konnten. Das Reactionsgemisch bestand aus gleichen Theilen der Lösungen.

Die Reaction verläuft wie bekannt folgendermaassen:



$$\underset{\text{Chloralhydrat}}{C_2Cl_3O_2H_3} + \underset{\text{Natriumcarbonat}}{Na_2CO_3} = \underset{\text{Chloroform}}{CHCl_3} + \underset{\text{Natriumformiat}}{NaHCO_2} + \underset{\text{Natriumbicarbonat}}{NaHCO_3}$$

Verschiedene Formen des todten Raumes.

§. 2. Wird das Chloralreactions-Gemisch in offenen Reagensröhren von 10—30 Mm. Durchmesser gefüllt, so zeigt sich je nach der Concentration der angewandten Flüssigkeit, wie bereits beschrieben (a. a. O.), die Ausscheidung des Chloroformnebels als eine milchige Trübung, über welcher eine klare Schicht, der todte Raum sich befindet. Der letztere grenzt sich scharf unter dem Flüssigkeitsmeniscus ab, und zwar in der Weise, dass die Oberfläche des Nebels eine diesem entgegengesetzte Krümmung darbietet. (Fig. 1.) Man beobachtet, falls die Concentration nicht zu gering war, ein leichtes Steigen des Nebels. Die über dem Nebel stehende Flüssigkeit bleibt vollkommen klar, und zu keiner Zeit ist in dieser Schicht eine Ausscheidung des Chloroforms zu erkennen. Nach einiger Zeit, oft erst im Verlauf von einer halben Stunde, hat sich der Nebel gesenkt; es geschieht dies, indem sich grössere Tröpfchen bilden, die zu Boden sinken, um hier als zusammenhängende Chloroformflüssigkeit zu erscheinen. Noch nach 24 Stunden erkennt man die Stelle, bis zu welcher der Chloroformnebel sich erstreckt hatte, dadurch, dass an der Wand kleine Chloroformbläschen haften geblieben sind.

Fig. 1.



Eine Senkung in der Weise, dass sich der todte Raum als klare Flüssigkeit bis nach dem Boden des Gefässes vergrössert, konnte nie beobachtet werden.

§. 3. Füllt man Reagensröhren, welche durch einen Kork luftdicht verschlossen und mit dem letzteren nach unten aufgestellt werden, etwa bis zur Hälfte mit dem Reactionsgemisch, so tritt der todte Raum wie beschrieben ein. Derselbe ist jedoch nicht zu bemerken, wenn man das umgekehrt aufgestellte Reagensglas (Fig. 2) bis unter die convexe Oberfläche füllt, so dass nur eine kleine Luftblase *a* übrig

bleibt. Das Ausbleiben desselben ist jedoch nur scheinbar, es beruht auf einer optischen Täuschung. Taucht man nämlich das in Klammern befestigte Reagensglas in einen mit Wasser gefüllten Glaskasten mit parallelen Wandungen (käufliche Aquarien), so wird der todte Raum wie in untenstehender Fig. 3 bei *a* sichtbar.

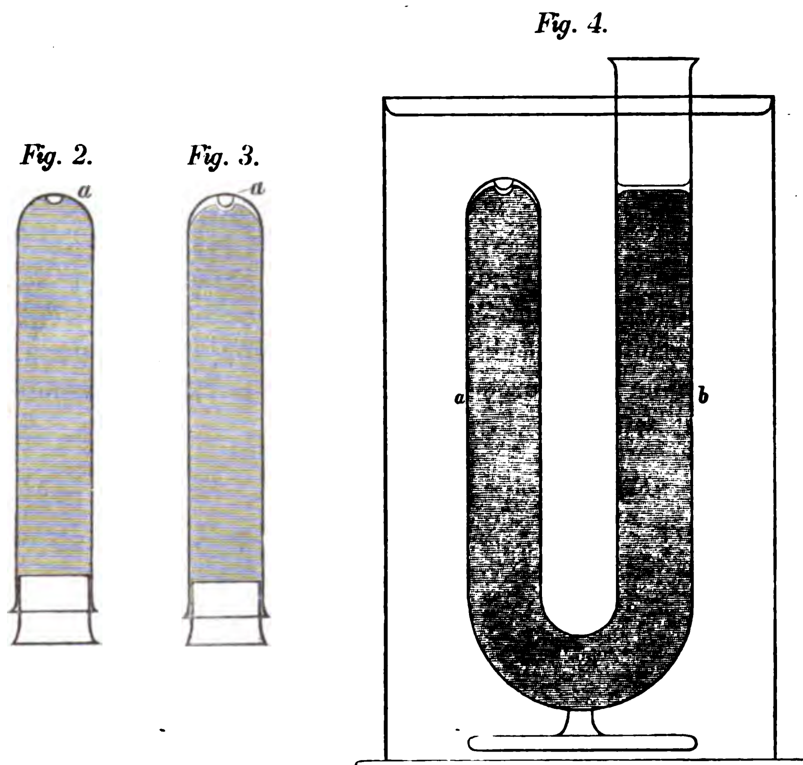


Fig. 2. *Fig. 3.* *Fig. 4.*

Da in einem durch einen Kork verschlossenen Reagensglase ein Druck auf die Flüssigkeit ausgeübt wird, so wurde durch Benutzung eines U förmig gebogenen Rohres jede Druckänderung vermieden. Um im Wasserkasten die Beobachtung vornehmen zu können, war das offene Schenkelrohr *b* (Fig. 4) so hoch bemessen, dass es über dem Wasser hervorragte. Die Füllung geschah in der Weise, dass in dem Schenkel *a* eine kleine Luftblase belassen und die Flüssigkeit in beiden Schenkeln gleich hoch stand. Beim Einstellen in den Wasserkasten konnte auch hier der todte Raum beobachtet werden.

§. 4. Die beschriebene Erscheinung bei kleinsten sichtbaren Luftblasen schien eine Abweichung der im §. 2 beschriebenen Form zu zeigen. Um diese genauer beobachten zu können, wurden Rundkolben von etwa 150^{ccm} Inhalt benutzt, mit dem Reactionsgemisch bis zu verschiedenen Höhen gefüllt und nach Verschluss der Öffnung mit

der Kugel nach oben gerichtet in einem Wasserkasten aufgestellt. Hier zeigte sich, dass wenn nur die untere Kugelhälfte gefüllt war, der todte Raum sich in einer Ebene gegen die Oberfläche abgrenzte und an der Wand in einer dem Meniscus entgegengesetzten Krümmung allmählich abbog, wie in nebenstehender Figur ersichtlich. $a\,a'$ ist die Grenze der Flüssigkeit gegen die Luft, $\alpha\,\alpha'$ die Grenze des Chloroformnebels gegen den todten Raum. Stellt man nun die Versuche in der Weise an, dass man bei jedem folgenden eine grössere Füllung des Gefässes vornimmt, so sieht man, dass die Begrenzung des todten Raumes nicht mehr als eine continuirliche, dem Meniscus gleichmässig entgegengesetzte Krümmung verläuft. — Eine solche Abweichung beginnt dann, wenn die abgeschlossene Luft durch eine ersichtlich überall gekrümmte Oberfläche begrenzt wird.

Fig. 5.

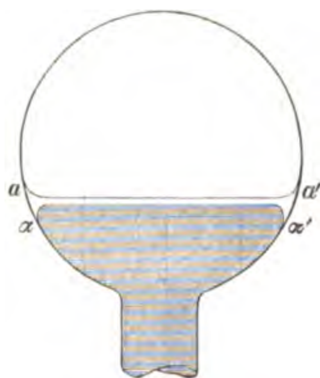


Fig. 6.



Fig. 7.

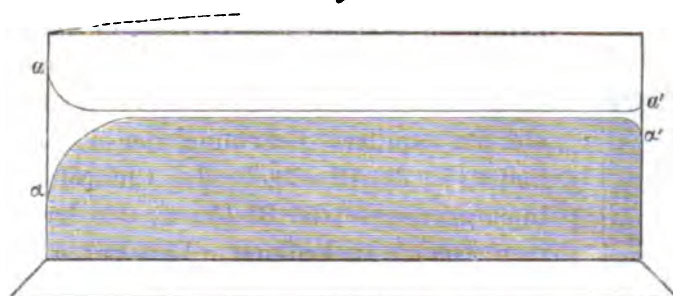


In Fig. 6 beginnt diese beschriebene Form aufzutreten. Fig. 7 zeigt deutlich die Abweichung.

Nach diesen Versuchen schien es wichtig die Abhängigkeit der Gestalt des todten Raumes von der Form der Flüssigkeitsoberfläche weiter zu verfolgen.

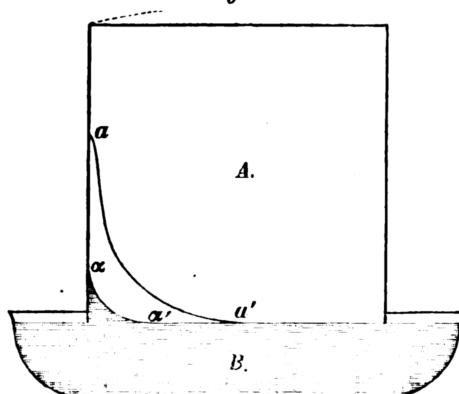
§. 5. Ich hatte schon in der ersten Abhandlung (a. a. O.) beschrieben, dass in einem prismatischen Glaskasten der todte Raum sich in folgender Weise darstelle: dort, wo die Flüssigkeitsoberfläche Fig. 8 $a\,a'$ eben ist, bildet die Grenze des Chloroformnebels $\alpha\,\alpha'$ eine der Oberfläche parallele Ebene, da wo die Entfernung der Glasplatten des

Fig. 8.



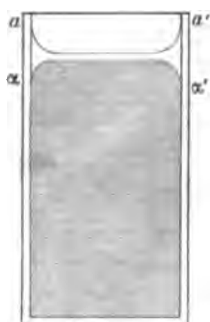
Prismas von einander eine relativ geringe ist und sich ein aufwärts steigender Meniscus bildet, krümmt sich die Grenzfläche des Chloroformnebels dem Flüssigkeitsmeniscus entgegengesetzt nach unten. Die Oberfläche des Chloroformnebels bildet auch in diesem Falle einen Gegenmeniscus. Anders verhält es sich bei folgender Anordnung. Durch Glasplatten, welche in einem Winkel sich verstellen lassen, ist man in der Lage verschiedene Menisceu herstellen zu können. Die zu dem Versuche benutzten Glasplatten *A* befanden sich oben in Messingfassung mit Charnier beweglich und konnten an einem Stativ befestigt in das Reactionsgemisch *B* eingetaucht werden. Bei einem Winkel von 9°—15°, unter dem sich die Kanten der Glasplatten berührten, zeigte sich folgendes Bild: *a a'* ist die Grenze der Flüssigkeitsschicht, *α α'* die Grenze des Chloroformnebels. Man ersieht hier, dass die Oberfläche des letzteren mit der Flüssigkeitsoberfläche sich in gleich gerichteter Weise krümmt. Der todte Raum wird also in diesem Falle in anderer Weise, wie bisher beschrieben, begrenzt. Bei den nächsten Versuchen treten solche Abweichungen noch deutlicher hervor.

Fig. 9.



§. 6. Die bisher beschriebenen Formen zeigen, dass, wenn man eine Abhängigkeit der Krümmungsfläche des Chloroformnebels von der Oberfläche der Flüssigkeit, in der er entsteht, hypothetisch annimmt, diese nicht allein bestimmend für die Form des todten Raumes sein kann, sondern andere Wirkungen mit in Betracht gezogen werden müssen.

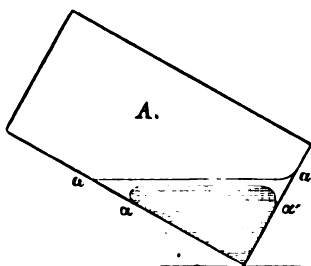
Fig. 10.



Benutzt man eine Glasflasche mit vierseitigen parallelen Wandungen, so verläuft die Erscheinung in Übereinstimmung mit dem Versuch des §. 5 im prismatischen Kasten. An den Wänden (Fig. 10), wo die capillare Erhebung der Flüssigkeit stattfindet, ist die Oberfläche des Chloroformnebels $\alpha\ \alpha'$ in entgegengesetzter Richtung, wie der Flüssigkeitsmeniscus $a\ a'$ gekrümmt. Es wurden nun folgende Modificationen eingeführt.

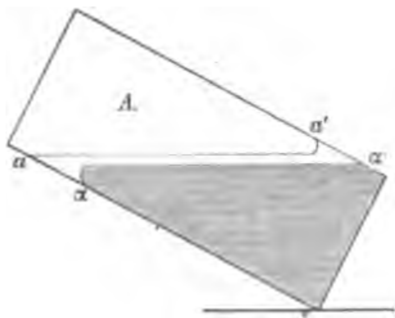
Die Glasflasche A wurde schräg gestellt (Fig. 11), die Füllung nun so weit vorgenommen, dass die Flüssigkeit vier Wände berührt. Es bildet dieselbe dann an der Bodenwand einen stark gekrümmten Meniscus, an der dem Boden gegenüberliegenden Seite dagegen berührt die Flüssigkeit fast in einer horizontalen Ebene die Wand.

Fig. 11.



Es zeigt sich hier, dass an einer Seite, wo der Meniscus der Flüssigkeit am stärksten gewölbt ist, a', sich die Oberfläche des Chloroformnebels in entgegengesetzter Richtung krümmt. Auf der Seite, wo die Oberflächenkrümmung sehr klein ist, a, wird eine fast eben so starke Krümmung der Oberfläche des Chloroformnebels α beobachtet, wie auf der Seite $a'\alpha'$. Noch deutlicher wird die Erscheinung, dass auch unter einer Flüssigkeitsoberfläche mit geringerer mittlerer Krümmung eine stärkere Wölbung der Fläche des Chloroformnebels auftreten kann, wenn die Füllung so geschieht, dass bei dem schräg liegenden Gefäss A (Fig. 12) zwei gegenüberstehende parallele Wände oben und unten von dem Reactionsgemisch berührt werden, es liegt hier unter der stärkeren gekrümmten Fläche des Meniscus bei a' die fast ebene Grenzfläche des Chloroformnebels bei α'. Unter der fast ebenen Oberfläche der Flüssigkeit bei a befindet sich, wie bei Fig. 11, eine stark gekrümmte Fläche des Chloroformnebels. Ich möchte jedoch bemerken, dass diese Formen nicht immer mit derselben Regelmässigkeit beobachtet wurden.

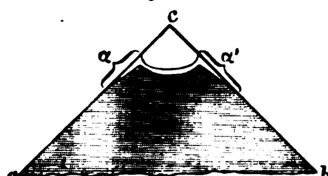
Fig. 12.



Wird die Flasche mit dem Reactionsgemisch gefüllt schräg mit der verschlossenen Öffnung nach unten gestellt, so zeigt sich, ähnlich

wie bei dem Rundkolbenversuch §. 4 beschrieben, die in der Fig. 13 gezeichnete Form.

Fig. 13.



§. 7. Da bei diesen und anderen Versuchen an der Wand ein keilförmiges Stück α und α' des todten Raumes sichtbar wurde, so war es angezeigt, eine Anordnung zu treffen, welche es gestattete, den todten Raum bei einer Oberfläche zu beobachten, bei welcher die Seitenwände *ac* und *bc* sich in horizontaler Lage befanden.

Es wurden parallelepipedische Glaströge von 80^{mm} Höhe, 47^{mm} Länge und 34^{mm} Breite angewandt. Auf den eben geschliffenen Rand wurden verschieden grosse Glasplatten gelegt, welche das Gefäss nur theilweise zudeckten, so dass also beliebig grosse Öffnungen frei gelassen werden konnten. Beim Auflegen einer einzigen Platte konnte entweder Öffnung auf einer Seite oder beim Auflegen in der Mitte zwei Seitenöffnungen erhalten werden. Es wurden auch zwei Platten an der Seite aufgelegt, so dass eine mittlere Öffnung frei blieb. Vor Anstellung des Versuches wurde der Glastrog auf einen kleinen Nivellirtisch gestellt und seine Ränder mit Hülfe einer Libelle in eine horizontale Lage gebracht. Es wurde dann der Trog nach Auflegung der Glasplatten mit dem Chloralreactions-Gemisch gefüllt und zwar so, dass die Öffnung des Troges von einer möglichst concav gespannten Oberfläche begrenzt wurde. Die Formen des todten Raumes zeigen sich in beistehenden Figuren wie folgt. Bei nur einem concaven Flüssigkeitsmeniscus (Fig. 14 und 15) ist stets an der seitlichen verticalen Wand *b* das Profil der Chloroformnebelfläche nach unten entgegengesetzt dem Meniscus abgebogen. Auf der Seite der bedeckenden Glasplatte *e* dagegen, dort wo die Flüssigkeitsoberfläche sich nach oben wendet, ist die grösste Annäherung des Nebels an dieselbe bei *a*. Von diesem Punkte an geht das Profil der Grenze des Nebels als gerade schräg aufsteigende Linie an die untere Seite der bedeckenden Glasplatte bei *c*.

Fig. 14.



Fig. 15.



In ganz ähnlicher Weise findet die Begrenzung in derjenigen Anordnung statt, welche in Fig. 16 wiedergegeben ist. Die bedeckende Platte *e* liegt auf der Mitte der Oberfläche, zu beiden Seiten befindet



Fig. 16.

sich die concav gewölbte Oberfläche der Flüssigkeit. Der todte Raum liegt hier unter der bedeckenden Glasplatte *e*, und zwar bildet die Grenze des Chloroformnebels eine ebene Fläche unter der Glasplatte. Dieselbe legt sich dann beinahe vollständig an die aufsteigende Krümmung des Flüssigkeitsmeniscus bei *a* und *a'* an, und verläuft dann der Flüssigkeitsoberfläche parallel, um an der verticalen Wand ebenso wie in Fig. 14 und 15 dem Flüssigkeitsmeniscus entgegengesetzt abzubiegen.

Bedecken die Glasplatten *e* und *e'* die seitlichen Theile des Gefässes (Fig. 17), so befindet sich nach der Füllung mit dem Reactionsgemisch die Flüssigkeitsoberfläche in der Mitte des Gefässes. Der todte Raum wird dann von dem Chloroformnebel in der Weise begrenzt, dass zuerst die Oberfläche desselben parallel mit der ebenen Oberfläche der Flüssigkeit verläuft, dann sich dort umbiegt wo die Flüssigkeitsoberfläche in die Höhe steigt und schliesslich in schräg aufsteigender Richtung sich nach den bedeckenden Glasplatten *e* und *e'*. zu wendet.



Fig. 17.

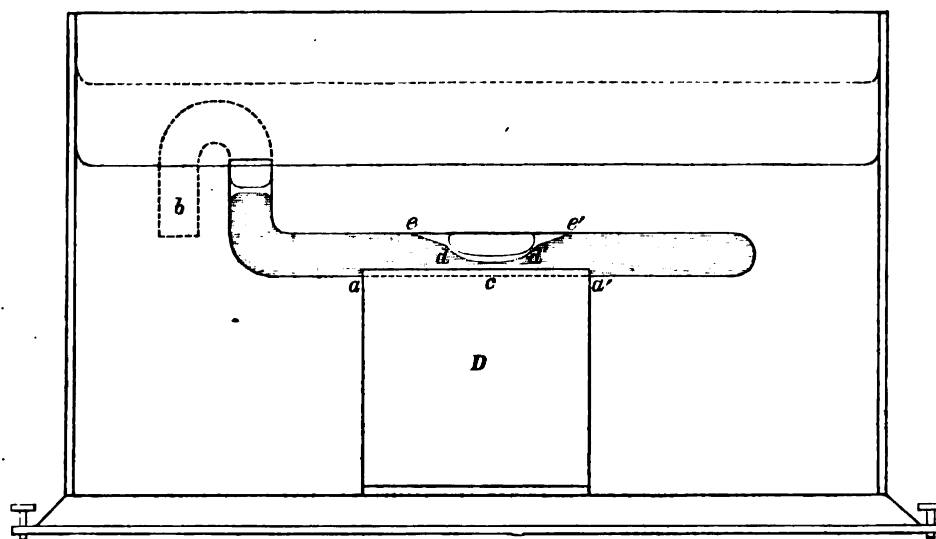
Alle diese Erscheinungen treten auch bei grösseren und kleineren Gefässen stets mit derselben Regelmässigkeit ein. Dagegen habe ich folgende Form des todten Raumes nicht constant beobachten können: Lässt man die bedeckende Platte nur sehr klein sein wie in Fig. 18, so bildet sich die nach der Wand zugehende schräg aufsteigende Oberfläche des Chloroformnebels. Dieselbe legt sich jedoch nicht an die obere Glaswand an, sondern biegt nach der verticalen Wand ab und schliesst bei *c* an dieselbe an. Diese Versuche machen es wahrscheinlich, dass ausser der Flüssigkeitsoberfläche die feste Glaswand sich an der Bildung des todten Raumes betheiligt. Um daher den gemeinsamen Einfluss der Wand und der Flüssigkeitsoberfläche weiter zu verfolgen, wurden folgende Versuche angestellt.



Fig. 18.

§. 8. Es wurde die Begrenzung der Reactionsflüssigkeit durch eine Libellenluftblase in einem cylindrischen Rohr hergestellt. Dies geschah folgendermaassen (Fig. 19.) Das Rohr war 18^{mm} weit, 160^{mm} lang, am Ende entweder rechtwinklig gebogen oder mit einer Bogen-

Fig. 19.



krümmung versehen. Es wurde dasselbe mit dem Reactionsgemisch gefüllt, auf einen Glastrog *D* gelegt, dessen Wände bei *aa'* ein wenig ausgeschnitten waren, um das Abrollen zu verhindern, und so in einen entsprechend grossen Wasserkasten mit parallelen Wandungen hineingesetzt, um bei der Beobachtung die durch die cylindrische Gestalt des Rohres bedingte optische Wirkung aufzuheben. Bei Anwendung eines rechtwinklig gebogenen Rohres ragte das freie Ende über die Oberfläche des Wassers hinaus, bei einem doppelt gebogenen Rohr tauchte die Öffnung ins Wasser (*b*). Um die Libellenluftblase in die Mitte des Rohrs zu bringen, befand sich der Wasserkasten auf einem Nivellirtischchen.

Vor der Entstehung des todten Raumes änderte, ohne sich zu verschieben, die Libellenblase ihre anfängliche Form; sie verlängerte sich um ein Bedeutendes, und zwar bei einer Länge von etwa 30^{mm} um ungefähr 10^{mm}. Wie bei allen bisherigen Versuchen markirte sich die Grenze des Chloroformnebels scharf und zeigte folgende Gestalt. Die Krümmung unter der Flüssigkeitsoberfläche hatte denselben Sinn wie diejenige der Libellenblasen-Oberfläche. Die gegenseitige Entfernung der beiden Oberflächen war bei *c*, dort wo die mittlere Krümmung der Blasenfläche ihren kleinsten Werth hat, am grössten, und bei allmählicher Zunahme der mittleren Krümmung der Blasenoberfläche nahm sie mehr und mehr ab, um dort, wo die Richtung des Libellenblasenprofils scheinbar senkrecht zur Röhrenaxe ist (*dd'*), fast ganz zu verschwinden. Von diesem Punkte an zeigt sich das Profil der Begrenzung des Chloroformnebels als eine schräg nach oben

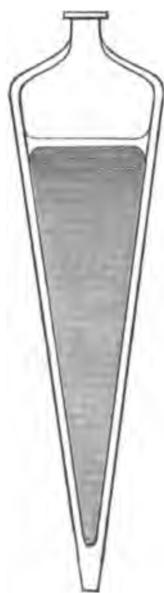
gehende gerade Linie, welche die Röhrenwand oben berührt, *ee'*. (Vergl. §. 7.)

Es ist gleichgültig, ob man die Libellenblase grösser oder kleiner wählt, die Erscheinung tritt stets mit gleicher Regelmässigkeit auf.

Besonders bei diesem Versuche wird man auf die Vermuthung geführt, dass die feste Wand auf die Form des todten Raumes ebenso von Einfluss ist wie die Beschaffenheit der Flüssigkeitsoberfläche.

§. 9. Bei der Anstellung des Versuches in einem prismatischen Kasten hatte sich sehr deutlich gezeigt, dass die Reaction nicht an allen Stellen des Gefässes gleichzeitig eintritt. Gewöhnlich unter der Oberfläche da, wo sie am breitesten ist beginnend, schob sich die Reaction schollenweise in die von den Glasplatten verengten Theile der Flüssigkeit vor.

Fig. 20.



Um den Einfluss der Wand auf die Zeit des Reactionseintrittes zu prüfen, wurde folgender Versuch angestellt.

Das Chloralreactionsgemisch wird in ein aufrecht befestigtes, 230^{mm} hohes und 50^{mm} breites Indigolösungs-Prisma gefüllt, Fig. 20, dessen Seitenwände einen Winkel von etwa 8° mit einander einschliessen. Um die Dichte des Nebels beurtheilen zu können, wird das Prisma so aufgestellt, dass man durch die parallelen Glaswandungen desselben hindurchsehen konnte. Man beobachtet nun, dass unmittelbar unter der Flüssigkeitsoberfläche sich haarscharf der todte Raum bildet; während hier der Chloroformnebel eine grosse Dichte zeigt, sind die unteren Schichten anfangs klar, um allmählich auch ihrerseits die Trübung anzunehmen. Die Spitze füllt sich zuletzt und anscheinend besonders verzögert. Man kann also sagen, dass die Reaction in einem Flüssigkeitsquantum um so später eintritt, je grösser die zu ihm gehörige Wandfläche in Verhältniss zu seinem Rauminhalt ist.

§. 10. Bringt man in Capillarröhren einen einzigen Flüssigkeitsfaden hinein, so beobachtet man unter dem Mikroskop (Fig. 21) die Ausscheidung des Chloroformnebels als feine Punkte, *a*, die sich allmählich zu Tröpfchen vereinigen. Die beiden Enden des Flüssigkeitsfadens *b*, *b'* bleiben jedoch vollkommen klar. Ich betone hier besonders, dass man nicht mehrere von einander getrennte Flüssigkeitsfäden in dem Capillarrohr haben soll, weil sonst die beschriebene Erscheinung nicht eintritt, und werde auf diesen

Fig. 21.



Punkt später zurückkommen (s. §. 12 Schluss). Als Beispiel diene folgender Fall:

Weite des Capillarrohrs $0^{mm}.336$,
Länge des Flüssigkeitsfadens 36^{mm},
Länge des todten Raumes $2^{mm}.080$.

Die Messungen wurden mit einem Mikroskop von C. Zeiss, Jena, nach bekannter Methode ausgeführt.

§. 11. Die bisher beschriebenen Versuche zeigen ein regelmässiges Bild, das in keinem Falle ohne Weiteres auf Grund der Erfahrungen, die wir gegenwärtig über chemische und physikalische Vorgänge besitzen, gedeutet werden kann. Vor Allem war es nöthig, chemische und physikalische Einflüsse, die möglicher Weise bei der Entstehung des todten Raumes betheiligt sind, auf ihre Mitwirkung bei dem Zustandekommen der Phaenomens hin zu prüfen. Solche sind:

1. Verdampfung, da das Chloroform eine hohe Dampfspannung besitzt und bei 62° siedet;

2. Strömungserscheinungen, welche von der Verdampfung abhängig sind;

3. einfache Senkung und

4. sogenannte Contactbewegungen.

§. 12. Es unterliegt keinem Zweifel, dass bei der Bildung des Chloroforms ein Theil desselben verdampft. Aus diesem Grunde ist das Ausbleiben des Chloroformnebels in Flüssigkeit von grosser Oberfläche und kleinem Volumen nicht mit Sicherheit als todter Raum anzusprechen. Die Verdampfung aber als Ursache des todten Raumes anzunehmen, ist schon durch die scharfe Grenze und eigenthümliche Form desselben ausgeschlossen. Es giebt allerdings eine Versuchsanordnung, welche, wenn nur für sich allein betrachtet, zu der Anschauung führen könnte, dass die Verdampfung die Ursache des todten Raumes sei. Verschliesst man ein mit dem Reactionsgemisch halb gefülltes Reagensglas durch einen mit Chloroform getränkten Wattebausch, so tritt der todte Raum nicht ein. Man kann sich hier vorstellen, dass das Chloroform, welches sich im Reactionsgemisch bildet, nicht verdunsten kann, weil die Luft darüber mit Chloroform gesättigt ist. Man sieht aber auch bei einem bereits gebildeten todten Raum denselben verschwinden, wenn ein Bausch mit Chloroform getränkt eingeführt wird. Es füllt sich der todte Raum mit Chloroformnebel. Diese letzte Thatsache weist darauf hin, dass die Wirkung des Chloroformdampfes nicht in einer Behinderung der Verdampfung zu suchen ist, sondern in einer anderen Eigenschaft, nämlich in dem Einfluss auf die Oberfläche der Flüssigkeit. Dafür spricht folgender Versuch. Bedeckt man in einem Rohr von einigen Millimetern Weite das Re-



Fig. 22.

actionsgemisch mit einem Tropfen Safrol, so könnte das Chloroform, welches sich bildet, in diesen Tropfen hinein diffundiren und ein todter Raum sich bilden, es zeigt sich jedoch derselbe nicht. Anders verhält sich der Vorgang, wenn man an Stelle des Safrol Paraffinöl anwendet, wobei ebenfalls das Chloroform hinein diffundiren kann, hier zeigt sich der todte Raum; also kann die Ursache nur in einer verschiedenen Wirkung dieser beiden Substanzen auf die Oberfläche angenommen werden. Zur Unterdrückung des todten Raumes gehört übrigens eine vollständige Sättigung der über der Flüssigkeit sich befindenden Luft. Bedeckt man nämlich die Flüssigkeit an der Oberfläche in der Mitte mit einem Chloroformtropfen *a* (Fig. 22), so wird an den Seiten bei *b* und *b'* der todte Raum sichtbar, da hier keine Sättigung der Luft mit Chloroformdampf stattfindet.

Aus diesen Thatsachen erklärt sich auch, weshalb in allen den Fällen, in welchen über der Reactionsflüssigkeit nur ein kleiner lufthaltiger abgeschlossener Raum sich befindet, wie in den Versuchen §. 3 Fig. 3 und §. 4 Fig. 7 und bei der Libellenblase, §. 8 Fig. 19, der todte Raum einige Zeit nach seiner Bildung wieder verschwindet. Es ist ferner auch verständlich, weshalb die gleiche Erscheinung auftritt, wenn in einer Capillarröhre mehrere durch Lufträume *a* (Fig. 23) von einander getrennte Fäden des Reactionsgemisches sich befinden. Man sieht in diesem Falle zunächst an den Enden des Flüssigkeitsfadens die todten Räume *b* entstehen, wie in §. 10 Fig. 21; dieselben verschwinden, sobald in den Lufträumen *a*, welche kälter als die Reactionsflüssigkeit sind, sich Chloroform (Fig. 24) in Tröpfchen condensirt, während an den freien Oberflächen *b* der todte Raum bestehen bleibt.

Fig. 23.

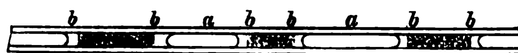


Fig. 24.

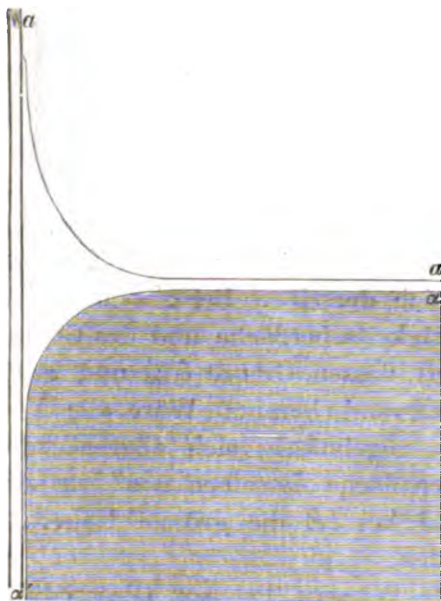


Wenn ferner die Verdampfung des Chloroforms die Ursache des todten Raumes wäre, so müsste derselbe selbstverständlich um so grösser sein, je höher die Temperatur des Reactionsgemisches genommen wird. Der Versuch lässt aber gerade das entgegengesetzte Verhalten erkennen. Es wird der todte Raum um so grösser, je niedriger die angewandte Temperatur ist.

§. 13. Einen weiteren Punkt zur Beurtheilung der auftretenden Verhältnisse bietet die Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche. Gehen wir von

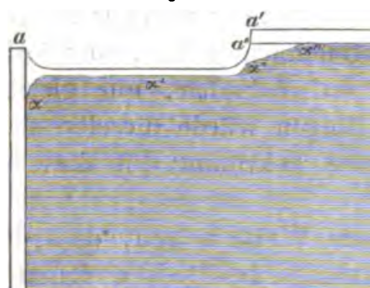
der Annahme aus, dass die Verdampfung mit der mittleren Krümmung einer concaven Fläche zunimmt, so würde jedesmal der grösseren mittleren Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche eine grössere Entfernung des Chloroformnebels von ihr entsprechen. Betrachten wir die in dem §. 5 beschriebene Form des todten Raumes: so lange noch die Fläche *a a* (Fig. 25) horizontal ist, wird die Verdampfung an allen ihren Stellen eine gleichmässige sein, an diesen Stellen könnte also die Begrenzung des todten Raumes in Folge von Verdunstung wirklich einer Ebene entsprechen. Beim Beginne der Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche nimmt die Verdampfungsgeschwindigkeit zu; denken wir uns die Oberfläche des Nebels als Verdampfungsgrenze, so würde hier die Möglichkeit eines solchen Vorganges vielleicht angenommen werden können, da in der That die Krümmung *a a* der Verdampfungsgrenze mit den eben dargelegten Auseinandersetzungen nicht im Widerspruche steht. Dass aber diese hypothetische Annahme nicht den Thatsachen entspricht, zeigt die nachfolgende Betrachtung.

Fig. 25.



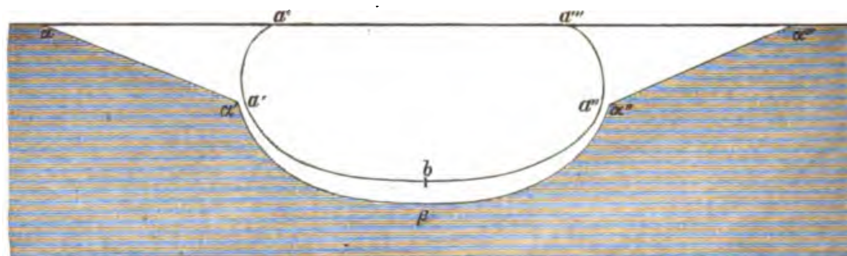
In Fig. 26 ist die Flüssigkeitsoberfläche $a\,a'$, die Grenze des Chloroformnebels $\alpha\,a'\,a''\,\alpha'''$, die a gegenüberliegende Abbiegung der Oberfläche des Chloroformnebels würde bis zur Mitte der Flüssigkeitsoberfläche $a\,a'$ gerade so wie in Fig. 25 möglich erscheinen. Dem entsprechend müsste aber von α'' ab die Abbiegung der Oberfläche des Chloroformnebels entgegengesetzt weiter verlaufen. Statt dessen nähert sich diese Oberfläche beinahe bis zur Berührung der Flüssigkeitsoberfläche bei a'' und tritt von hier schräg nach oben an die bedeckende Glasplatte. Diese Thatsache steht mit der zuerst eingeführten Hypothese in grellem Widerspruch, denn es entspricht der grössten mittleren Krümmung nur auf einer Seite die grösste Tiefe des todten Raumes, und die Annahme der Verdampfung als Entstehungsursache des todten Raumes wird bei dieser Form unmöglich.

Fig. 26.



Noch schlagender wird die Abweisung der Verdampfungshypothese bei der Betrachtung des todten Raumes unter der Libellenblasenoberfläche (Fig. 27). Hier ist die mittlere Krümmung bei b am

Fig. 27.



kleinsten und vergrössert sich symmetrisch nach beiden Seiten; die grösste Breite des todten Raumes jedoch ist bei $b\beta$ und mit Zunahme der mittleren Krümmung verengert sich derselbe. Bei $a'\alpha'$ und $a''\alpha''$ finden scheinbar Berührung der Flüssigkeitsoberfläche und des Chloroformnebels statt. Von hier aus tritt dessen Grenze $\alpha\alpha'$ und $\alpha''\alpha'''$ in schräger Richtung an die Röhrenwand heran. Wäre die Verdampfung wirklich die Ursache des regelmässig sich abgrenzenden Chloroformnebels, so müsste die Grenzfläche desselben $\alpha'\alpha''$ die entgegengesetzte Krümmung zeigen und bei $b\beta$ die grösste Näherung an die Flüssigkeitsoberfläche stattfinden.

Nach den Berechnungen von Sir William Thomson (Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 1869-1870) können bei den geringen Niveaudifferenzen der Flüssigkeitsoberfläche aus den an den verschiedenen Stellen der Libellenblase vorhandenen Spannungsdifferenzen überhaupt nur sehr geringe Verdampfungsunterschiede sich ergeben. Wenn man daher eine durch Verdampfung weniger chloroformhaltige Schicht unter der Oberfläche annehmen wollte, so würde dieselbe für das Auge, wenn überhaupt wahrnehmbar, nur gleichmässig verlaufen können, und vor allen Dingen würde dieselbe sich in gleicher Richtung wie die Libellenblase gekrümmt an dieselbe anlegen müssen.

§. 14. Es lässt sich noch auf weitere Weise zeigen, dass die Verdampfung nicht die Ursache der Bildung des todten Raumes sein kann.

Während die bisher beschriebenen Versuche sich dadurch charakterisirten, dass bei ihnen die freie Flüssigkeitsoberfläche eine concave war, sollen jetzt einige Gestalten des todten Raumes beschrieben werden, die einer convexen entsprechen.

Es wurden kleine parallelepipedische Glaströge mit quadratischer Grundfläche benutzt und mit dem Reactionsgemisch bis zum Rande

so hoch angefüllt, dass die Flüssigkeitsoberfläche einen convexen Meniscus bildete. Ein zweites Gefäss erhielt zur Vergleichung blos Füllung zu dreiviertel, wobei die Oberfläche also einen concaven Meniscus zeigte. Nach Eintritt der Reaction war folgende Erscheinung zu beobachten. In dem ersten Gefäss (Fig. 28) konnte ein todter Raum mit blossem Auge nicht wahrgenommen werden, dagegen trat in dem zweiten Gefäss mit concavem Meniscus die gewöhnliche Erscheinung des todten Raumes zu Tage (s. Fig. 10). Da die Wölbung der Oberfläche in dem ersten Gefäss bei Beobachtung mit dem blossen Auge die Beurtheilung, ob unter derselben eine klare Schicht sich befinde, unmöglich machte, so musste ein anderes Verfahren zur Prüfung der Ausdehnung des todten Raumes eingeschlagen werden.

Fig. 28.

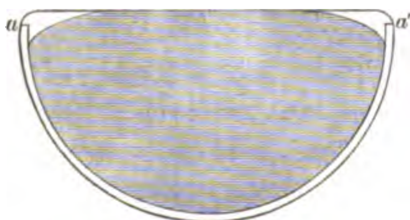


Ich bediente mich zu dem Zweck kleiner Capillaren von $0^{mm}.6$ Durchmesser und dünner Wand, mit denen die Oberfläche abgesaugt wurde. Wenn man aus den mittleren Theilen des convexen Meniscus abhebt, enthält die Capillare nur trübe Flüssigkeit, von den seitlicheren gemischte, ganz am Rande vollkommen klare. Die letztere nebelfreie Partie liess sich auch bei der directen Besichtigung von oben erkennen. Bei diesem Verfahren muss man sich beeilen, da sich in den Capillaren sehr bald ein todter Raum bildet. Eine sichere Hand hebt die Flüssigkeit besser ab, als Apparate, welche in Anwendung gezogen waren.

Von dem zweiten Glasgefäss, in welchem der concave Meniscus war, konnte mit Leichtigkeit klare Flüssigkeit abgehoben werden.

Füllt man einen Glastrog mit Flüssigkeit so auf, dass dieselbe durch eine Ebene begrenzt wird, so zeigt sich nur an den Kanten eine kleine klare Stelle. An zahlreichen anderen Gefässen wurde dieselbe Erscheinung mit Hülfe von Capillaren beobachtet, so auch an einer halbkugelförmigen Schale von 5^{cm} Durchmesser (Fig. 29). Der Nebel trat bis zur Oberfläche, und nur an den Seiten war eine der Oberfläche gleich gerichtete Abbiegung des Chloroformnebels aa' zu bemerken.

Fig. 29.



Diese Erscheinungen sind wiederum mit der Annahme, dass der todte Raum durch Verdampfung von Chloroform gebildet werde, nicht in Einklang zu bringen, denn in diesem Falle müsste sich derselbe

ebenso gleichmässig unter einer convexen wie unter einer concaven Flüssigkeitsoberfläche zeigen.

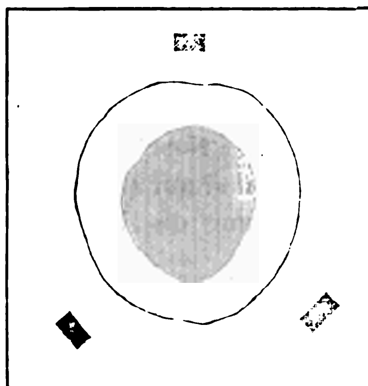
§. 15. Die Senkungs- und Strömungserscheinungen habe ich zur Erklärung des todten Raumes ebenfalls in Betracht gezogen, und es zeigt sich bei einzelnen Formen eine nicht zu verkennende Ähnlichkeit mit denselben. Zu den Versuchen wurde eine Mischung von Lycopodium in Alkohol oder Terpentinöl benutzt. Zweckmässig entfernt man die schwerer sinkenden Samen durch Schlemmen und benutzt eine nicht zu dicke Mischung. Werden die in den Versuchen von §. 7 angewandten Glaströge mit partieller Bedeckung benutzt, so sieht man den Beginn einer Senkung unter der Glasplatte; ein Strom der Samen bewegt sich unter der freien Oberfläche und etwa 10^{mm} tief an der an dieselbe anstossenden Wand entsteht ein Wirbel, der zur Bildung eines lycopodiumfreien Raumes führt.

Wird der prismatische Kasten (s. §. 5) mit der Mischung gefüllt, so tritt durch die Senkung eine sehr scharfe Begrenzungslinie ein, welche die Trübung von der klaren Flüssigkeit trennt. Jedoch konnte nie eine dem Meniscus entgegengesetzte Abgrenzung bemerkt werden.

Füllt man den in §. 4 beschriebenen Rundkolben mit dem Lycopodiumgemisch, indem man eine Luftblase in der Kugel belässt und stellt den Apparat behufs Ertheilung gleichmässiger Temperatur in den Wasserkasten, so ist eine Senkungserscheinung zu beobachten, welche dem todten Raume ähnlich ist. Diese Ursache kann aber bei der Chloralreaction nicht in's Spiel kommen, da in dem bei dieser auftretenden reactionslosen Raum überhaupt kein Niederschlag entsteht.

Die bei den Senkungserscheinungen eintretenden Wirbel können auch bei dem Chloroformnebel bisweilen beobachtet werden. Dass diese aber nicht zur Bildung eines todten Raumes führen, zeigen folgende Versuche.

Fig. 30.



Bringt man zwischen zwei Glasplatten, welche durch $0^{mm}.25$ dicke Kautschukblättchen von einander getrennt sind, einige Tropfen des Chloralreactionsgemisches, so entsteht nach einiger Zeit eine kleine Chloroformnebelinsel von todtem Raum umgeben, ohne dass sich die Contour desselben durch Strömung ändert (Fig. 30). Mit Sicher-

heit kann man ferner mit Hülfe von Capillaren erkennen, dass Wirbelbewegungen oder sogenannte Contactbewegungen der ausgeschiedenen Chloroformtröpfchen nicht die Ursache sind. Füllt man nämlich eine Capillare von $0^{mm}34$ Durchmesser mit dem Chloralreactionsgemisch, so dass ein continuirlicher Flüssigkeitsfaden sich in derselben befindet, so sieht man mit Hülfe des Mikroskops, dass bei Bildung des todten Raumes die Ausscheidung des Chloroforms als Nebel erfolgt, ohne dass die zuerst ausgeschiedenen punktförmigen Massen und die später sich bildenden Chloroformtröpfchen irgend welche Bewegung gegen einander zeigen.

II. Versuche mit Jodsäure und schwefliger Säure.

§. 16. Zu den Reactionen wurde benutzt: 1. eine Lösung von $0^{gr}25$ Jodsäure im Liter, 2. schweflige Säure von der Concentration 0.887 im Liter, mit Jodlösung titrirt. Nach der Landolt'schen Formel (diese Berichte 1886, S. 210) mussten auf 100 Volumtheile Jodsäure weniger als 109.28 Volumtheile schweflige Säure gerechnet werden. Bei den folgenden Versuchen waren es 106.44, wenn die Mischung aus 10^{ccm} Jodsäure und 3^{ccm} schwefliger Säure hergestellt wurde.

§. 17. Das centrale Auftreten der Jodstärkereaction im Centrum einer vertical stehenden Glasröhre hatte ich bereits in der ersten Abhandlung hervorgehoben.

Von entscheidender Bedeutung für das Hervorrufen der Erscheinung ist die richtige Bearbeitung der Glaswand. Da bei Wiederholung der Versuche von anderer Seite die von mir beschriebenen Erscheinungen nicht beobachtet werden konnten, so sehe ich mich veranlasst, das angewandte Reinigungsverfahren der Glaswand näher anzugeben. Zur Verwendung kommende Glasröhren, Glasperlen, Uhrgläser u. s. w. sind mit einem Gemisch aus Kaliumbichromatlösung und Schwefelsäure zu kochen und nachher mindestens 20 Minuten lang mit einem starken Strom von Wasser, zuletzt destillirtem, zu spülen, worauf man sie — und zwar die Glasröhren vertical gestellt — in einem auf 100° erhitzten Schrank trocknet. Neue Röhren, welche von vorn herein als brauchbar sich erwiesen hatten, wurden nach dem jedesmaligen Versuch vor dem Trocknen in einem Cylinder mit destillirtem Wasser aufbewahrt und zwar so, dass sie sich völlig unter der Oberfläche befanden. — Es gibt wohl noch viele andere Methoden Glaswände zu reinigen, aber für meine Versuche hat sich gerade das im Vorstehenden auseinandergesetzte Verfahren als das zweckmässigste bewährt.

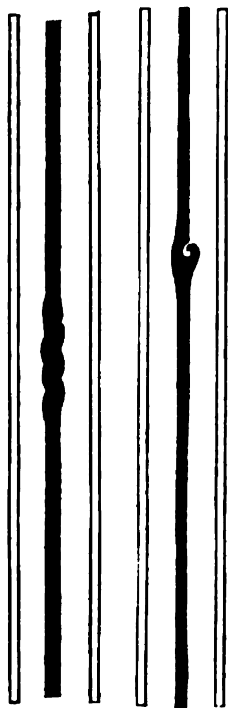
Fig. 31.



Die Erscheinung des centralen blauen Fadens lässt sich in folgender Weise hervorrufen. In einem Becherglas (Fig. 31) werden, je nach der Dicke des Rohres, 10—60^{ccm} Jodsäurelösung eingefüllt und mit der correspondirenden Menge schwefliger Säure nebst Stärkelösung versetzt. Das Rohr ist an einem Ende mit einem dickwandigen Gummiballon und Quetschhahn versehen, mit deren Hülfe man die Flüssigkeit bis zu einer Höhe von etwa 35^{cm} aufsteigen lässt. Aus später anzuführenden Gründen darf die Röhre nicht an denjenigen Stellen berührt werden, welche das Reactionsgemisch umgeben.

Benutzt man Glasröhren von etwa 5—10^{mm} Durchmesser und 40^{cm} Länge, so zeigt sich nach Verlauf von 5—10 Minuten in der Hauptaxe des Flüssigkeitscylinders ein tief blauer Faden, welcher bei den weiteren Röhren eine scheinbare Dicke von 1—1½ Mm. besitzt. Die Umgebung desselben ist vollkommen farblos. Die Schärfe des Fadenrandes scheint mit dem Durchmesser der Röhren zuzunehmen. Die centrale Reaction verschwindet in mehr oder weniger langer Zeit, indem die Bläuung von allen Seiten nach der Wand zu sich verbreitert. Bei Anstellung dieses Versuches lässt man die Beobachtung des Reactionseintrittes in dem Gefäss, in welches das Glasrohr eintaucht, am besten bei Seite, um die ganze Aufmerksamkeit den Vorgängen des Glasrohres zuwenden zu können.

§. 18. Einen sehr bemerkenswerthen Einfluss auf die Erscheinung des blauen Fadens übt die Temperatur aus. Ungleichmässige Erwärmung ruft Strömungserscheinungen hervor, welche durch eine Verzerrung des Reactionsbildes kenntlich werden. Es genügt, das Rohr, in welchem die Reaction eingetreten ist, einige Secunden mit der Hand zu umschliessen, um Wirbel zu erhalten, welche von dem blauen Faden ausgehen. Ein Abdruck der einzelnen Finger ist förmlich erkenntlich, wie ihn die nachfolgende Figur zeigt (Fig. 32). Hält man einen erwärmten Glasstab an die Wand, so ist man im Stande, einen einzelnen Wirbel abzulösen (Fig. 33). Hieraus ergiebt sich, dass vor Anstellung des Versuches eine ungleichmässige Temperatur der Röhrenwand (schon vorausgegangene Berührung mit der Hand bringt Störungen hervor) zu vermeiden ist.


Fig. 32. *Fig. 33.*

Nach dieser Erfahrung musste auch die Frage in Betracht gezogen werden, ob nicht durch eine Abkühlung der Flüssigkeit an der Glaswand eine Verzögerung der Reaction stattfindet, um so mehr, als bei der chemischen Umsetzung eine Temperaturerhöhung eintritt. Es wurden daher verschlossene Röhren in einem Wasserkasten von etwa 37 Liter Inhalt und einer Temperatur von 18° während einer Stunde aufbewahrt und sodann die klare Jodsäure-Reactionsmischung eingefüllt. Diese hatte ursprünglich die Temperatur von 15° und stieg, wie vorher durch besondere Versuche bestimmt worden war, bei Eintritt der Reaction auf 16°3—16°4. Die Erscheinung in diesen Röhren trat in gleicher Weise ein, wie bei den Versuchen an der Luft. Auch wurde öfters in der Weise verfahren, dass ich das Rohr in einen LIEBIG'schen Kühler steckte, durch welchen Wasser von 18° eine Stunde hindurchlief.

Als Resultat ergiebt sich also, dass eine gleichmässig höhere Erwärmung des Glasrohrs (um 1°6) die centrale Fadenbildung zulässt und der Eintritt der Erscheinungen nicht bedingt sein kann durch Wärmeabgabe an die umgebende Wand.

§. 19. Eine fernere Möglichkeit der centralen Fadenbildung konnte durch Strömungserscheinungen innerhalb des Rohrs gegeben sein. Diese Annahme wäre nur richtig, wenn eine ungleiche Erwärmung im Glasrohr stattfände. Trotzdem diese Möglichkeit nach dem Vorhergehenden äusserst unwahrscheinlich ist, habe ich dieselbe doch in Betracht gezogen. Es lässt sich experimentell erweisen, dass durch Strömung in ungleich erwärmter Flüssigkeit scheinbar centrale Reactionserscheinungen auftreten können. Zu diesem Zweck benutzte ich das Chloralreactionsgemisch.

In einem geräumigen Becherglase *A* (Fig. 34) von 43^cm Höhe und 11^cm5 Breite wurde Wasser auf bestimmte zwischen 44° und 65° liegende Temperaturen erwärmt und in dasselbe unten geschlossene Röhren von der Dicke der gewöhnlichen Reagensröhren von 55^cm Länge und von 14^mm bis 25^mm Durchmesser eingesenkt, nachdem sie mit dem Chloralreactionsgemisch soweit gefüllt waren, dass das Niveau der Oberfläche unter dem Niveau der Oberfläche des Wassers im Becherglase sich befand. Das Reactionsgemisch hatte eine Temperatur von 20°.

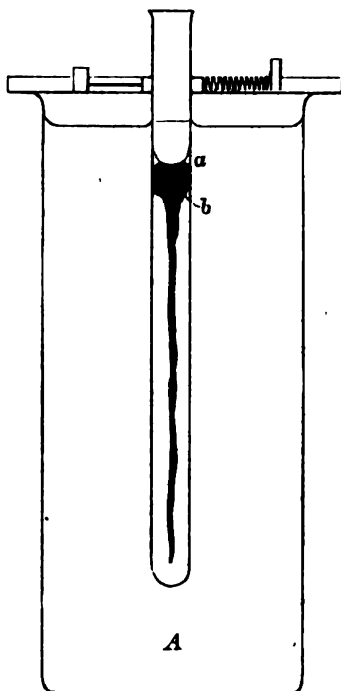


Fig. 34.

Durch die Erwärmung der zunächst an der Rohrwandung sich befindenden Flüssigkeit entsteht bekanntlich eine Strömung in der Weise, dass die wandständige Flüssigkeit in die Höhe steigt und ein Strom kälterer Flüssigkeit sich im Centrum nach unten begiebt und die Stelle höchster Temperatur sich naturgemäss in den oberen Flüssigkeitsschichten *a* vorfindet. In diesen tritt die Bildung des Chloroformnebels, welcher eine mehrere Millimeter bis Centimeter dicke Schicht bilden kann, zuerst ein, derselbe fängt sodann als spitzer Kegel (bei *b*) central sich nach unten zu senken an, während die ihn umgebende Wand klar bleibt. Es kann diese centrale Trübung sich bis fast auf den Boden des Gefässes erstrecken, allmählich füllt sich das ganze Rohr mit dem Nebel und die Erscheinung verschwindet. Je nach Anwendung verschiedener Aussentemperaturen und ungleich weiter Röhren tritt die centrale Erscheinung verschiedenartig auf und kann selbst fadenartig werden.

Bei Anwendung höherer Temperaturen, gegen 65°, sieht man bei dünnwandigen Röhren schon an der Wand Trübungen entstehen, die sich an derselben entlang nach oben schieben, während der centrale Nebel von oben nach unten sich ausbreitet. Wendet man so hohe Temperaturen an, dass das ausgeschiedene Chloroform zu sieden beginnt, so zeigen sich diese Erscheinungen noch in vollkommener Deutlichkeit.

Giesst man auf das Chloralreactionsgemisch bei der obigen Anordnung eine Schicht von heissem Paraffinöl, so dass die obere Schicht der Mischung allein erwärmt wird, so findet nur hier eine Chloroformtrübung statt. Unter diesen Umständen fällt eine Flüssigkeitsströmung fort und demgemäss zeigt sich auch hier kein centraler Faden. Die im vorstehenden beschriebenen Versuche zeigen also, dass in vertical stehenden Röhren durch Wärmeströmung in einer Flüssigkeit das Bild einer c e n t r a l e n Ausscheidung vorgetäuscht werden kann. Wird dagegen in einen Kasten mit Wasser von 44° eine horizontale, an beiden Enden rechtwinklig nach oben gebogene Röhre von ähnlichen Dimensionen wie die früheren hineingehängt und mit dem Chloralreactionsgemisch gefüllt, so tritt der Chloro-

formnebel in den senkrechten Schenkeln, wie früher beschrieben, central auf, in dem horizontalen Schenkel jedoch befindet sich die Trübung nicht in dem Centrum der Röhre, sondern wie es zu erwarten ist, an der oberen Schicht und senkt sich von da nach unten. Da hingegen, wenn man die Jodsäurereaction in einem derartigen horizontalen Rohr ausführt, hier der blaue Faden auch im horizontalen Theil central auftritt, gerade so wie bei einem senkrecht stehenden Rohr, so muss daraus geschlossen werden, dass eine Flüssigkeitsströmung als Ursache nicht vorhanden ist, denn sonst müsste die Bläuung an der oberen Wand beobachtet werden.

Nicht unerwähnt möchte ich lassen, dass man die Strömung in der Flüssigkeit als Ursache der centralen Jodabscheidung schon aus dem Grunde ausschliessen kann, weil dieselbe auch in schlecht gereinigten Röhren eintreten müsste, in solchen aber, wie früher erwähnt, die Fadenbildung sich nicht zeigt.

§. 20. Bei Gelegenheit der Beobachtungen des centralen Fadens in Glasröhren zeigt es sich, dass in der Sperrflüssigkeit, welche ein grösseres Volumen hatte als die Glasröhre, die Reaction zuerst in jener auftritt. Diese Vorgänge legten es nahe, den Jodsäureversuch in unregelmässig geformten Glasröhren vorzunehmen.

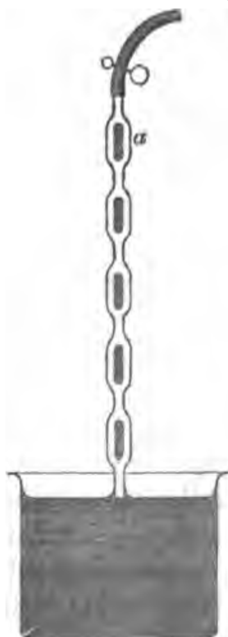


Fig. 35.

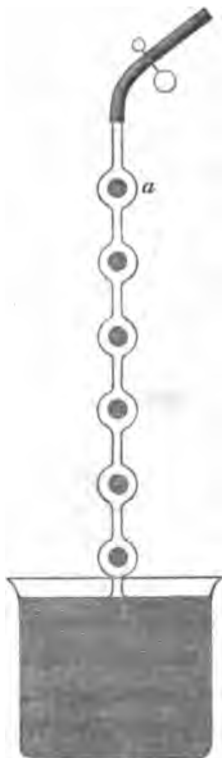


Fig. 36.

Es wurden Kugelröhren (Fig. 36) benutzt, welche sich aus etwa 12 Kugeln von etwa 6^{mm} innerem Durchmesser zusammensetzten, während die Verbindungsstücke ein Lumen von etwa $1^{mm}.5$ und eine dünne Wand hatten oder auch Glasröhren (Fig. 35) von etwa 3 — 4 Mm. Lumen, welche durch Ausziehen in ein Rohr von variablem Kaliber umgewandelt worden waren. Die Anordnung war dieselbe, wie in §. 17 beschrieben, ebenso die Reinigung der Röhren. Hierbei zeigte sich, dass zuerst in den Kügelchen oder Erweiterungen, die blaue Reaction central auftrat, während in den engen Verbin-

dungsröhren dieselbe sich um ½ Minute verspätete. Auch in der Weise wurde verfahren, dass man den Röhren in dem in §. 18 beschriebenen Apparate eine etwa 1°6 höhere Temperatur ertheilte, als die Flüssigkeit nach Eintritt der Reaction zeigen konnte. Die Erscheinung war hierbei die nämliche.

Die Beschreibung dieser Versuche bezieht sich auf die überwältigende Mehrzahl der von mir angestellten Beobachtungen. Zuweilen tritt die Reaction in den Kügelchen oder Erweiterungen wandständig auf; nach wiederholter Reinigung der Röhren fällt diese Anomalie dann fort.

Aus diesen Versuchen folgt, dass der Reactionsvorgang in engen Räumen verspätet eintritt und in kugelförmigen Räumen eine centrale Stellung einnimmt.

§. 21. Um die Verzögerung in engen Räumen noch schärfer vorzuführen, diente folgende Anordnung des Versuches.

In ein Becherglas von etwa 5^{cm} Durchmesser und etwa 8^{cm} Höhe wurde das Jodsäurereactionsgemisch mit klar filtrirter Stärkelösung hineingebracht. Sobald die Mischung erfolgt war, senkte ich mit Hülfe einer Pincette ein Stück Glascapillare vertical in die Flüssigkeit hinein; ein gleiches Stück Capillarrohr wurde in Bereitschaft gehalten. Sobald in dem Becherglase die blaue Reaction eingetreten war, wurde mit Hülfe der zweiten Capillare von der blauen Flüssigkeit herausgehoben; das Becherglas wurde nun entleert, die hineingesenkte Capillare herausgenommen und zum Vergleich an die erste herangelegt. Um die Capillaren gut beobachten zu können, legt man sie am besten auf eine kleine Glasplatte, die unten mit weissem Papier beklebt ist, und betrachtet sie mit einer Lupe in der Verkürzung. Es zeigte sich dann die erste Capillare noch mit farblosem, die zweite mit blauem Inhalt gefüllt.

Noch schlagender kann man diesen Versuch anstellen, wenn man nach dem Eintritt der Reaction auch das zweite Capillarrohr in das Becherglas hineinsenkt, so dass die Flüssigkeit in dasselbe eintreten kann, und nun schweflige Säure oder eine Lösung von Natriumthiosulfat hinzufliessen lässt, so dass die blaue Färbung im Becherglase aufgehoben wird. Diese Flüssigkeiten treten nicht sofort in die Capillaren hinein und man sieht nun wiederum das erste Capillarröhrchen farblos, das zweite mit blauem Inhalt in der Flüssigkeit liegen. Letzteres diente natürlich nur als Controlobject, um zu zeigen, dass die hinzugesetzte entfärbende Flüssigkeit ihre Wirkung in der That nicht bis auf die Capillarröhrchen erstrecken kann.

Es zeigt sich also bei diesen Versuchen wiederum, dass in capillaren Räumen die Reaction verzögert ist.

Ich hatte auch bereits in einer früheren Mittheilung erwähnt (Verhandl. d. Phys. Ges. Berlin 1886), dass in capillaren Flüssigkeitsräumen, welche in dem Reactionsgemisch durch Aufeinanderschichten von Glasperlen hergestellt wurden, eine Verzögerung des Eintrittes der Blaufärbung zu beobachten ist.

Am besten verwendet man Perlen ohne Bohrung (Streuglas). Die von mir benutzten wurden durch Drahtsiebe in solche von verschiedener Grösse gesichtet (Durchmesser von $0^{mm}.52$ bis $1^{mm}.12$).

Die Ausführung der Versuche geschah in der Weise, dass über Perlen von einer Sorte, welche sich 2—7 Cm. hoch in einem Reagensglas befanden, vermittelst eines bis auf den Boden desselben reichenden Trichters das Jodsäurereactions-Gemisch eingefüllt und durch Stossen auf eine weiche Unterlage den Perlen eine möglichst dichte Schichtung gegeben wurde.

Beispiel:

$12^h\ 28^m$	Eintritt der Reaction in der oberen Flüssigkeit.
$12^h\ 35^m$	Beginn der Bläuung an der oberen Perlenschicht.
$12^h\ 51^m$	$^1/_3$ der Perlenschicht von oben blau werdend.
$3^h\ 42^m$	Derselbe Zustand.
6^h	» »
7^h	Allgemeine Blaufärbung.

Benutzt man eine Jodsäuremischung von solcher Verdünnung, dass die Reaction nach etwa 2 Stunden eintritt, füllt erstere in cylindrische Gläschen von 5^{mm} Weite, welche bis oben hin Perlen von $0^{mm}.85$ Durchmesser enthalten und zwar mit der Vorsicht, dass man die Flüssigkeit des Gefässes möglichst abtropfen lässt, so ist nach 8 Stunden noch keine Blaufärbung zu bemerken. Zuweilen tritt unregelmässig an einzelnen Stellen Bläuung auf.

Diese Versuche können ebenfalls als genügender Beweis betrachtet werden, dass in engen Räumen die chemische Reaction verlangsamt wird.

§. 23. Da es bei den soeben beschriebenen Versuchen auf die Reinheit der Oberfläche vieler kleiner Glasperlen ankommt, so ist durch diese Anordnung das Gelingen allerdings ausserordentlich erschwert, es musste daher erwünscht sein, anderweitig zweckentsprechende kleine Räume zur Beobachtung aufzufinden.

Zu diesem Zweck machte ich von den Eigenschaften eines Tropfens Gebrauch, welcher zwischen zwei mit den convexen Seiten aufeinander

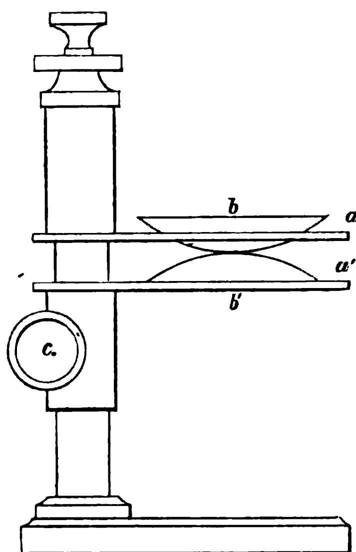


Fig. 37.

gelegten Uhrgläsern zu einer biconcaven Flüssigkeitslinse gedrückt wird. Der benutzte Apparat war folgender (Fig. 37). An einem 190^{mm} hohen Messingstativ befand sich ein Tisch *a*, ähnlich wie der Objecttisch eines Mikroskops befestigt. Ein anderer Tisch *a'* von denselben Dimensionen konnte parallel zu dem ersten durch eine Schraube *c* auf und ab bewegt werden; beide Tische sind mit kreisrunden Öffnungen von 42^{mm} Durchmesser versehen, deren Centren bei verticaler Stellung des Apparats übereinander liegen. Zur Anwendung kamen gewöhnliche gewölbte Uhrgläser von etwa 30^{mm} Krümmungshalbmesser. Zur Ausführung des Versuchs stellt man den Apparat mit den Uhrgläsern so ein, dass die letzteren sich gerade berühren und centrirt übereinander liegen. Man hebt das oberste Uhrglas *b* ab und bringt mit einem Glasstabe von geeigneter Dicke oder mit Hülfe einer kleinen Pipette einen Tropfen des Jodsäurereactions-Gemisches auf die Wölbung des unteren Uhrglases *b'* und deckt dann schnell das obere mit der convexen Fläche herüber, um den Tropfen zwischen den adhaerirenden Wänden zu fangen. Auf den Fuss des Apparats legt man zur besseren Beobachtung ein Stück weisses Papier. Man überzeugt sich leicht, dass in dem Reactionsgemisch im Becherglase die Bläuung früher als im Tropfen eintritt.

Von besonderem Interesse ist aber folgende Erscheinung. Es zeigt sich in dem von oben betrachteten Tropfen ein blauer Ring. Der Rand des Tropfens bleibt farblos, klar und durchsichtig. Der blaue Ring schattirt sich nach innen zu ab und die Mitte des Tropfens erscheint farblos. Die Abschattirung der blauen Farbe nach der Mitte hin ist so stark, dass man trotz der beträchtlich dünneren Flüssigkeitsschicht in der Mitte zu der Vermuthung geführt wird, dass in dem Centrum des Tropfens gar keine Reaction stattgefunden habe.

Der Apparat gestattet ferner, einen deutlichen Beweis für dieses Nichteintreten der Reaction zu führen.

Entfernt man durch die Schraube den unteren Tisch, so dass der Wassertropfen an beiden Uhrglaswandungen adhaerirend bleibt und möglichst stark gespannt wird, so sieht man in der Mitte eine farblose durchsichtige Stelle, welche durch die weisse Unterlage scharf markirt wird. Abhängig von der centrirten Aufstellung der

Uhrgläser ist die Contour der farblosen Mitte, welche etwa $^1/_4$—$^1/_2$ Mm. Durchmesser hat, mehr oder weniger scharf. Die ringförmige Erscheinung tritt allerdings nicht bei allen Concentrationen deutlich auf, der centrale todte Raum jedoch immer.

Dass es sich hier nicht um eine optische Täuschung handelt, ist leicht zu zeigen. Entspannt man den Tropfen durch Nähern der Uhrgläser und macht mit diesen eine leicht mahlende Bewegung, so ist bei Entfernung derselben von einander das beschriebene Phaenomen nicht mehr zu beobachten. Folgende Abbildungen mögen die beschriebenen Vorgänge veranschaulichen.

Fig. 38.

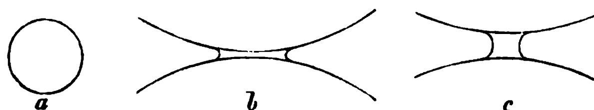


Fig. 38: *a* Flüssigkeitstropfen von oben, *b* von der Seite, *c* von der Seite im Zustande der Spannung gesehen.

Fig. 39.

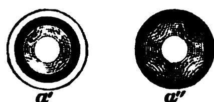


Fig. 40.



Fig. 39: *a' a''* Flüssigkeitstropfen nach Eintritt der Reaction von oben gesehen.

Fig. 40: *c c'* Flüssigkeitstropfen nach Eintritt der Reaction im Zustand der Spannung von oben gesehen.

Auch dieser Versuch zeigt auf's Deutlichste, dass an derjenigen Stelle, an welcher die Flüssigkeit am engsten begrenzt ist, ein todter Raum vorhanden war.

§. 24. Die im vorigen Paragraphen beschriebene Anordnung liess auch an der freien Oberfläche des Flüssigkeitstropfens einen todten Raum erkennen. Es zeigt sich derselbe ebenso in offenen Reagensgläsern in gleich scharfer Abgrenzung wie bei der Chloralreaction und tritt sogar bei Jodsäuremischungen auf, deren Bläuung innerhalb einer Minute erscheint.

Sehr deutlich tritt der todte Raum an der Oberfläche der Reactionsflüssigkeit auf, wenn man die in §. 5 beschriebenen prismatischen Kästen benutzt. Bei langsamer Vorschiebung der Blaufärbung nach dem spitzen Winkel des Prismas hin bleibt die Oberfläche in einer etwa 1^{mm} dicken Schicht vollkommen farblos. —

Bei der Jodsäurereaction verschwinden jedoch diese todten Räume kurz nach dem Entstehen.

§. 25. Bei einer Untersuchung, welche zum Zweck pharmakodynamischer Wirkungen unternommen wurde, lag es besonders nahe, die Reactionsvorgänge auch in Gefässen aus thierischen Membranen

vorzunehmen. Ich benutzte praeparirte Kaninchenblase und Därme; bei der Dünne der Wandungen kann man die Reactionsvorgänge im Innern zur Genüge beobachten.

Füllt man eine Kaninchenblase, in welche zur bequemeren Handhabung ein Glasrohr eingebunden ist, mit der Jodsäuremischung, so zeigt sich im Vergleich zu der Reaction im Glasgefäss eine merkliche Verzögerung. Ist die Blase beim Versuche nur etwa $^2/_3$ gefüllt, so beobachtet man den todten Raum unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit und ebenfalls unten in grosser Ausdehnung. Wird die Blase dagegen bis zu dem Glasrohr gefüllt, so beginnt die Reaction in der Mitte und bietet das Ansehen eines blauen Dotters dar. Allmählich breitet sich die Färbung nach den Wänden zu aus, jedoch bleibt die Bodenfläche am längsten farblos. Stört man die Reaction, welche eben in der Mitte begonnen hat, indem man die Flüssigkeit in der Blase zwischen Glastafeln durch einander schüttelt, so verschwindet die centrale Bläuung, jedoch nur für einen Augenblick. Mit einem Schlage färbt sich jetzt der ganze Inhalt der Blase wieder blau; nur in der unteren Flüssigkeitsschicht ist eine Verzögerung der Reaction zu bemerken. Bei Anwendung kleiner Kaninchendärme tritt überhaupt kein Blauwerden ein.

Füllt man eine Blase und schnürt mittels kleiner über dieselbe gezogener Messingringe die Flüssigkeit an einzelnen Stellen ein, so dass die Blase gewissermaassen in mehrere Abtheilungen getheilt wird, jedoch so, dass dieselben noch unter einander communiciren, so erhält man verschiedene Centralpunkte, an welchen die Jodabscheidung erfolgt.

Bei obigen Versuchen wird man sofort darauf geführt, dass durch Anwendung der thierischen Membran eine Complication der früher beschriebenen Erscheinungen eingeführt wird. Eine Bestätigung dieser Ansicht findet sich darin, dass nach Eintritt der blauen Jodreaction in der Blase dieselbe wieder verschwindet. Es beginnt nämlich von der Wand aus eine Entfärbung, die sich schliesslich über den ganzen Blaseninhalt erstreckt und je nach dessen Grösse und der Concentration der Flüssigkeit in 1 bis 2 Stunden vollendet ist. Die Wirkung der Blasenwand auf blaue Jodstärke zeigt sich auch, wenn man erstere in eine Lösung von Jodstärke hineinlegt; beim Schütteln der Flüssigkeit tritt Entfärbung ein. Da hiernach die thierische Membran die Jodstärke zerlegt, so ist es erklärlich, dass bei diesen Versuchen so bedeutend grössere farblose Räume gebildet werden. Bei der Chloralreaction zeigt sich dagegen kein Einfluss der Blasenwandung auf die Bildung des todten Raumes. Es wird hier beobachtet, dass derselbe nicht bloss in der obersten, sondern auch in der untersten Flüssigkeitsschicht eintritt.

§. 26. Bei der Jodsäurereaction ist noch in Betracht zu ziehen, dass von der Glaswand Alkali abgegeben werden kann, welches eine Verzögerung der Bläuung an der Wand hervorrufen würde. Um diese Vermuthung zu prüfen, habe ich ein anderes Material als Glas angewandt.

Es wurden Perlen von Bergkrystall benutzt, welche sich allerdings nicht in den kleinen Dimensionen der Glasperlen herstellen lassen und deren Durchmesser $1^{mm}.7 — 2^{mm}$ betrug. Die Versuche mit diesen Perlen, in der früher beschriebenen Weise angestellt, zeigten ebenfalls die Reactionsverzögerung.

Zweitens wurde ein Bergkrystallrohr benutzt, welches aussen vierkantig war und eine cylindrische Bohrung von 8^{mm} Durchmesser hatte. Auch hier konnte die centrale Jodreaction beobachtet werden.

Drittens wurden für den in §. 23 beschriebenen Versuch statt der Uhrgläser Schalen von Bergkrystall verwandt, welche ebenfalls dasselbe Resultat lieferten.

Die in dem Bergkrystall nach BAUMANN (WARBURG und TEGETMEYER, über die elektrolytische Leitung des Bergkrystalls, Ann. der Phys. und Chem. Neue Folge 35, p. 463, 1888) vorkommende äusserst geringe Menge ($^1/_{2300}$) von kieselsaurem Natron kann bei diesen Versuchen nicht in Betracht kommen.

Somit ist erwiesen, dass die Erscheinung des todten Raumes bei Anwendung von Glasgefässen nicht durch Alkaliabgabe derselben verursacht sein kann.

Es ist bereits angeführt worden, dass man auch bei anderen chemischen Reactionen todte Räume beobachten kann und nur die Chloral- und die Jodsäurereaction als solche bezeichnet werden müssen, bei denen dieselben in evidenter Weise zu Tage treten. Diese beiden Reactionen zeigen, wenn auch nicht eine vollständige Gleichartigkeit in ihrem Verlaufe, doch immerhin eine so grosse Gemeinsamkeit der Erscheinungen, dass man zu der Annahme geführt wird, es möchten die der Bildung des todten Raumes in diesen beiden Fällen zu Grunde liegenden Ursachen die gleichen sein. Beide Reactionen haben an der freien Oberfläche todte Räume; die centrale Bildung der Reaction ist in beiden Fällen, allerdiugs bei der Jodsäure deutlicher zu erkennen. Auch die Reactionsverzögerung in capillaren Räumen, die bei der Jodsäure auf's sicherste zur Anschauung gebracht werden konnte, ist bei dem Chloral ersichtlich, jedoch noch nicht mit der erwünschten Schärfe erwiesen.

Aus den angeführten Beispielen lässt sich wohl mit Recht vermuthen, dass bei allen chemischen Reactionen, besonders wenn sie

nicht zur Ausscheidung krystallinischer Substanzen führen, ähnliche Vorgänge auftreten, d. h. Bildung von todten Räumen in der Nähe der Flüssigkeitsbegrenzung und Verzögerung bez. Aufhebung der Reaction in kleinen Räumen. Es scheint demnach die Hypothese nicht unzulässig, dass das Zustandekommen einer jeden chemischen Reaction nur von einer bestimmten Grösse des Raumes, in welchem sie vor sich geht, aufwärts, möglich ist. Um jedem Missverständnisse vorzubeugen, bemerke ich hierbei, dass die lebhafteren chemischen Umsetzungen, welche in capillar angeordneten Massen wie z. B. bei der Kohle angetroffen werden, Folge von Condensationsvorgängen sind, und dieselben also nur scheinbar mit der im vorstehenden angeführten Hypothese in Widerspruch stehen.

Überträgt man die gewonnenen Resultate auf biologische Vorgänge, so wird man zu dem Schlusse geführt, dass Zellenräume, in denen eine Reaction vor sich gehen soll, an eine bestimmte Grösse gebunden sind, damit nicht ein andersartiger — dem normalen gegenüber gewissermaassen degenerativer — chemischer Vorgang stattfinde. In der That legt uns die Verschiedenartigkeit der Zellen mit ihrem für eine jede gleichartigen Chemismus den Gedanken nahe, dass die chemischen Vorgänge in ihnen gerade an Räume von bestimmter Grösse gebunden sind, wobei kleine Grössendifferenzen allerdings keine Rolle spielen.

Wenn also die Schlussfolgerung gezogen werden muss, dass für die bestimmte Thätigkeit einer Zelle ein bestimmter Reactionsraum nothwendig ist, so lässt sich daran weiter die Vermuthung knüpfen, dass in einer Zelle selbst ohne differenzirte Abgrenzung, gewissermaassen einer protoplasmatischen Flüssigkeit, vorausgesetzt dass wir es mit einer Kugel zu thun haben, jener Form, die von R. Virchow gewissermaassen als ideale Zelle bezeichnet wird, die Reactionsbewegung im Centrum der Zelle am stärksten sein muss, bei veränderter Gestalt dagegen irgend ein anderer Punkt für die stärkste Reactionsentwickelung sich finden müsse. —

Was die Ursache der Bildung des todten Raumes anbetrifft, so drängt die Betrachtung der Gesammtheit der beschriebenen Erscheinungen zu dem Schlusse, dass der physikalische Einfluss der Wand und die verschiedenartige Spannung der Flüssigkeitsoberfläche eine wesentliche Rolle spielen. Ein bekannter Einfluss der Wand auf chemische Vorgänge könnte dabei in Betracht gezogen werden. Die Versuche von Quincke, Gerstmann u. a. zeigen beispielsweise die Trennung des Alkohols in Schichten verschiedener Concentration beim Fliessen durch capillare Röhren. Eine solche Trennung von chemischen Substanzen und ihre Zurückhaltung in capillaren Räumen zeigt auch

die Kohle und zwar besonders deutlich in dem von A. W. Hofmann aufgefundenen Falle, dass aus verdünnten wässerigen Strychninlösungen Strychnin an dieselbe abgegeben wird. Bei allen diesen Versuchen liegt thatsächlich die durch die Wand bewirkte Bindung unterhalb sichtbarer Grenzen, sonach würde diese Erscheinung keine Erklärung für die Bildung der todten Räume geben. Auch würde gegen eine Annahme von Molecularwirkungen die grosse Ausdehnung sprechen, welche der todte Raum einnimmt. Da man nun aber beobachtet, dass in der Nähe der Wand und der Flüssigkeitsoberfläche die Entwickelung der Reaction behindert ist, so kann man nur annehmen, dass die Flüssigkeit hier den chemischen Vorgängen einen Widerstand durch innere Reibung entgegensetzt. Man muss daher diesen Zustand als Viscosität bezeichnen. Für diese Anschauung spricht auch der Umstand, dass, wie in §. 12 erwähnt, die Ausdehnung des todten Raumes bei höherer Temperatur sich vermindert, da bekanntlich der Coefficient der inneren Flüssigkeitsreibung mit wachsender Temperatur sehr rasch abnimmt.[1]

[1] Man kann eine viscöse Schicht an der Glaswand und der Flüssigkeitsoberfläche dem Auge auch durch folgenden Versuch direct sichtbar machen, der meines Wissens noch nicht beschrieben ist. Lässt man kleinere oder grössere Platten von Substanzen, deren specifisches Gewicht sehr wenig kleiner als 1 ist, in Wasser aufsteigen, so scheinen dieselben etwa $^1/_2$mm unter der Oberfläche anzuhalten; von da ab nähern sie sich, allerdings mit sehr verminderter Geschwindigkeit, der Oberfläche. Dass diese Thatsache auf der stärkeren Wirkung der inneren Reibung des Wassers in der Nähe derselben beruht, scheint mir zweifellos. Es stehen diese Beobachtungen auch in Zusammenhang mit den von J. Stefan angestellten Versuchen »über scheinbare Adhaesion«, auf welche Hr. Kundt mich aufmerksam zu machen die Freundlichkeit hatte (Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. W. math.-naturw. Classe 1874 S. 713).

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 21. Februar 1889, X.)

XIV.

Ich habe schon am Schlusse des art. VII hervorgehoben[1], dass:

$$\frac{1}{c}\left(\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{2}{3}}$$

»eine Invariante der durch die Form (a, b, c) repraesentirten Classe« ist. Dort bedeuteten a, b, c ganze Zahlen, für welche $4ac - b^2 > 0$ ist, und es war:

$$4ac - b^2 = \Delta, \quad w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c}, \quad w_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}$$

gesetzt worden. Ich habe dann im art. IX gezeigt, dass der negative Logarithmus dieser Invariante, welcher a. a. O. durch $\mathfrak{L}(w_1, w_2)$ bezeichnet ist, sich von dem im art. VI mit $L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$ bezeichneten Grenzwerth:

$$\lim_{\rho=0}\left(-\frac{1}{\rho} + \sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi(am^2 + bmn + cn^2)}\right)^{1+\rho}\right)$$

nur durch eine Grösse unterscheidet, welche für alle quadratischen Formen (a, b, c) der Discriminante $-\Delta$ einen festen Werth hat.[2] Dieser feste Werth der Differenz:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

lässt sich nun in anderer Weise, als es im art. IX geschehen ist, mittels der Formel (16) des §. 6 art. XIII bestimmen.

Setzt man nämlich wie im art. IX:

[1] Sitzungsbericht vom 30. Juli 1885. XXXVIII.

[2] Die Summationen sind hier durchweg über alle Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken, mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$.

$$a = a_0\sqrt{\Delta},\; b = b_0\sqrt{\Delta},\; c = c_0\sqrt{\Delta},$$

und wie im art. XIII:

$$a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2 = f(m, n),$$

so ist:

$$L(a_0, c_0) = \lim_{\rho=0}\left(-\frac{1}{\rho} + \frac{1}{(2\pi)^{1+\rho}}\sum_{m,n}\frac{1}{\left(f(m,n)\right)^{1+\rho}}\right),$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b_0+i}{2c_0}, \frac{b_0+i}{2c_0}\right) = \log c_0\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)^{-\frac{2}{3}} + \log\sqrt{\Delta}.$$

Mit Berücksichtigung der Relation:

$$\lim_{\rho=0}\rho\sum_{m,n}\frac{1}{\left(f(m,n)\right)^{1+\rho}} = 2\pi,$$

folgt also, dass jene Differenz:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

durch den Ausdruck:

$$\log 2\pi\sqrt{\Delta} + \lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{\left(f(m,n)\right)^{1+\rho}}\right) - \log\frac{1}{c_0}\left(\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)\right)^{\frac{2}{3}}$$

dargestellt wird, dessen Werth sich auf Grund der Formel (16) des art. XIII gleich:

$$\tfrac{1}{2}\log\Delta - \tfrac{1}{3}\log 2\pi + 2\Gamma'(1)$$

ergiebt.

Da die hiermit erlangte Werthbestimmung:

(1) $$\mathfrak{L}\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right) = \tfrac{1}{2}\log\Delta - \tfrac{1}{3}\log 2\pi + 2\Gamma'(1),$$

im Falle einer Fundamental-Discriminante Δ_0, für die im art. IX mit $M(\Delta_0)$ bezeichnete Differenz:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

die Gleichung:

$$M(\Delta_0) = \tfrac{1}{2}\log\Delta_0 - \tfrac{1}{3}\log 2\pi + 2\Gamma'(1)$$

liefert, so geht die im art. IX mit ($\mathfrak{T}$) bezeichnete Relation:

$$M(\Delta_0) = \mathfrak{M}(\Delta_0) - C + \log\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}} + \frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)} \qquad (-C = \Gamma'(1))$$

in folgende über:

(2) $$\mathfrak{M}(\Delta_0) + \tfrac{4}{3}\log 2\pi + C - \log\Delta_0 = -\frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)},$$

welche eine bemerkenswerthe Beziehung zwischen den beiden im art. IX zur Bestimmung von $M(\Delta_0)$ gebrauchten Functionen der Discriminante Δ_0:

$$\mathfrak{M}(\Delta_0)\,,\ \overline{H}(-\Delta_0)$$

enthält. Diese Beziehung, und auch eine solche, welche nicht bloss für Fundamental-Discriminanten sondern ganz allgemein besteht, kann natürlich direct aus der Gleichung (16) des art. XIII hergeleitet werden; doch soll, ehe dies ausgeführt wird, der Ausdruck, welcher die rechte Seite dieser Gleichung bildet, oder der damit identische Ausdruck (17), auf die Function $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ zurückgeführt werden.

XV.

Aus den im art. I und im art. III aufgestellten Definitionsgleichungen:

$$(1)\qquad \Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2) = (4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i} \frac{\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)}{\big(\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2)\big)^{\frac{1}{3}}},$$

$$(2)\qquad P(\sigma,\tau,w_1,w_2) = e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2),$$

folgt unmittelbar die zwischen den Functionen Λ und P bestehende Relation:

$$(3)\qquad \Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2) = \frac{(4\pi^2)^{\frac{1}{3}} P(\sigma,\tau,w_1,w_2)}{\big(\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2)\big)^{\frac{1}{3}}},$$

welche schon im art. III angegeben ist. Es sind dort ferner die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\sigma}(\sigma=0,\ \tau=0) = P_{11} = 2\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\tau}(\sigma=0,\ \tau=0) = P_{12} = (w_1-w_2)\,\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\tau\,\partial\tau}(\sigma=0,\ \tau=0) = P_{22} = -\,2w_1w_2\,\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2)$$

entwickelt, und hiernach wird:

$$(4)\qquad c_0(a_0P_{11}+b_0P_{12}+c_0P_{22}) = \vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2),$$

$$(5)\qquad \Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2) = \frac{\dfrac{1}{(\sqrt{c_0})}P(\sigma,\tau,w_1,w_2)}{\left(\dfrac{1}{4\pi^2(\sqrt{c_0})}(a_0P_{11}+b_0P_{12}+c_0P_{22})\right)^{\frac{1}{3}}},$$

wo auf der rechten Seite im Zähler und Nenner der Function P desshalb der Factor $\frac{1}{(\sqrt{c_0})}$ angefügt worden ist, weil:

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2)$$

genau dieselbe, im art. II näher dargelegte, Invarianten-Eigenschaft wie die Function $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ besitzt. Diese Eigenschaft tritt durch die Gleichung ($\mathfrak{C}_0$) des art. III:

$$(6) \quad \frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \sum_{m,n} (-1)^{mn+m+n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i}$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

in Evidenz. Denn wenn an Stelle eines Systems $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ ein aequivalentes:

$$(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0)$$

tritt, welches durch die Relationen:

$$\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau' + \beta'', \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1,$$

$$(7) \quad \begin{aligned} a'_0 &= a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\ b'_0 &= 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \\ c'_0 &= a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2, \end{aligned}$$

(in denen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten), mit dem ersteren System verbunden ist, so sind je zwei Glieder der nur formal verschiedenen Reihen mit einander identisch, in denen die Summationszahlen m, n der einen Reihe aus den Summationszahlen m', n' der andern mittels der Gleichungen:

$$m = \alpha m' + \beta n', \quad n = \alpha' m' + \beta' n'$$

bestimmt werden. Dabei ist zu bemerken, dass das Bestehen der Gleichung:

$$(-1)^{mn+m+n} = (-1)^{m'n'+m'+n'}$$

oder der Congruenz:

$$(8) \quad mn + m + n \equiv m'n' + m' + n' \pmod{2}$$

am einfachsten daraus zu erkennen ist, dass sich $mn + m + n$ *modulo* 2 weder bei einer Vertauschung von m und n, noch dann ändert, wenn $n + m$ an die Stelle von n gesetzt wird. Aber man kann auch die Congruenz (8) direct begründen, indem man bemerkt, dass vermöge der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$:

$$(\alpha m' + \beta n')(\alpha' m' + \beta' n') \equiv \alpha\alpha' m' + \beta\beta' n' + m'n' \pmod{2},$$

also:

$$mn+m+n-m'n'-m'-n' \equiv (\alpha+1)(\alpha'+1)m'+(\beta+1)(\beta'+1)n' \pmod{2},$$

und:

$$(\alpha+1)(\alpha'+1) \equiv 0\,,\ (\beta+1)(\beta'+1) \equiv 0 \pmod{2}$$

ist.

Hebt man auf der rechten Seite der Gleichung (6) aus je zwei Zahlen m, n den (absolut genommenen) grössten gemeinsamen Theiler t heraus und setzt:

$$m = t\alpha\,,\ n = t\alpha'\,,$$

so kann dieselbe — da $t^2 \equiv t \pmod{2}$ ist — in folgender Weise dargestellt werden:

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2) = 1 + \sum (-1)^{(\alpha\alpha'+\alpha+\alpha')t} e^{-(a_0\alpha^2+b_0\alpha\alpha'+c_0\alpha'^2)t^2\pi+2(\alpha\sigma+\alpha'\tau)t\pi i}\,,$$

wo die Summation sich auf alle positiven Zahlen t und auf alle Systeme solcher Zahlen α, α' bezieht, welche zu einander relativ prim sind.

Nun bilden die Grössen:

$$a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2\,,\ \alpha\sigma + \alpha'\tau$$

die Gesammtheit aller derjenigen, welche in den dem Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

aequivalenten Systemen vermöge der Bedingungen (7) beziehungsweise an Stelle der Grössen:

$$a_0, \sigma$$

treten. Man kann hiernach einfach:

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2) = 1 + \sum \sum_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t e^{-a_0 t^2\pi + 2\sigma t\pi i}$$

setzen, wo sich die erste Summation auf die Elemente σ, a_0 aller einander aequivalenten Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

bezieht und ε_t das zugehörige Vorzeichen $(-1)^{\alpha\alpha'+\alpha+\alpha'}$ bedeutet.

Die Invarianten-Eigenschaft des Nenners in der obigen Gleichung (5) tritt bei dessen Darstellung in der Form:

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{4\pi^2(\sqrt{c_0})}(a_0P_{11} + b_0P_{12} + c_0P_{22})$$
$$= \sum (-1)^{(m-1)(n-1)}(a_0m^2 + b_0mn + c_0n^2)e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi}$$

deutlich hervor, und der Summe auf der rechten Seite kann gemäss

den obigen Ausführungen auch folgende einfache Gestalt gegeben werden:

$$(11) \qquad \sum \sum_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t a_0 t^2 e^{-a_0 t^2 \pi},$$

wo sich die erste Summe auf alle ersten Elemente a_0 der sämmtlichen einander im Gauss'schen Sinne aequivalenten Formen (a_0, b_0, c_0) bezieht und ε_t die oben angegebene Bedeutung hat.

Nun ist, wenn wie im art. XIII:

$$f(x, y) = a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2, \; f'(x', y') = c_0 x'^2 - b_0 x' y' + a_0 y'^2$$

und:

$$(12) \qquad \frac{\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{f'(\sigma, \tau)} = \Lambda'(\sigma, \tau, w_1, w_2)$$

gesetzt wird:

$$(13) \quad \Lambda'(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{(4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2 (w_1 + w_2)\pi i}}{c_0 \left(\vartheta'(0, w_1)\, \vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)}{\sigma + \tau w_1} \cdot \frac{\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)}{\sigma - \tau w_2}.$$

Die Function $f'(\sigma, \tau)$ ist aber eine Invariante für alle diejenigen aequivalenten Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

bei denen in den obigen Relationen (7) die Zahlen α'' und β'' gleich Null sind. Es ist also auch:

$$\Lambda'(\sigma, \tau, w_1, w_2)$$

eine solche Invariante und folglich:

$$\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$$

eine Invariante in dem Sinne, dass

$\Lambda'\left(0, 0, \dfrac{-b_0 + i}{2c_0}, \dfrac{b_0 + i}{2c_0}\right)$ für alle Formen (a_0, b_0, c_0) ungeändert bleibt, welche durch lineare ganzzahlige Transformationen mit der Determinante *Eins* aus einander hervorgehen.

Aus der Gleichung (13) folgt:

$$(14) \qquad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{4\pi^2}{c_0} \left(\frac{\vartheta'(0, w_1)}{2\pi} \cdot \frac{\vartheta'(0, w_2)}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

oder wenn man hier die Productentwickelung der ϑ-Reihen einsetzt:

$$(15) \quad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{4\pi^2}{c_0} e^{-\frac{\pi}{6c_0}} \Pi\left(1 - e^{2nw_1\pi i}\right)^2 \left(1 - e^{2nw_2\pi i}\right)^2.$$

Benutzt man ferner die Gleichungen (4) und (10), so resultirt die Formel:

$$(16)\qquad \left(\Lambda'(0,0,w_1,w_2)\right)^{\frac{3}{2}} = (2\pi)^3 \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m,n)\, e^{-\pi f(m,n)},$$

welche sich bei Anwendung der Form (11), auf welche oben die Reihe rechts gebracht worden ist, folgendermaassen darstellen lässt:

$$(17)\qquad \left(\Lambda'(0,0,w_1,w_2)\right)^{\frac{3}{2}} = (2\pi)^3 \sum_{a_0} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n a_0 n^2 e^{-a_0 n^2 \pi}.$$

Gemäss der Formel (16) des art. XIII ist daher:

$$(18)\qquad \log \Lambda'(0,0,w_1,w_2) = 2\log 2\pi - 2\Gamma'(1) + \lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{\left(f(m,n)\right)^{1+\rho}}\right),$$

oder, wenn von dem Grenzwerth:

$$\lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{\rho} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}}\right) = \Gamma'(1)$$

Gebrauch gemacht wird:

$$(19)\qquad \log \Lambda'(0,0,w_1,w_2) = 2\log 2\pi - \Gamma'(1) + \lim_{\rho=0}\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{\left(f(m,n)\right)^{1+\rho}}\right).$$

Bezeichnet man in üblicher Weise $-\Gamma'(1)$ durch C und hebt den grössten gemeinsamen Theiler t je zweier Zahlen m, n in der letzten Summe heraus, so geht der Ausdruck auf der rechten Seite in folgenden über:

$$2\log 2\pi + C + \lim_{\rho=0}\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{1}{t^{2+2\rho}}\sum_{a_0}\frac{1}{a_0^{1+\rho}}\right),$$

wo die letzte Summation auf die ersten Coefficienten a_0 der sämmtlichen einander aequivalenten Formen (a_0, b_0, c_0) zu erstrecken ist. Substituirt man hier den aus der Gleichung:

$$\lim_{\rho=0}\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{1}{t^{2+2\rho}} = \lim_{\rho=0}\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\rho\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{\log t}{t^2}\right)$$

resultirenden Werth und setzt zur Abkürzung:

$$C + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\log n}{n^2} = \log \mathfrak{C},$$

so kommt:

$$(20)\qquad \log \Lambda'(0,0,w_1,w_2) = \log 4\pi^2\mathfrak{C} + \lim_{\rho=0}\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}} - \frac{\pi}{12}\sum_{a_0}\frac{1}{a_0^{1+\rho}}\right).$$

Man hat hiernach die folgenden beiden Darstellungen der Invariante $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$:

$$(21) \qquad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = 4\pi^2 \left(\sum_{a_0} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n a_0 n^2 e^{-a_0 n^2 \pi} \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$(22) \qquad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = 4\pi^2 e^{\mathfrak{C}} \lim_{\varrho=0} \prod_{n=1}^{n=\infty} e^{n^{-1-\varrho}} \prod_{a_0} e^{-\frac{\pi}{12} a_0^{-1-\varrho}},$$

welche den Invarianten-Charakter deutlich an sich tragen. Die auf a_0 bezüglichen Summationen und Multiplicationen sind, wie oben, auf alle diejenigen Grössen zu erstrecken, welche die ersten Coefficienten der einander aequivalenten Formen:

$$(a_0, b_0, c_0), \ (a_0', b_0', c_0'), \ (a_0'', b_0'', c_0''), \ldots$$

bilden, und die dadurch constituirte Formenclasse ist einzig und allein der Bedingung unterworfen, dass der reelle Theil der Form $a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$ eine positive Form sein muss.

Geht man schon in der Formel (19) von den Logarithmen zu den Grössen selbst über, so resultirt die Product-Darstellung:

$$(23) \qquad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = 4\pi^2 e^{C} \lim_{\varrho=0} \prod_{n=1}^{n=\infty} e^{n^{-1-\varrho}} \prod_{m,n} e^{-\frac{1}{2\pi}(f(m,n))^{-1-\varrho}},$$

wo die Multiplication im zweiten Product auf alle ganzzahligen Systeme m, n mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$ zu erstrecken ist, und auch aus dieser Darstellung erhellt der Invarianten-Charakter der Function $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$.

Die hier unter (10), (21), (22), (23) gegebenen Darstellungen der Function $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$ zeichnen sich auch dadurch aus, dass sie deren Verhalten in der Nähe der Grenzen ihrer Existenz klar legen. Diese Grenzen sind nur durch jene Bedingung, dass der reelle Theil der Form $a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$ positiv sein muss oder durch die gleichbedeutende Bedingung, dass die reellen Theile von $w_1 i, w_2 i$ negativ sein sollen, bestimmt. Dass innerhalb der so bestimmten Grenzen $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$ endlich und von Null verschieden ist, leuchtet ebenfalls unmittelbar aus der Productform (23) ein.

Es verdient wohl noch hervorgehoben zu werden, dass in allen obigen Formeln speciell $w_1 = w_2$ genommen werden kann. Dann wird:

$$b_0 = 0, \ 4a_0 c_0 = 1, \ w_1 = w_2 = \frac{i}{2c_0},$$

ferner bei Anwendung der Jacobi'schen Bezeichnungen der vollständigen elliptischen Integrale:

$$w_1 = w_2 = \frac{iK'}{K}, \ a_0 = \frac{K'}{2K}, \ c_0 = \frac{K}{2K'},$$

und es gehen aus den Gleichungen (14), (15), (16), (23) die folgenden vier Darstellungen von:

$$\Lambda'(0, 0, w, w)$$

hervor:

$$-2w(2\pi)^{\frac{2}{3}}\, i\left(\vartheta'(0, w)\right)^{\frac{4}{3}},$$

$$-8w\pi^2 i e^{\frac{1}{3}w\pi i}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-e^{2nw\pi i}\right)^4,$$

$$4\pi^2\left\{\frac{1}{2KK'}\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}\left(K^2m^2+K'^2n^2\right)e^{-\frac{2\pi}{KK'}\left(K^2m^2+K'^2n^2\right)}\right\}^{\frac{2}{3}},$$

$$4\pi^2 e^C\lim_{\varrho=0}\prod_{n=1}^{n=\infty}e^{n^{-1-\varrho}}\prod_{m,n}e^{-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'}m^2+\frac{K'}{2K}n^2\right)^{-1-\varrho}}.$$

Der Index von w ist hierbei, als überflüssig, weggelassen worden.

Da nun nach JACOBI:

$$\pi\left(\vartheta'(0, w)\right)^2 = \varkappa\varkappa'(2K)^3$$

ist, wo $\varkappa, \varkappa'$ die complementären Moduln bedeuten, so resultirt aus der Gleichsetzung des ersten und dritten jener vier Ausdrücke von $\Lambda'(0, 0, w, w)$ folgende eigenartige Darstellung von $\varkappa\varkappa'$:

$$(24)\quad \varkappa\varkappa' = \frac{\pi^3}{8\sqrt{2}KK'}\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}\left(\frac{m^2}{K'^2}+\frac{n^2}{K^2}\right)e^{-\frac{2\pi}{KK'}\left(K^2m^2+K'^2n^2\right)}.$$

Ebenso liefert die Gleichsetzung des zweiten und vierten Ausdrucks die Formel:

$$(25)\quad q^{-\frac{1}{3}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-q^{2n}\right)^{-4} = e^{-C}\frac{2K'}{K}\lim_{\varrho=0}\prod_{n=1}^{n=\infty}e^{-n^{-1-\varrho}}\prod_{m,n}e^{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'}m^2+\frac{K'}{2K}n^2\right)^{-1-\varrho}},$$

in welcher nach JACOBI'scher Weise:

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$$

gesetzt ist, und, da nach JACOBI's Fundamenta (36, 4):

$$\pi^2 q^{\frac{1}{3}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-q^{2n}\right)^4 = (2\varkappa\varkappa')^{\frac{2}{3}}K^2$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\pi^2(2\varkappa\varkappa')^{-\frac{2}{3}} = e^{-C}\cdot 2KK'\lim_{\varrho=0}\prod_{n=1}^{n=\infty}e^{-n^{-1-\varrho}}\prod_{m,n}e^{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'}m^2+\frac{K'}{2K}n^2\right)^{-1-\varrho}},$$

welche eine merkwürdige Darstellung von $\varkappa\varkappa'$ als unendliches Product enthält.

Ich bemerke hierbei, dass $e^{-C} = 0.56146\ldots$ also um weniger als 0.016 von 0.57721566... d. h. von dem Werke von C selbst verschieden ist. Der angenäherte Werth der Wurzel der Gleichung:

$$x = e^{-x}$$

ist: 0.5672, und wenn für $-x$ die Gauss'sche Function $\Psi(z)$, für welche $\Psi(0) = -C$ ist, substituirt wird, und also die Gleichung:

$$\Psi(z) + e^{\Psi(z)} = 0$$

zu befriedigen ist, so wird $z = 0.006\ldots$ also nahe gleich Null.

XVI.

Sind a, b, c ganze Zahlen, für welche $4ac - b^2$ positiv ist, und setzt man wie oben im art. XIV:

$$4ac - b^2 = \Delta,\ a = a_0\sqrt{\Delta},\ b = b_0\sqrt{\Delta},\ c = c_0\sqrt{\Delta},$$

und wie im art. XV:

$$f(m,n) = a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2,$$

also:

$$\sqrt{\Delta} f(m,n) = am^2 + bmn + cn^2,$$

so ist gemäss der Formel (18) des art. XV:

(1) $$\lim_{\rho=0}\left(-\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{(\sqrt{\Delta})^{1+\rho}}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}}\right)$$
$$= \log 4\pi^2 + 2C - \log \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}\right),$$

und es ist hierbei unter $\sqrt{\Delta}$ stets der absolute Werth der Quadratwurzel aus Δ zu verstehen.

Wird in der Gleichung (1) für (a, b, c) ein vollständiges System unter einander nicht aequivalenter Formen gesetzt und dann summirt, so ergiebt sich, dass der Grenzwerth:

(2) $$\lim_{\rho=0}\left(-\frac{K(D)}{\rho} + \frac{1}{2\pi}\sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\frac{(\sqrt{\Delta})^{1+\rho}}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}}\right)$$

durch den Werth von:

3) $$K(D)\log 4\pi^2 + 2CK(D) - \sum_{a,b,c}\log \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)$$

ausgedrückt wird. Hierbei ist, wie im art. VIII,[1] mit D die Discriminante der Form (a, b, c) bezeichnet, so dass:

$$D = b^2 - 4ac = -\Delta$$

[1] Sitzungsbericht vom 30. Juli 1885. XXXVIII.

ist, und $K(D)$ bedeutet, wie a. a. O., die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen der Discriminante D.

Gemäss der Formel ($\mathfrak{M}^0$) des art. VIII ist nun:

$$(4)\qquad \sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\frac{(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}} = \tau\,(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}\sum_{h,k}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{1}{(hk)^{1+\varrho}},$$

wenn die Summation auf alle positiven Zahlen h, k erstreckt wird, die zu Q relativ prim sind, und auf alle Zahlen m, n, für welche $am^2+bmn+cn^2$ zu Q prim ist. Dabei ist die Zahl Q durch die Gleichung:

$$D = D_0 Q^2,$$

so wie dadurch bestimmt, dass D_0 die der Discriminante D entsprechende »Fundamental-Discriminante« sein soll. Wenn man ferner, wie im art. IX:

$$D_0 = -\Delta_0$$

setzt, so kann die Gleichung (4) in folgender Weise dargestellt werden:

$$(5)\qquad \sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\left(\frac{Q^2}{am^2+bmn+cn^2}\right)\frac{(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}} = \tau\,(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}\sum_{h,k}\left(\frac{Q^2}{h}\right)\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{1}{(hk)^{1+\varrho}},$$

wo nunmehr über alle positiven Zahlen h, k und über alle Systeme von Zahlen m, n mit alleinigem Ausschluss des Systems $m=0, n=0$ zu summiren ist.

Für den Fall $Q=1$ kann also der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5) unmittelbar in den Ausdruck (2) eingesetzt werden, und dieser erhält dann folgende Gestalt:

$$(6)\qquad \lim_{\varrho=0}\left(-\frac{K(-\Delta)}{\varrho}+\frac{\tau}{2\pi}(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}\sum_{h,k}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{1}{(hk)^{1+\varrho}}\right)\qquad (h,k=1,2,3,\ldots).$$

Nun wird, da $Q=1$ ist, $\Delta=\Delta_0$, $D=D_0$; ferner ist:

$$\lim_{\varrho=0}\left(-\frac{1}{\varrho}+\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{1}{h^{1+\varrho}}\right)=C,$$

also:

$$\lim_{\varrho=0}(\sqrt{\Delta_0})^{1+\varrho}\sum_{h,k}\left(\frac{-\Delta_0}{k}\right)\frac{1}{(hk)^{1+\varrho}} = \lim_{\varrho=0}\sqrt{\Delta_0}\,(1+\varrho\log\sqrt{\Delta_0})\left(\frac{1}{\varrho}+C\right)\sum_{k}\left(\frac{-\Delta_0}{k}\right)\frac{1-\varrho\log k}{k},$$

und folglich wenn, wie im art. VIII und IX:

$$\sum_{k}\left(\frac{-\Delta_0}{k}\right)\frac{1}{k}=H(-\Delta_0),\quad \sum_{k}\left(\frac{-\Delta_0}{k}\right)\frac{\log k}{k}=H'(-\Delta_0)$$
$$(k=1,2,3,\ldots)$$

gesetzt wird:

$$\lim_{\rho=0}\left\{(\sqrt{\Delta_0})^{1+\rho}\sum_{h,k}\left(\frac{-\Delta_0}{k}\right)\frac{1}{(hk)^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}\sqrt{\Delta_0}\,H(-\Delta_0)\right\}$$
$$=(C+\log\sqrt{\Delta_0})\sqrt{\Delta_0}\,H(-\Delta_0)-\sqrt{\Delta_0}\,\overline{H}(-\Delta_0).$$

Hieraus erhellt, wenn man noch die Gleichung ($\mathfrak{N}$) im art. VIII:

$$\sqrt{\Delta_0}\,H(-\Delta_0)=\frac{2\pi}{\tau}K(-\Delta_0)$$

in Rücksicht zieht, dass der Grenzwerth (6) gleich:

$$\frac{\tau\sqrt{\Delta_0}}{2\pi}H(-\Delta_0)\left\{C+\log\sqrt{\Delta_0}-\frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)}\right\}$$

oder also gleich:

$$K(-\Delta_0)\left\{C+\log\sqrt{\Delta_0}-\frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)}\right\}$$

wird. Da aber derselbe Grenzwerth andererseits durch den Ausdruck (3) dargestellt wird, so resultirt die Gleichung:

$$(7)\quad \frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)}+C+\log 4\pi^2-\log\sqrt{\Delta_0}=\frac{1}{K(D_0)}\sum_{a,b,c}\log A'\left(0,0,\frac{-b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c},\frac{b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}\right).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite stellt

den Mittelwerth der Logarithmen der Invariante A' für alle Classen der Discriminante D_0 oder $-\Delta_0$ dar;

der erste Term auf der linken Seite:

$$\frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)}$$

ist nichts Anderes als

der negative Werth des nach ρ genommenen logarithmischen Differentialquotienten von:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\rho}}$$

für $\rho=0$,

und die Gleichung (7) zeigt also, dass diese beiden Werthe sich von einander um:

$$C+\log 4\pi^2-\log\sqrt{\Delta_0}\quad.$$

unterscheiden.

Dies stimmt mit dem Inhalte der Gleichung (2) im art. XIV genau überein. Um sich davon zu überzeugen braucht man nur für $\mathfrak{M}(\Delta_0)$ d. h. für den Mittelwerth von:

$$\log c_0(\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2))^{-\frac{2}{3}}+\log\sqrt{\Delta_0}$$

denjenigen zu substituiren, welcher aus der Relation (14) im art. XV hervorgeht.

XVII.

Über die Bedeutung des im vorigen Abschnitte hergeleiteten Resultats (7) sind einige Bemerkungen hinzuzufügen.

Wenn man auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\log \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-\Delta_0}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_p \log\left(1 - \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\varrho}}\right)^{-1},$$

in welcher die Summation rechts über alle Primzahlen zu erstrecken ist, nach ϱ differentiirt und alsdann $\varrho = 0$ setzt, so kommt:

$$(8) \qquad \frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)} = \lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right)},$$

und es wird also auf Grund der Formel (7):

$$(9) \qquad -\lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right)}$$

$$= C + \log 4\pi^2 - \log\sqrt{\Delta_0} - \frac{1}{K(-\Delta_0)} \sum_{a,b,c} \log \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}\right).$$

Unter der Annahme, dass der Grenzwerth auf der linken Seite mit dem der Reihe:

$$-\sum_p \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right) \frac{\log p}{p - \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right)}$$

übereinstimmt, wenn darin die Primzahlen p ihrer natürlichen Reihenfolge nach genommen werden, folgt, wie ich in einem in den Pariser Comptes Rendus vom 22. November 1886 veröffentlichten Aufsatze bewiesen habe, dass:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{1}{n-m} \sum \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right) \frac{p \log p}{p - \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right)} = 0 \qquad (m < p \leqq n)$$

ist, wenn die Summation nur über alle Primzahlen p zwischen m und n erstreckt wird. Man kann dann also schliessen, dass in einem hinreichend grossen und aber auch hinreichend entfernten Intervalle die Summe der Logarithmen der Primzahlen, für welche $\left(\frac{-\Delta_0}{p}\right)$ den einen oder den anderen Werth hat, annähernd gleich ist.

Aber schon in der gewöhnlichen Theorie der quadratischen Formen tritt eigentlich die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{|D|}}{n}\right)^{1+\rho}$$

auf, und in den hier dargelegten Untersuchungen ist es diese Reihe, welche nothwendig an Stelle der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\rho}}$$

der Betrachtung zu Grunde gelegt werden muss. Bezeichnet man nun zur Abkürzung den nach ρ genommenen Differentialquotienten von:

$$\log\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{|D|}}{n}\right)^{1+\rho},$$

für $\rho = 0$, mit $\mathfrak{H}(D)$, so ist:

$$(10)\qquad \mathfrak{H}(-\Delta_0) = -\frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)} + \log\sqrt{\Delta_0}\,.$$

Bei Anwendung dieser Bezeichnung nimmt die Formel (7) des vorigen Abschnittes folgende Gestalt an:

$$(11)\quad \mathfrak{H}(-\Delta_0) = C - \frac{1}{K(D_0)}\sum_{a,b,c}\log\frac{1}{4\pi^2}\Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}\right),$$

und man sieht daher, dass sich der Werth von $\mathfrak{H}(-\Delta_0)$ von dem Mittelwerthe des Logarithmus der Invariante:

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)}$$

nur um die Euler'sche Constante C unterscheidet. Die Werthe, deren Mittel zu nehmen ist, sind durch irgend ein System nicht aequivalenter Formen (a, b, c) der Discriminante $-\Delta_0$ und alsdann dadurch bestimmt, dass $w_1, -w_2$ die verschiedenen Systeme von Wurzeln der Gleichungen:

$$a + bw + cw^2 = 0$$

sein sollen.

Benutzt man den im art. XV mit (15) bezeichneten Ausdruck von $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$, so wird:

$$(12)\quad \frac{4\pi^2}{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)} = c_0 e^{\frac{\pi}{6c_0}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - e^{2nw_1\pi i}\right)^{-2}\left(1 - e^{2nw_2\pi i}\right)^{-2},$$

und es zeigt sich also, dass $\mathfrak{H}(-\Delta_0) - C$ gleich dem Mittelwerth von:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c} - 2\log\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - e^{2nw_1\pi i}\right)\left(1 - e^{2nw_2\pi i}\right)$$

ist. Der Werth des Products lässt sich leicht abschätzen, wenn man dafür die Reihenentwickelung einzetzt. Denn dann tritt an die Stelle von:

$$-2\log\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2nw_1\pi i})(1-e^{2nw_2\pi i})$$

der Ausdruck:

(14) $$-\tfrac{2}{3}\log\left(1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)e^{(n^2+n)w_1\pi i}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)e^{(n^2+n)w_2\pi i}\right).$$

Nun ist:

$$\left|\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)e^{(n^2+n)w\pi i}\right| < \sum_{n=1}^{n=\infty}(2n+1)\left|e^{(n^2+n)w\pi i}\right|,$$

und wenn zur Abkürzung $|e^{2w\pi i}| = r$ gesetzt wird:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(2n+1)\left|e^{(n^2+n)w\pi i}\right| = 3r+5r^3+7r^6+9r^{10}+11r^{15}+\dots.$$

Der Werth der Reihe auf der rechten Seite ist aber kleiner als:

$$3r+\frac{5r^3+2r^6}{1-r^3},$$

wenn nur $r<\frac{7}{9}$ ist. und also, wenn $r<\frac{1}{2}$ vorausgesetzt wird, kleiner als:

$$3r+6r^3.$$

Ferner ist für jede complexe Grösse Re^{vi}, in welcher R positiv und kleiner als Eins ist:

$$\log(1+Re^{vi})(1+Re^{-vi}) < 2\log(1+R) < 2R-R^2+\tfrac{2}{3}R^3,$$

und der absolute Werth des Ausdrucks (14) ist daher kleiner als der Werth der Ausdrucks:

(15) $$\tfrac{4}{3}(R-\tfrac{1}{2}R^2+\tfrac{1}{3}R^3),$$

wenn in demselben R gleich:

$$\left|\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)e^{(n^2+n)w_1\pi i}\right|$$

oder noch grösser angenommen wird. Man kann also z. B.:

$$R = 3r+6r^3$$

setzen. Dann wird:

$$\tfrac{4}{3}(R-\tfrac{1}{2}R^2+\tfrac{1}{3}R^3) = 4r+8r^3-6r^2(1+2r^2)^2+12r^3(1+2r^2)^3,$$

und der Werth des Ausdrucks auf der rechten Seite ist kleiner als:

(16) $$4r-2r^2(1+2r^2)^2(3-10r(1+2r^2)).$$

Für $r < 0,2$ wird $3 > 10r(1+2r^2)$ und also der Werth des Ausdrucks (16) kleiner als $4r$. Hieraus folgt endlich, dass, für $r < 0,2$, der absolute Werth des Ausdrucks (14) kleiner als:

$$4r \text{ oder } 4\left|e^{2w_1\pi i}\right|$$

ist. Dieser absolute Werth ist aber zugleich derjenige von:

$$(17)\qquad \mathfrak{H}(-\Delta_0) - C - \frac{1}{K(-\Delta_0)}\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c}\right),$$

und der Ausdruck (17) ist daher seinem absoluten Werthe nach kleiner als:

$$\frac{4}{K(-\Delta_0)}\sum_{a,b,c}\left|e^{2w_1\pi i}\right| \text{ oder } \frac{4}{K(-\Delta_0)}\sum_{a,b,c} e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}},$$

d. h. kleiner als der Mittelwerth von:

$$4e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}},$$

wenn nur die Formen a, b, c sämmtlich so gewählt werden, dass $e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}} < 0.2$ ist.

Nach Lagrange[1] können die Formen a, b, c als »Reducirte«, d. h. so gewählt werden, dass:

$$|b| < a,\ |b| \leqq c, \text{ also } b \leqq \sqrt{\frac{\Delta_0}{3}}$$

ist. Wird dann c noch so bestimmt, dass $a \geqq c$ ist, so ist:

$$c \leqq \sqrt{\frac{\Delta_0}{3}}, \text{ also } \frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c} \geqq \pi\sqrt{3}$$

---

[1] Abhandlungen der Berliner Akademie von 1773. Oeuvres de Lagrange, Tome VII, 1869, p. 695. Jacobi hat schon vor mehr als fünfzig Jahren in Vorlesungen, welche durch Abschriften der Rosenhain'schen Ausarbeitung vielfach Verbreitung gefunden haben, die Lagrange'sche Reductionsmethode dazu benutzt, um den absoluten Werth der von ihm mit q bezeichneten Grösse möglichst zu verkleinern und damit eine möglichst starke Convergenz der ϑ-Reihen zu erzielen. Die eingehende Darstellung dieser Methode, welche die 19., 20. und 21. Vorlesung ausfüllt, schliesst in der Rosenhain'schen Ausarbeitung, deren Original sich in der Bibliothek der Akademie befindet, mit den Worten: »Hiermit ist diese wichtige Untersuchung beendigt, und wir sehen, dass diese Methode auch für die ungünstigsten Fälle eine Reihe giebt, die schneller convergirt als irgend eine andere in der Analysis und auch für den allgemeinsten Begriff unserer Transcendenten gilt. Wir haben nämlich gesehen, dass, wenn q reell ist, es durch Transformation immer kleiner werden kann als

$$e^{-\pi} = \frac{1}{23.14} = 0.0432,$$

und dass, wenn q imaginär ist, sein Modul immer kleiner gemacht werden kann als

$$e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{15.21} = 0.0657.«$$

und:

$$4e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}} \leqq 4e^{-\pi\sqrt{3}} < 0.01732.$$

Nun ist andererseits der kleinste Werth von $\frac{\pi}{6}x - \log x$, nämlich der für $x = \frac{6}{\pi}$, grösser als 0.35297; für jedes der Glieder unter dem Summenzeichen im Ausdruck (17) besteht daher eine Gleichung:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c} = 0.35297 + \mathfrak{p},$$

in welcher $\mathfrak{p}$ eine positive Grösse bedeutet. Hiernach muss:

$$\mathfrak{H}(-\Delta_0) - C - 0.35297 - \mathfrak{p} > 0.01732$$

sein, und hieraus folgt endlich, da $C > 0.577215$ ist, die Ungleichheit:

(18) $$\mathfrak{H}(-\Delta_0) > 0.912865.$$

Der mit (10) bezeichneten Definitionsgleichung nach ist:

$$\sqrt{\Delta_0}\,H(-\Delta_0)\,\mathfrak{H}(-\Delta_0) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n},$$

also mit Berücksichtigung der Gleichung ($\mathfrak{R}$) im art. VIII:

$$\frac{2\pi}{\tau}K(-\Delta_0)\,\mathfrak{H}(-\Delta_0) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n},$$

und die Ungleichheit (18) ergiebt daher die folgende:

(19) $$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n} > \tfrac{9}{10}K(-\Delta_0).$$

Die Reihe auf der linken Seite ist der Coefficient von ρ in der Entwickelung von:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\rho}$$

nach steigenden Potenzen von ρ. Das erste, von ρ unabhängige Glied dieser Entwickelung bildet die Reihe:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n},$$

deren Werth nach art. VIII ($\mathfrak{R}$) gleich:

$$K(-\Delta_0)$$

ist. Dass dieser Werth, da die Classenanzahl $K(-\Delta_0) \geqq 1$ ist, stets positiv und zwar mindestens gleich 1 sein muss, ist eines der Haupt-

resultate der vor einem halben Jahrhundert von DIRICHLET veröffentlichten analytisch-arithmetischen Untersuchungen. Die Theorie der elliptischen Functionen gestattete, wie sich im Vorstehenden gezeigt hat, einen zweiten Schritt in dieser Richtung zu thun, indem der Nachweis ermöglicht wurde, dass auch der zweite Coefficient der Reihe, welche aus der Entwickelung von:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\rho}$$

nach Potenzen von ρ ensteht, immer positiv und zwar grösser als:

$$0.912865$$

sein muss.

Aber nicht bloss in Bezug auf diese specielle aus der Gleichung (7) abgeleitete Folgerung zeigt die Bedeutung des in dieser Gleichung enthaltenen Resultats eine Analogie mit derjenigen, welche dem DIRICHLET'schen Resultate:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}=K(-\Delta_0) \tag{20}$$

beizulegen ist, sondern die Analogie tritt in den beiden Resultaten selbst ganz deutlich hervor, wenn man sie dahin zusammenfasst, dass

die beiden ersten Coefficienten der Entwickelung von:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\rho},$$

nach steigenden Potenzen von ρ, durch:

$$\rho\sum_{a,b,c}\log\frac{4\pi^2 e^{\frac{1}{\rho}+C}}{\Lambda'(0,0,w_1,w_2)}$$

dargestellt werden, wenn man die Summation auf ein vollständiges System unter einander nicht aequivalenter Formen (a,b,c) der Discriminante $-\Delta_0$ erstreckt und für w_1, $-w_2$ die zusammengehörigen Wurzeln jeder der quadratischen Gleichungen:

$$a+bw+cw^2=0$$

nimmt.

Hierbei wird freilich dem in der Gleichung (20) dargestellten DIRICHLET-schen Resultate und dem daraus unmittelbar folgenden:[1]

$$-\frac{\tau}{2\Delta_0}\sum_{n=1}^{n=\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)n=K(-\Delta_0) \tag{21}$$

nicht die übliche Bedeutung beigelegt, dass dadurch

[1] Vergl. die mit (𝔓) bezeichnete Formel im art. VIII, Sitzungsberichte vom 30. Juli 1885; XXXVIII.

die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen der Discriminante $-\Delta_0$ bestimmt werde, sondern es wird, gewissermaassen entgegengesetzter Weise, in den Gleichungen (20) und (21) vielmehr die Summirung der Reihen auf der linken Seite durch die Zahl, welche die Classenanzahl der quadratischen Formen der Discriminante $-\Delta_0$ angiebt, gefunden; und dies geschieht offenbar insofern mit Recht, als die Anzahl der Rechnungsoperationen, welche zur Ermittelung der reducirten Formen (a, b, c) der Discriminante $-\Delta_0$ und also auch der Zahl $K(-\Delta_0)$ führt, nur proportional $\sqrt{\Delta_0}\log\Delta_0$ ist, während die directe Berechnung der Summe auf der linken Seite der Gleichung (21) eine der Zahl Δ_0 selbst proportionale Anzahl von Rechnungsoperationen erfordert.[1] Dazu kommt, dass die Aufstellung der reducirten Formen (a, b, c), wie sich oben gezeigt hat, nicht bloss den Werth des ersten schon von DIRICHLET ermittelten, sondern auch den Werth des zweiten Coefficienten in der Entwickelung von:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\varrho}$$

liefert, und es ist dabei hervorzuheben, dass aus den obigen Formeln ein besonders einfacher angenäherter Werth der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}$$

und also auch der mit $\overline{H}(-\Delta_0)$ bezeichneten Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\log n}{n}$$

hervorgeht.

Es ist nämlich oben gezeigt worden, dass $\mathfrak{H}(-\Delta_0) - C$ gleich dem Mittelwerth von:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c} - 2\log\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2nw_1\pi i})(1-e^{2nw_2\pi i})$$

ist, und dass der letzte Term dieses Ausdrucks seinem absoluten Werthe nach stets kleiner als:

$$4\left|e^{2w_1\pi i}\right|$$

[1] Die beiden von 1834 und 1837 datirten, im II. Bande von GAUSS' Werken abgedruckten Fragmente, in welchen die von DIRICHLET in jener Zeit gefundenen und schon kurz darauf, im Mai 1838, veröffentlichten Formeln zur Bestimmung der Classenanzahl, wenigstens für negative Determinanten, hergeleitet werden sollten, sind betitelt: »De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem«. GAUSS scheint hiernach in jenen Formeln nicht sowohl eine Bestimmung der Classenanzahl gesehen zu haben, als eben nur die Darstellung eines Zusammenhangs derselben mit den anderen, durch die Formeln gegebenen Ausdrücken.

bleibt. Mit Hülfe der Gleichung (10) erschliesst man hieraus, dass der Werth von:

$$-\frac{\tau\sqrt{\Delta_0}}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\log n}{n}$$

stets zwischen:

$$\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c}-\log\frac{\Delta_0}{c}\right)+C\cdot K(-\Delta_0)+4\sum_{a,b,c}e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}$$

und:

$$\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c}-\log\frac{\Delta_0}{c}\right)+C'\cdot K(-\Delta_0)-4\sum_{a,b,c}e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}$$

liegt. Dabei ist daran zu erinnern,[1] dass:

$$\tau = 6 \text{ für } \Delta_0 = -3, \quad \tau = 4 \text{ für } \Delta_0 = -4,$$

sonst aber stets:

$$\tau = 2$$

ist.

Für die ersten 5 Fundamentaldiscriminanten:

$$\Delta_0 = 3, 4, 7, 8, 11$$

existirt nur je eine reducirte Form:

$$(1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 1), (2, 0, 1), (3, 1, 1),$$

und in allen diesen ist also $c = 1$. Ferner sind die Werthe von:

	$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c}-\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c}$,	$\log\sqrt{\Delta_0}$,	$4e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}$,
für $\Delta_0 = 3$:	0.357594...,	0.549306...,	0.01732....,
$\Delta_0 = 4$:	0.354050...,	0.693147...,	0.075......,
$\Delta_0 = 7$:	0.412357...,	0.972955...,	0.00098232.,
$\Delta_0 = 8$:	0.441240...,	1.03972077.,	0.00055336.,
$\Delta_0 = 11$:	0.537632...,	1.1989476..,	0.00011938.,

also die Werthe von:

	$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c}-\log\frac{\Delta_0}{c}+C$
für $\Delta_0 = 3$:	0.385503...,
$\Delta_0 = 4$:	0.238118...,
$\Delta_0 = 7$:	0.016617...,
$\Delta_0 = 8$:	−0.021266...,
$\Delta_0 = 11$:	−0.083629....

[1] Vergl. art. VIII im Sitzungsbericht vom 30. Juli 1885. XXXVIII.

Hiernach ist:

$$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-3}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0.385503 + \varepsilon\cdot 0.01732$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0.238118 + \varepsilon\cdot 0.075$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-7}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0.016617 + \varepsilon\cdot 0.001$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0.021266 + \varepsilon\cdot 0.0005534$$

$$\frac{\sqrt{11}}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-11}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0.083629 + \varepsilon\cdot 0.00012,$$

wo ε eine zwischen -1 und $+1$ liegende Grösse bedeutet.

Um noch ein Beispiel anzuführen, in welchem die Classenanzahl grösser als *Eins* ist, wähle ich $\Delta_0 = 31$. Die drei reducirten Formen sind dann.

$$(8, 1, 1), \quad (4, 1, 2), \quad (4, -1, 2),$$

und c hat also die drei Werthe $1, 2, 2$. Der mittlere Werth von:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c}$$

wird gleich:

$$0.688620\ldots.$$

$\log\sqrt{31}$ ist gleich:

$$1.7169936\ldots,$$

und:

$$\frac{\sqrt{31}}{3\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-31}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0.4511586 + \varepsilon\cdot 0.00043,$$

wo $-1 < \varepsilon < 1$ ist.

Anstatt, wie es hier geschehen ist, für den mit (14) bezeichneten Ausdruck den einfacheren, seinem absoluten Werthe nach jedenfalls grösseren:

$$4e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}$$

einzuführen, kann man auch einen angenäherteren Werth jenes Ausdrucks (14) zur Ermittelung des Werthes der Reihen:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\log n}{n}$$

benutzen. Bei der guten Convergenz der in dem Ausdruck (14) enthaltenen Reihen:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1) e^{(n^2+n)w\pi i}$$

ist nur die Berechnung weniger Glieder erforderlich.

Ich habe noch zu erwähnen, dass Hr. H. Weber, wie ich aus einer in dem neuesten Hefte der mathematischen Annalen (Bd. XXXIII, Heft 3) erschienenen Arbeit, von welcher er mir freundlichst einen Separatabdruck geschickt hat, ersehe, den Grenzwerth von:

$$-\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{am^2+bmn+cn^2} \right)^{1+\rho},$$

für $\rho = 0$, unter der Voraussetzung reeller Werthe von a, b, c, mittels einer von der im art. VIII dargelegten ganz verschiedenen Methode, aber auch unter Anwendung der Γ-Functionen (nach Dirichlet'scher Weise), auf die im art. VII meiner Mittheilung vom 30. Juli 1885 behandelte »Invariante der durch die Form (a, b, c) repraesentirten Classe«

$$\frac{1}{c} \left(\vartheta'(0, w_1)\, \vartheta'(0, w_2) \right)^{\frac{2}{3}}$$

zurückgeführt hat.

(Fortsetzung folgt.)

Ausgegeben am 21. März.

1889.

XV.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

14. März. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Pernice las über **letztwillige Auflagen und Stiftungen.**

2. Hr. Köhler las über **die auf das Bild der Parthenos bezüglichen Rechnungsurkunden.**

Die Mittheilung erfolgt umstehend.

Ich lese:

Επὶ Ἀῤῥ[ενηΐδου (?) γρ]αμματεύ[οντος ἐπ]-
ιστάτησι ἀ[γάλμα]τος χρυσοῦ· ἐ[πὶ τῆς]
βουλῆς, ἧ[ι] Ἀρ[χέστ]ρατο[ς ἐγραμμάτε]-
υε π[ρ . . . .] σα[. . . . . · ταμί]-
[α]ι· Φιλ[. . . . . . . ἐγρ]αμ[μάτευε· . . . . .]
. ιο[ς . . . .]δαο[ς . . . ε]ύς, Μ . . .-
ος [. . . . . ε]ύς, Λ[άχη]ς Κ[οιλεύς], Δίερχ[σ]-
ις [Μαραθώ]νιος,[1] [Ἀν]τί[. . . ος] Ἀναφλύ[σ]-
ΔΔ τιο[ς, Κριτ]ίας Πει[ραεύς, Μενέσ]τρα[το]-
[Ͱ] ς, [Θ]α[λίαρ]χος· λῆμ[μ]α παρὰ [ταμ]ιῶν

[- - Τ] Ἐλέ[φαν]τος τιμ[ή]
- ΧΧΗ

Die Überschrift der Inschrift weicht in der Fassung in mehreren Punkten von der von Hrn. Foucart herausgegebenen ab; die Inschriften stammen aus einer Zeit, in welcher der Urkundenstil noch wenig ausgebildet war. Das Bild, welches in jener schlechtweg *τὸ ἄγαλμα* heisst, ist in dieser genauer bezeichnet als *χρυσοῦν ἄγαλμα*. Was Z. 7—8 hinter der Bezeichnung des ersten Rathsschreibers stand, welche in der Inschrift des *Bulletin* fehlt, habe ich nach den von mir gelesenen Buchstabenresten nicht feststellen können; man erwartet an dieser Stelle den Namen des Archon zu finden. Die Reste von Eigennamen Z. 9—19 rühren unzweifelhaft von der Liste der Schatzmeister her, aber die Liste war, ähnlich wie in der Inschrift im *Bulletin*, nicht vollständig. Am auffallendsten ist in der hier mitgetheilten Inschrift, dass die Namen der Schatzmeister theils mit, theils ohne Demotikon angeführt sind, eine Unregelmässigkeit, für welche es vielleicht kein zweites Beispiel giebt. Von der Liste der Schatzmeister abgesehen, stimmt in der Fassung mit der von mir mitgetheilten Rechnung eine schon seit längerer Zeit bekannte Inschrift überein, welche von dem letzten Herausgeber (*C. I. A.* I 299) vermuthungsweise, aber, wie sich jetzt herausstellt, mit Recht auf die Anfertigung des Bildes der Parthenos bezogen worden ist; die im Anfang verstümmelte Inschrift ist nach dem Muster der obigen zu ergänzen.[2]

[1] Ein gleichnamiger Nachkomme des Epistaten ist genannt in einer Grabinschrift, welche unter die Inschriften der Kaiserzeit aufgenommen worden ist (*C. I. A.* III 2180), aber schwerlich in diese Zeit gehört. Das Original der nur aus einer Abschrift Fourmont's bekannten Inschrift ist nicht erhalten.

[2] Der Name des Rathsschreibers ist zu lesen [Οἰ]ώνι[χ]ος Ἀλωπεκῆθεν.

Die in den drei besprochenen Urkunden erhaltenen Überreste der Rechnungen selbst beziehen sich auf den Ankauf von Material für die Statue, von Gold und Elfenbein. Das angekaufte Gold ist angegeben nach dem Gewicht und nach dem in attischem Silbergeld gezahlten Gesammtwerth (τιμή), das Elfenbein nur nach dem Werthe oder Preis. Hr. Foucart hat aus der von ihm mitgetheilten Rechnung das Verhältniss des Goldes zum Silber berechnet auf 14.044, ist aber in der Rechnung auf Schwierigkeiten gestossen, welche er nicht hat beseitigen können. Ich glaube Hr. Foucart hat die in der Inschrift verzeichneten Ziffern unrichtig abgetheilt und bezogen. Der für das angekaufte Gold gezahlte Preis betrug 𐅊𐅉𐅉𐅉𐅈ΤΤΧΧΧΧ𐅆Η𐅄𐅂𐅂IIIII d. i. 526652 Drachmen 5 Obolen; das Gewicht des Goldes 𐅈ΤΧ𐅆[ΗΔ]𐅃𐅂𐅂[𐅂] d. i. 37618 Drachmen. Das Gold war berechnet zum Kurse von 14:1; fünf Obolen waren wie es scheint für Nebenausgaben gezahlt worden. Dasselbe Werthverhältniss ist nachzuweisen in einer Rechnungsurkunde aus dem Jahre Ol. 86, 3. 434/3 v. Chr. *C. I. A.* I 301. Der für Gold gezahlte Preis ist in dieser Inschrift angegeben mit 1372 Drachmen; danach ist die Angabe des Gewichtes des Goldes zu ergänzen 𐅄ΔΔΔ[Δ𐅃𐅂𐅂𐅂] d. i. 98 Drachmen.

An dem Bilde der Parthenos waren nach Thukydides (II 13, 5) 40 Talente, nach der genaueren Angabe des Philochoros 44 Talente Gold zur Verwendung gekommen; geweiht wurde das Bild an den grossen Panathenäen des Jahres 438. In den drei Jahren, auf welche sich die erhaltenen Rechnungsurkunden beziehen, waren nicht mehr als 10—11 Talente Goldes verwendet worden. Ich schliesse daraus, dass mit der Herstellung des Bildes in demselben Jahre begonnen worden ist, wie mit dem Bau des Tempels, für welchen jenes bestimmt war, nämlich in der zweiten Hälfte des Jahres 447, und dass Pheidias volle neun Jahre an dem Bilde gearbeitet hat.[1]

---

[1] Für die Anfertigung des Zeusbildes in Olympia nimmt Rudolph Schöll einen Zeitraum von wenigstens 6—8 Jahren an (Sitzungsber. der phil.-hist. Cl. der bayer. Akademie der W. 1888 S. 42).

Ausgegeben am 21. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.
XVI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

21. März. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

Hr. Auwers las über die Bearbeitung eines Catalogs von 303 Anschlusssternen für Zonenbeobachtungen zwischen — 2° und — 23° Declination.

Ausgegeben am 4. April.

1889.

XVII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

28. März. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Brunner las über Spielarten und Abspaltungen der Friedlosigkeit.

2. Hr. Conze legte von Hrn. Dr. O. Puchstein einen zweiten Artikel vor: Zur sogenannten Gigantomachie.

Die Mittheilung wird in einem der nächsten Sitzungsberichte erfolgen.

Ausgegeben am 4. April.

1889.

XVIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

28. März. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

1. Hr. Schwendener las: Zur Doppelbrechung vegetabilischer Substanzen.

2. Hr. du Bois-Reymond legte eine neue Mittheilung des Hrn. Prof. I. Rosenthal in Erlangen vor: über calorimetrische Versuche an Säugethieren.

3. Hr. Kronecker gab eine Fortsetzung seiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen.

Sämmtliche Mittheilungen folgen hier.

Zur Doppelbrechung vegetabilischer Objecte.

Von S. Schwendener.

1. Kirschgummi und Traganth.

In einer Mittheilung über das optisch-anomale Verhalten des Kirschgummis und des Traganthes macht mir V. von Ebner[1] den Vorwurf, ich habe in meiner Abhandlung[2] über Quellung und Doppelbrechung vegetabilischer Membranen eine »principiell wichtige Thatsache geleugnet, die Thatsache nämlich, dass es Körper gibt, welche gegen Druck und Zug entgegengesetzt reagiren, wie Glas«. Der Autor weist sodann auf die bekannten Versuche von Mach[3] mit syrupartiger Metaphosphorsäure und auf das von ihm selbst beobachtete Verhalten von Kirsch- und Traganthgummi hin und schliesst hieran die Bemerkung, ich suche diese Beobachtungen »in anderer Weise zu deuten«.

Es könnte nach diesen einleitenden Worten V. von Ebner's zweifelhaft erscheinen, ob die von mir erhobenen Einwände, betreffend das Verhalten von Kirsch- und Traganthgummi, sich auf das Gebiet der Thatsachen, d. h. auf das unmittelbare Ergebniss der Beobachtung beziehen, oder ob ich bloss in der Deutung von Thatsachen, die ich anerkenne, eine abweichende Ansicht vertrete. Um diese Unklarheit zu beseitigen, bemerke ich ausdrücklich, dass ich die Richtigkeit der von Ebner'schen Beobachtungen nicht bestritten und nur in Bezug auf die daran geknüpften Schlussfolgerungen mich ablehnend geäussert habe. Der Gegensatz, der zwischen unseren Auffassungen besteht, lässt sich in Kürze folgendermaassen formuliren.

V. von Ebner bringt das optische Verhalten von Kirsch- und Traganthgummi in Beziehung zu den Neumann'schen Gleichungen für das »Elasticitätsellipsoid des Druckes«. Er nimmt an, dass die Grösse $p-q$, welche für Glas positiv ist, bei den genannten Gummiarten einen negativen Werth besitze. Demgemäss wären hier die Veränderungen, welche das Elasticitätsellipsoid durch Zug und Druck

[1] Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wiss. in Wien, Bd. XCVII. Abth. II (1888), S. 39.
[2] Sitzungsber. d. K. preuss. Akad. d. Wiss. 1887, S. 659.
[3] Optisch-akustische Versuche, Prag 1873, S. 28.

erfährt, den entsprechenden des Glases entgegengesetzt: statt Verlängerung würde Verkürzung eintreten und umgekehrt. Die von Nägeli und mir angenommene Orientirung des Elasticitätsellipsoids könnte unter solchen Umständen »leicht zu grossen Verwirrungen führen«.

Nach meiner Auffassung dagegen steht das anomale Verhalten von Kirsch- und Traganthgummi mit den Neumann'schen Gleichungen in keinem Zusammenhang. Diese Gleichungen beziehen sich nur auf feste Körper, deren Theilchen in der Druckrichtung sich nähern und in der Zugrichtung von einander entfernen, nicht auf Flüssigkeiten und Schleime, welche den hydrostatischen Gesetzen unterworfen sind. Wenn schleimige Substanzen in Folge mechanischer Eingriffe Doppelbrechung zeigen, so rührt dies daher, dass sie aus anisotropen Micellen oder Micellverbänden bestehen, die sich alsdann in bestimmter Weise orientiren, während vorher alle möglichen Richtungen ungefähr gleich stark vertreten waren. Zieht man z. B. zähflüssiges Gummi in dünne Fäden aus, so orientiren sich die erwähnten anisotropen Einheiten voraussichtlich immer in der Art, dass ihre Längsrichtung mit derjenigen des Fadens zusammenfällt, und der optische Effect, den wir beobachten, hängt alsdann einzig und allein davon ab, ob die wirksamen Elasticitätsellipsen der Micelle ebenfalls längs oder aber quer orientirt sind.

Hierbei ist es natürlich gleichgültig, ob die anisotropen Micellverbände stellenweise noch ihre ursprüngliche Lagerung zeigen und als gequollene Membranstücke zur mikroskopischen Wahrnehmung gelangen, wie beim Traganth, oder ob sie vollständig von einander getrennt und mikroskopisch unsichtbar sind, wie bei manchen anderen Gummiarten. Der homogenste Gummischleim, wie er durch Filtration gewonnen wird, fordert ebenso wie der weniger homogene die Annahme anisotroper Theilchen, deren Orientirung das optische Verhalten bedingt.

Damit glaube ich die principielle Differenz in der Deutung der Beobachtungsthatsachen mit ausreichender Bestimmtheit hervorgehoben und bezüglich meiner eigenen Auffassung die Lücke ausgefüllt zu haben, welche in meiner oben citirten Arbeit — wegen der Kürze der betreffenden Notiz — zwischen den »gequollenen Schichtencomplexen« des Traganths und den unsichtbaren Micellen des Kirschgummis oder den krystallinischen Verunreinigungen (?) der syrupartigen Phosphorsäure, mit welcher Mach experimentirte, offen gelassen war.

Ich wende mich jetzt zu den Beobachtungen und Erwägungen, welche mir geeignet erscheinen, die Richtigkeit meiner Auffassung

zu erhärten. Zunächst muss ich meine frühere Angabe, dass die Elasticitätsellipse (im Sinne NÄGELI's) beim Traganth quer zu den Schichten orientirt sei, entgegen der widersprechenden Behauptung VON EBNER's[1] aufrecht erhalten. Ich habe diesen Punkt wiederholt geprüft und erachte einen Irrthum für ausgeschlossen. Wenn sich also die gequollenen Schichten parallel zur Zugrichtung stellen, so kommt die wirksame Elasticitätsellipse quer zu liegen, und diese nämliche Lage zeigt sie auch im filtrirten, zu Fäden ausgezogenen Schleim. Daher der bekannte optische Effect.

Sodann betrachte ich den Versuch mit Membranen von Kirschgummi, auf welchen V. VON EBNER ein so grosses Gewicht legt, nicht als beweiskräftig. Wie wurde dieser Versuch angestellt? Trockene Membranen von Kirschgummi wurden in einem Gemisch von etwa 3 Theilen Alkohol (95 Procent) und 1 Theil Wasser 24 Stunden oder länger liegen gelassen; sie erfuhren dabei eine beschränkte Quellung, wurden etwas erweicht und elastisch biegsam, ohne sich aufzulösen, und in diesem Zustande reagirten sie »ausgezeichnet anomal auf Zug«. Wem drängt sich hierbei nicht unwillkürlich die Frage auf, ob solche weich gewordene Membranen noch zu den festen Körpern zählen? Die Antwort kann, wie ich in Folgendem darlegen werde, nur eine verneinende sein. Noch bevor ich selbst dazu kam, diese Frage experimentell zu prüfen, lernte ich hierauf bezügliche, wie ich glaube entscheidende Versuche kennen, welche Hr. Dr. AMBRONN, Docent der Botanik in Leipzig, ausgeführt hatte und die er mir in meinem Institut vordemonstrirte.[2] Hiernach verhält sich das vollkommen trockene Kirschgummi, wie übrigens VON EBNER selbst hervorhebt, wie Glas. Auch das begrenzt gequollene reagirt im ersten Augenblick, wenn der Druck rasch zur Wirkung kommt, ganz normal, also ebenfalls wie Glas; allein die beobachtete Farbe bleibt nicht erhalten, sondern geht durch das Roth I des Gypsplättchens langsam in die entgegengesetzte über. War es anfangs Blau II, so ist es später Orange oder Gelb I, und umgekehrt. Ein solches Verhalten ist meines Erachtens nur durch die Annahme erklärbar, dass im ersten Moment auch das weiche Kirschgummi, ganz so wie das trockene, eine wirkliche Compression in der Druckrichtung erfahre und demgemäss reagire, dass aber dann sofort eine Ausgleichung der eingetretenen Spannung nach allen Richtungen stattfinde, wobei die

---

[1] Über das optisch-anomale Verhalten des Kirschgummis und des Traganthes u. s. w. A. a. O. S. 11 [49].

[2] Eine hierauf bezügliche Mittheilung AMBRONN's erscheint im 2. Heft des 7. Jahrg. d. Ber. d. Deutschen Bot. Gesellschaft (1889).

anisotropen Theilchen sich drehen und einer bestimmten Orientirung zustreben. Selbstverständlich vollzieht sich diese Bewegung um so langsamer, je geringer die Plasticität der gegebenen Membran; es kann mehrere Minuten dauern, bis ein definitiver Gleichgewichtszustand erreicht ist.

Dieses Experiment lässt sich in verschiedenen Stadien der Austrocknung leicht und sicher wiederholen. Man beobachtet dabei die entsprechenden Abstufungen bezüglich der Geschwindigkeit der so eben erwähnten Farbenänderung. Nach einem Zustand jedoch, wie ihn von Ebner aus theoretischen Gründen zwischen den festen und den zähflüssigen einschalten möchte, nach einer Aggregatform nämlich, welche sich gegen Druck und Zug indifferent verhielte, wird der Beobachter vergeblich suchen. Und da eine solche Aggregatform nicht existirt, so können auch die Voraussetzungen, aus denen ihr Vorhandensein gefolgert wurde, kein Vertrauen einflössen.

In dritter Linie erinnere ich daran, dass Fäden aus Kirschgummi schon im flüssigen Zustande, nicht erst beim Eintrocknen, Doppelbrechung zeigen. Von Spannungen in einer bestimmten Richtung, durch welche die Anisotropie bedingt würde, kann nun aber bei Flüssigkeiten nicht die Rede sein, wenigstens nicht für eine längere Dauer. Wenn solche Spannungen auch durch plötzliche Eingriffe erzeugt werden können, so müsste doch gleich darauf eine vollständige Ausgleichung stattfinden. Die Doppelbrechung flüssiger Gummifäden kann also nicht wohl auf bleibende Druck- oder Zugspannungen zurückgeführt werden; es müssen hier nothwendig andere Momente den Ausschlag geben. Ich wüsste nun nicht, welche Annahme neben derjenigen anisotroper Theilchen, die sich in bestimmter Weise orientiren, noch ernstlich in Betracht kommen könnte.

Dass Glasfäden, Barometerröhren u. dergl. in der Regel ebenfalls doppelbrechend sind, obschon wir keine Veranlassung haben, denselben eine micellare Structur zuzuschreiben, darf nicht etwa als widersprechende Thatsache angeführt werden. Denn offenbar kommt hier die Doppelbrechung dadurch zu Stande, dass das Glas noch in einem sehr zähflüssigen, halbfesten Zustande dem Zuge unterworfen und deshalb bei der Abkühlung gespannt bleibt. Zieht man Röhren aus leichtflüssigem Glase und sorgt für langsame Abkühlung, so bleiben sie isotrop, weil in diesem Falle etwaige Spannungen sich ausgleichen.

Als weitere, wenn auch indirecte Belege zu Gunsten meiner Auffassung dürfen die Beobachtungen bezeichnet werden, welche das optische Verhalten verkorkter Membranen und die Herstellung homogener doppelbrechender Überzüge durch Aufstreichen krystallinischer

Substanzen auf Glas betreffen.[1] Ich habe einige dieser Versuche wiederholt und kann mich für den vorliegenden Zweck darauf beschränken, über Selbstgesehenes zu referiren.

Es ist bekannt, dass die verkorkten Zellhäute sich auf Durchschnitten optisch entgegengesetzt verhalten wie gewöhnliche Cellulosemembranen. Man weiss ferner, dass in solchen Zellhäuten fett- oder wachsartige Körper eingelagert sind, welche bei etwa 70°—80° C. schmelzen. Erwärmt man nun einen Querschnitt durch eine dicke Cuticula oder durch geeignete Korkhäute bis zur Siedehitze und bringt das Praeparat sofort unter das Mikroskop, so verhält sich dasselbe eine Zeit lang neutral; aber mit dem allmählichen Sinken der Temperatur tritt die bekannte Reaction wieder hervor. Es ergiebt sich hieraus, dass das optische Verhalten der verkorkten Membranen von den fett- oder wachsartigen Einlagerungen herrührt, welche bei gewöhnlicher Temperatur in krystallinischer Form, mit gleichsinniger Orientirung der kleinsten Theilchen, vorhanden sind, beim Erhitzen aber in den flüssigen Aggregatzustand übergehen und damit ihre doppelbrechenden Eigenschaften verlieren. Wir haben es in diesem Falle mit einem Object zu thun, welches ebenso homogen erscheint wie filtrirtes Kirschgummi, dessen Verhalten im polarisirten Licht aber zweifellos durch anisotrope, mikroskopisch nicht wahrnehmbare Theilchen bedingt wird.

Zu demselben Resultat führen auch die Streichversuche mit Wachs, Paraffin, Stearin und dergleichen. Erwärmt man z. B. etwas Wachs auf dem Objectträger und breitet die geschmolzene Masse zu einer dünnen Schicht aus, so erhält man beim Erkalten zahlreiche nadelförmige Krystalle, deren Elasticitätsellipse quer zur Längsrichtung gestellt ist. Fährt man nun mit einem prismatischen Bleistift, dessen kurze Endkante man schwach auf den Objectträger drückt, oder mit irgend einem andern geeigneten Gegenstand über die Krystalle, so entsteht eine dünne, stellenweise ganz homogen aussehende Schicht von Wachs, welche deutliche Doppelbrechung zeigt. Dabei ist die wirksame Elasticitätsellipse parallel zur Streichrichtung orientirt.

An den Stellen, wo bei meinen Versuchen der Stift aufgesetzt wurde, waren nun häufig noch Übergangsstadien vorhanden, aus welchen sich ergab, dass die Krystalle selbst und ebenso die noch wahrnehmbaren Theile derselben sich quer zur Streichrichtung gestellt hatten; die Lage ihrer Elasticitätsellipsen war also genau dieselbe, wie in der homogenen Schicht, d. h. parallel zur Streichrichtung.

---

[1] Vergl. H. AMBRONN, Ber. d. Deutschen Bot. Ges. 1888, S. 226, wo sich auch hierauf bezügliche Literaturangaben finden.

Führt man jetzt das nämliche Experiment mit irgend einer anderen Substanz aus, deren Krystalle zwar ähnliche Formen, aber eine longitudinal (nicht quer) orientirte Elasticitätsellipse aufweisen, so erzeugt die durch Aufstreichen erhaltene Schicht die entgegengesetzten Polarisationsfarben. Der Charakter dieser Farben hängt also nicht von der mechanischen Wirkung des Streichens, sondern einzig und allein von der Stellung der wirksamen Elasticitätsellipse in den Krystallen und den daraus hervorgehenden, zuletzt nicht mehr sichtbaren Theilchen ab.

Die wachs- und fettartigen Substanzen gehören demnach, wie aus dem Vorhergehenden gefolgert werden muss, mit den Gummiarten zu der ansehnlichen Gruppe von Körpern, welche im weichen bis halbfesten Zustande in Folge mechanischer Eingriffe Doppelbrechung zeigen, wobei jedoch der optisch positive oder negative Charakter der Interferenzfarben nicht durch Compression oder Dilatation, sondern durch die gleichsinnige Orientirung anisotroper Theilchen bedingt wird.

Endlich sei es mir gestattet, nochmals darauf hinzuweisen, dass alle bis dahin untersuchten festen Körper, deren optische Reaction auf Zug und Druck zweifellos und hinsichtlich ihres Charakters durch einwurfsfreie Beobachtungen festgestellt ist, sich dem Spiegelglas anschliessen. Hierzu bemerke ich noch, dass ich seit dem Erscheinen meiner Arbeit »über Quellung und Doppelbrechung vegetabilischer Membranen« auch die Mittheilungen von Bücking[1] über das Verhalten der Krystalle im gespannten Zustande durchgesehen und mich dabei überzeugt habe, dass dieselben ebenfalls — soweit unzweideutige Beobachtungen vorliegen — wie Spiegelglas reagiren. Unter solchen Umständen glaube ich berechtigt zu sein, meine früher ausgesprochene Ansicht, die Orientirung des Elasticitätsellipsoids betreffend, mit allem Nachdruck aufrecht zu halten und die Bedenken von Ebner's auch seiner neuesten Mittheilung gegenüber als unbegründet zu bezeichnen.

2. Bastzellen.

Auch in Bezug auf das optische Verhalten der Bastfasern sehe ich mich veranlasst, den Erklärungsversuchen von Ebner's entgegen zu treten. Ich hatte in Übereinstimmung mit Nägeli gefunden, dass bei der Dehnung von typischen Bastzellen im imbibirten Zustande eine Änderung der Polarisationsfarbe nicht zu beobachten ist, und aus dieser Thatsache die Unveränderlichkeit der optischen Constanten gefolgert. V. von Ebner sucht dagegen zu zeigen, dass die Bastfasern

[1] Zeitschrift f. Krystallographie. 1883. Bd. VII. S. 555.

in Folge des Zuges an Dicke abnehmen und dass diese Dickenänderung ausreiche, um die durch Spannung bewirkte Steigerung der Doppelbrechung zu compensiren. Was an optischer Wirkung durch Dilatation thatsächlich gewonnen würde, ginge durch die Quercontraction der gespannten Fasern wieder verloren. Diese Annahme hält von Ebner für geeignet, die von mir erhaltenen negativen Resultate der Dehnungsversuche »ganz ungezwungen zu erklären«.

Über die nach dieser Seite speciell geprüften Leinenfasern wird sodann das Folgende mitgetheilt. »Es fand sich — bei verschiedenen Fasern — Roth I. O. bei einer Dicke zwischen 0.006—0.010 Mm. Legen wir die Zahl 0.010 zu Grunde, so ergäbe sich für Licht von der Wellenlänge, welches im Roth I. O. ausgelöscht ist, die Differenz der Brechungsquotienten = 0.0500, also eine starke Doppelbrechung, welche z. B. jene des Quarzes um mehr als fünfmal übertrifft. Nehmen wir nun an, die Faser werde ohne Änderung der Interferenzfarbe um 4 Procent gedehnt, so vermindert sich die Dicke um 1 Procent, wenn man mit Poisson die Quercontraction bei der Dehnung gleich einem Viertel der procentischen Längenzunahme setzt. Mithin zeigt die Faser nun Roth I. O. bei $0^{mm}.0099$ Dicke, woraus sich die Differenz der Brechungsquotienten mit 0.0505 ergibt, daher eine Zunahme der Differenz um 0.0005. Eine Differenz der Brechungsquotienten von 0.0005 an einer isotropen Substanz durch Spannung entstanden, würde aber genügen, um an einer 1^{mm} dicken Schicht bereits die Farbe Roth I. O. hervorzurufen, also eine Doppelbrechung, die bereits sehr auffällig wäre. Die von Schwendener so sehr betonte Thatsache, dass Bastfasern auch bei stärkster Dehnung ihre Interferenzfarbe nicht ändern, beweist also gerade das Gegentheil von dem, was scheinbar bei ausschliesslicher Beachtung der Interferenzfarbe daraus gefolgert werden könnte.«

Mit dieser Darlegung bin ich nun freilich nicht einverstanden. Meines Erachtens befindet sich V. von Ebner vollständig im Irrthum, wenn er damit bewiesen zu haben glaubt, dass bei der Leinenfaser die angenommene Verminderung der Dicke um 1 Procent einen merklichen Einfluss auf die Interferenzfarbe üben könne. Um eine sichere Grundlage zu gewinnen, ist doch wohl erforderlich, diesen Einfluss direct zu bestimmen, statt ihn aus dem Verhalten einer isotropen Substanz von hundertfacher Dicke, welche durch Spannung doppelbrechend geworden, abzuleiten. Die richtige Fragestellung ist deshalb unter den gegebenen Voraussetzungen folgende: Angenommen, eine Leinenfaser von 10 Mik. Durchmesser rufe bei gekreuzten Nicols die Interferenzfarbe Roth I. hervor, welche Farbenänderung tritt ein, wenn durch mechanische Eingriffe eine Verkleinerung des Durchmessers

um 1 Procent, also im concreten Falle um 0.1 Mikromillimeter bewirkt wird?

Um diese Frage zu beantworten, mögen die an Gypsplättchen gemachten Beobachtungen als Ausgangspunkte dienen. Hat ein solches Plättchen eine Dicke von 7 bis 8 Mik., so gibt es bei gekreuzten Nicols, wie ich mich direct überzeugt habe, die Polarisationsfarbe Grau I. Übereinandergelegt erzeugen 6 dieser Plättchen Roth I, d. h. die Farbe unserer Leinenfaser. Wenn nun aber eine 10 Mik. dicke Leinenfaser denselben optischen Effect hervorruft wie 6 Gypsplättchen Grau I, so entspricht eine Leinfaserschicht von 0.1 Mik. dem hundertsten Theil dieser 6 Gypsplättchen, folglich 0.06 eines Plättchens Grau I, was ungefähr einen halben Mikromillimeter in Gyps ausmacht. Dass eine so geringfügige Dickenabnahme für unser Auge absolut wirkungslos ist, geht schon aus dem Umstande hervor, dass die käuflichen Gypsplättchen Roth I, Blau II u. s. w. in der Dicke nicht selten um 4 bis 5 Mik. differiren, und zwar sowohl unter sich, als an verschiedenen Stellen desselben Plättchens.

Zu demselben Resultat führt übrigens auch die Vergleichung mit der isotropen Substanz von 1^{mm} Dicke, welche im gespannten Zustande Roth I gibt; nur darf hierbei die hundert Mal grössere Mächtigkeit der optisch wirksamen Schicht nicht ausser Acht gelassen werden. Nimmt die letztere um 1 Procent, also um 10 Mik. ab oder zu, so ist die dadurch bewirkte Farbenänderung wiederum gleich dem Effect eines Gypsplättchens von etwa 0.44 bis 0.48 Mik. Dicke, also für unsere Wahrnehmung gleich Null.

Übrigens sei nachträglich noch bemerkt, dass die Verlängerung der Bastfasern in Folge der Zugspannung mit 4 Procent zu hoch angesetzt ist; sie beträgt in Wirklichkeit nur 1 bis 2 Procent. Über die damit verbundene Quercontraction sind allerdings zuverlässige Messungen bis dahin nicht ausgeführt worden; doch dürfte die Annahme einer Verkleinerung des Durchmessers um 1 Procent ebenfalls zu hoch gegriffen sein. Da indess eine etwaige Correctur dieser Grössen in der Hauptsache nichts zu ändern vermag, so wäre es für den vorliegenden Zweck vergebliche Mühe, genauere Ziffern herausrechnen zu wollen. Die in Rede stehende Dickenabnahme hat unter allen Umständen keinen bemerkbaren Einfluss auf die Interferenzfarbe.

3. Parenchymzellen.

Ich benutze diesen Anlass, um gleichzeitig noch einem anderen Autor gegenüber meinen Standpunkt zu wahren. In einer vor Kurzem erschienenen Abhandlung »über den Bau der Commissuren der Equi-

setenscheiden« von Carl Müller[1] wird nämlich der Versuch gemacht, das Verhalten der Scheiden im polarisirten Licht zu Gunsten der Ansicht zu verwerthen: es sei die Doppelbrechung der einzelnen Zellen eine Folge von wirksam gewesenen Zugspannungen, deren Richtung mit derjenigen der grössten Längsstreckung zusammenfalle.

Diese Scheidenzellen bilden nämlich auffallend regelmässige Curvensysteme, welche eine gewisse äussere Ähnlichkeit mit Kettenlinien zeigen und vom Verfasser auch als solche gedeutet werden.

Es mag nun ganz dahingestellt bleiben, ob diese Deutung richtig oder unrichtig sei; ich bemerke nur, dass ihre Richtigkeit durch die Erörterungen, welche der optischen Betrachtung im Capitel VII vorausgehen, jedenfalls nicht erwiesen ist. Es hätte doch vor Allem gezeigt werden müssen, dass die betreffenden Zellen in irgend einem Stadium ihrer Entwickelung einem wirklichen Zuge ausgesetzt sind und folglich nach Beseitigung desselben sich mehr oder weniger verkürzen. Von derartigen Versuchen ist indessen in der citirten Abhandlung nicht die Rede, und so mochte dem Verfasser selbst die von ihm gegebene Begründung unzulänglich erscheinen. Er wandte sich deshalb noch zu Beobachtungen im polarisirten Licht, um wo möglich auf diesem Wege seine Beweisführung zu vervollständigen. Sehen wir zu, wie er dabei zu Werke ging.

Carl Müller erinnert zunächst (S. 544) an die hierauf bezüglichen Veröffentlichungen von N. J. C. Müller, Wiesner, Strasburger, von Höhnel, Victor von Ebner und besonders an die neuesten Mittheilungen über den Gegenstand von A. Zimmermann, in der Meinung, diese Veröffentlichungen machen es »höchst wahrscheinlich, dass bei der optischen Reaction der Zellmembranen auch Spannungsverhältnisse eine bedeutende Rolle spielen können.« Was sind das nun aber für Spannungsverhältnisse, die man sich nach den genannten Autoren vorzustellen hätte? Es sind darunter sehr verschiedenartige, die wenig mit einander gemein haben, zum Theil sogar sich gegenseitig ausschliessen. N. J. C. Müller[2] setzt vorübergehende Spannungen voraus, welche nur bis zum Erstarren der zähflüssig gedachten Membranogene von Einfluss sind. Es war ihm nämlich gelungen, auf künstlichem Wege Häute und Fäden aus Gelatine, Gummi und dergleichen herzustellen, deren optisches Verhalten den wirksam gewesenen Druck-, Zug- oder Torsionskräften entsprach, und er glaubte hieraus den Schluss ziehen zu dürfen, dass auch umgekehrt jede verlängerte Zelle eine Dehnung durch Zug, jede schraubenlinig gestreifte Bastfaser

[1] Pringsheim's Jahrb. Bd. XIX (1888), S. 497.
[2] Pringsheim's Jahrb. Bd. XVII (1886), S. 1 ff.

eine wirkliche Torsion erfahren habe. Das war aber offenbar ein Fehlschluss, einmal in logischer Hinsicht, weil es doch unzweifelhaft Objecte gibt, die z. B. anscheinend gedreht sind (wie die Baumstämme mit schiefem Faserverlauf, die gedrehten Säulen der Architektur u. a. m.), ohne dass eine wirkliche Torsion stattgefunden hätte, und zweitens auch darum, weil thatsächlich bei vegetabilischen Zellen, so lange sie noch einem lebenden Organ angehören, dergleichen Torsionen nicht möglich und weil auch Streckungen durch Zug in zahlreichen Fällen absolut ausgeschlossen sind.

Strasburger[1] und von Höhnel[2] nehmen dagegen bleibende »moleculare Spannungen« an, von denen man freilich — wenigstens soweit die Gegenspannungen fehlen — behaupten darf, dass sie nicht einmal in Gedanken construirbar sind. Auch Victor von Ebner[3] und A. Zimmermann[4] beschäftigen sich in erster Linie mit anders gearteten Spannungen, nämlich nicht mit wirksam gewesenen, sondern mit solchen, welche unter den Augen des Beobachters mittels eines Dehnungsapparates herbeigeführt wurden. Überdies waren die zur Untersuchung gewählten (vegetabilischen) Objecte vorwiegend feste Körper, d. h. vollständig ausgebildete Zellen oder Zellcomplexe, meist mit verdickten Membranen. Es ist zweifellos, dass die in solcher Weise bewirkten Dehnungen in gewissen Fällen die ursprüngliche Doppelbrechung der Zellhäute beeinflussen, woraus aber nicht gefolgert werden darf, dass auch die Anisotropie der ungespannten Membran durch vorhanden gewesene Spannungen erzeugt sei; denn die Pflanze verfügt noch über andere Mittel.

Wiesner endlich hebt in der citirten Anmerkung[5] bloss hervor, dass auch völlig amorphe Substanzen, wie arabisches Gummi, Kautschuk u. s. w. doppelbrechend sein können, und fügt sodann noch hinzu: »Hier liegen gewiss keine krystallisirten Körper vor, die Doppelbrechung beruht hier auf Spannungsunterschieden. Solche Spannungsunterschiede sind aber zweifellos in den Zellmembranen vorhanden.« Es wird aber nicht gesagt, wie man sich dieselben vorzustellen habe.

Von diesen verschiedenen Spannungen hat nun Carl Müller[6] für seine Equisetenscheiden diejenigen ausgewählt, welche ein während der Entwickelungsperiode wirksam gewesener Zug verursacht haben

---

[1] Bau und Wachsthum der Zellhäute. 1882.

[2] Bot. Zeit. 1882.

[3] Unters. über d. Ursachen d. Anisotropie organ. Substanzen, 1882.

[4] Molecularphysikalische Unters. in d. Berichten d. Deutschen Bot. Ges. Jahrg. 1883 u. 1884.

[5] Elemente d. Anat. u. Physiol. 1881, S. 260, Anmerkg. zu 17.

[6] A. a. O. S. 545.

soll, also Spannungen im Sinne N. J. C. Müller's. Die Richtung des vorausgesetzten Zuges wäre natürlich in jedem Punkte der Kettenlinien mit derjenigen der Tangente parallel gegangen; daher die Verlängerung der Zellen in dieser Richtung, daher auch die übereinstimmende Orientirung der Elasticitätsellipsen.

Hierbei ist jedoch ein wesentlicher Punkt gar nicht in Betracht gezogen, nämlich die unabweisliche Druckspannung in den Carinalzonen der Scheidenzähne, an welchen die Curvensysteme der Commissuren gleichsam wie Kettenbrücken an ihren Pfeilern aufgehängt sind. Es bedarf keines Beweises, dass unter solchen Verhältnissen Druck- und Zugspannungen einander das Gleichgewicht halten müssen, und wenn es wirklich Spannungen sind, welche die Orientirung der Elasticitätsellipsen bedingen, so müssten diese letzteren in der Carina der Scheidenzähne quer orientirt sein, — was nicht der Fall ist. Die Druckspannungen geben also in optischer Hinsicht keinen Ausschlag. Sollten die Zugspannungen sich hierin anders verhalten?

Da übrigens thatsächlich keinerlei Spannungen nachgewiesen sind, so könnte man auf Grund des optischen Verhaltens ebenso gut die umgekehrte Vertheilung vornehmen, d. h. die Zugspannung in die Mediane der Scheidenzähne und die Druckspannung in die Curvensysteme verlegen. Denn beide Theile verhalten sich optisch durchaus übereinstimmend, indem die grosse Axe der wirksamen Elasticitätsellipse in jeder einzelnen Zelle parallel zu ihrer Längsrichtung verläuft. Dieser Regel folgen überhaupt die meisten Parenchymzellen, sie mögen während ihrer Ausbildung positiv oder negativ oder auch gar nicht gespannt gewesen sein; Bedingung ist nur, dass in irgend einer Richtung ein intensiveres Wachsthum stattgefunden und dadurch eine augenfällige Streckung herbeigeführt habe.

Es bleibt also bis auf Weiteres unentschieden, ob die Curven der Equisetenscheiden Druck- oder Zuglinien oder vielleicht keines von beiden, sondern einfach Wachsthumslinien sind, wie sie ja auch im spannungslosen Meristem der Vegetationspunkte zu Stande kommen. Und sollten wirklich bei näherer Prüfung der jugendlichen Scheiden Spannungen nachweisbar sein, so ist damit noch keineswegs festgestellt, dass sie die Anisotropie der Membran bedingen.

Carl Müller nimmt es offenbar mit der Natur der Spannungen und mit den Schlüssen, die sich je nach Umständen daraus ergeben, nicht sehr genau. Von den oben erwähnten Verschiedenheiten, welche zwischen den Auffassungen der von ihm citirten Autoren bestehen, ist in seiner Arbeit gar nicht die Rede, und dementsprechend nennt er auf Seite 552 ganz allgemein die Annahme, »dass die Anisotropie allein durch moleculare Spannungen erzeugt wird, eine Ansicht, welche

mit guten Gründen neben der Hypothese von den doppelbrechenden Micellen mehr und mehr Anhänger gewinnt«. Dabei meint er aber, wie sich aus dem Zusammenhange ergibt, nur die von ihm selbst angenommenen vorübergehenden Spannungen, die sich mit den N. J. C. Müller'schen decken, — und diese Ansicht hat unter den Forschern, die sich in neuerer Zeit mit einschlägigen Untersuchungen befasst haben, keine entschiedenen Anhänger. Selbst A. Zimmermann[1], der sich ihr nachgerade noch am meisten genähert zu haben scheint, hält sich zunächst nur an »diejenige Theorie, welche den Grund der Anisotropie in die Anordnung der Micelle verlegt«, und spricht sich bezüglich der etwaigen Spannungen, welche diese Anordnung veranlassen könnten, sehr vorsichtig aus. Übrigens kommt es in solchen Dingen doch mehr auf Beweise als auf die Zahl der Anhänger an.

Nach alledem erscheint mir der Versuch Carl Müller's, das optische Verhalten gestreckter Parenchymzellen auf wirksam gewesene Zugspannungen zurückzuführen, denen zugleich die Curvensysteme der Equisetenscheiden ihre Entstehung zu verdanken hätten, als eine gänzlich unfruchtbare Speculation, die sich nirgends auf thatsächliche Grundlagen, sondern nur auf hypothetische Spannungen und auf eingebildete Wirkungen derselben stützt.

[1] Morph. u. Physiol. d. Pflanzenzelle, S. 184.

Calorimetrische Untersuchungen an Säugethieren.

Von Prof. I. Rosenthal
in Erlangen.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond.)

Zweite Mittheilung.

I.

In meiner ersten Mittheilung, vom 13. December v. J.,[1] habe ich nachgewiesen, dass ein gleichmässig und reichlich ernährter Hund in der Regel viel weniger Wärme producirt, als der Verbrennungswärme der von ihm aufgenommenen Nahrung entspricht, dass die Production nur selten jenen Werth erreicht und noch viel seltener, und dann immer nur für kurze Zeit und um kleine Beträge, denselben übersteigt. Abgesehen davon, dass ein gewisser Bruchtheil der aufgenommenen Nahrung immer unverdaut oder im Zustand unvollkommener Verbrennung den Körper verlässt, speichert das reichlich ernährte Thier, da es mehr aufnimmt, als es zur Erhaltung seiner Eigenwärme und zur Leistung der unbedingt nothwendigen Arbeit bedarf, den Überschuss auf, so dass es an Gewicht zunimmt, um von diesem Überschuss, wenn höhere Anforderungen an seine Leistung gestellt werden, einen grösseren oder geringeren Bruchtheil zu verwenden.

Eine genauere Vergleichung der Kräftebilanz und der Stoffbilanz eines lebenden Thieres ist aber unmöglich, weil wir zwar die Summen der eingenommenen und ausgegebenen Stoffe mit hinreichender Genauigkeit bestimmen, über die Natur der im Körper zurückgebliebenen Stoffe aber nichts Sicheres erfahren können. Was der Kaufmann als Ergänzung seiner Bilanz nothwendig braucht, die Inventuraufnahme, ist beim lebenden Thier leider unmöglich. In Folge dessen bleiben also unsere Berechnungen immer mit einer Unsicherheit belastet, welche es unmöglich macht, die an sich sehr

[1] Diese Berichte 1888, S. 1309.

einfachen Probleme bis zu einem genügenden Grade der experimentellen Prüfung zu unterwerfen, so dass wir uns mit einer sehr groben Annäherung an die Wahrheit zufrieden geben müssen.

Wenn beispielsweise ein gewisser Betrag des in der Nahrung eingeführten C in den Ausscheidungen nicht wieder erscheint, so können wir nicht erfahren, ob dieser C in Form von Fett oder etwa in Form von Glykogen im Körper zurückgeblieben ist. Da aber Glykogen eine viel geringere Verbrennungswärme liefert als Fett, so hat dies auf die Berechnung der Wärmeproduction einen bedeutenden Einfluss.

Noch viel unsicherer aber ist, wie ich in meiner ersten Mittheilung gezeigt habe, die Berechnung der Wärmeproduction aus einem einzigen Product des Stoffwechsels, etwa der ausgeathmeten Kohlensäure. Es wird deshalb für die weitere Forschung erspriesslicher sein, von solchen Berechnungen zunächst ganz abzusehen und sich an die wirkliche calorimetrische Messung zu halten. Wir werden sogar das Verhältniss umkehren und die Messung der Wärmeproduction verwerthen können, um über manche unklare Vorgänge des Stoffwechsels besseren Aufschluss zu gewinnen.

Ich habe mich deshalb bemüht, das Verhalten der Säugethiere unter verschiedenen Bedingungen so genau als möglich festzustellen, namentlich die Grenzen zu finden, innerhalb deren die Wärmeproduction in normalem Zustande schwanken kann. Ich habe in erster Linie den Einfluss der Ernährung untersucht. Schon in meiner ersten Mittheilung habe ich darauf hingewiesen, dass ein reichlich ernährtes Thier, welchem man plötzlich alle Nahrung entzieht, noch Tage lang nahezu die gleiche Wärmemenge producirt wie während der Nahrungsaufnahme. Wenn man aber einem solchen Thier nicht alle Nahrung entzieht, sondern dieselbe nur um ein Geringes vermindert, wenn man z. B. bei unverändertem Eiweissgehalt die Menge des gereichten Fettes vermindert, so steigt vorübergehend, d. h. für einige Tage die Wärmeproduction an und sinkt dann erst langsam auf oder auch unter den Werth, welchen sie bei der früheren Ernährungsweise gehabt hatte. Umgekehrt ist jede Steigerung der Nahrung anfangs von einer Abnahme der Wärmeproduction gefolgt, welche auch wieder erst nach etwa 6—8 Tagen einem neuen Gleichgewichtszustande Platz macht.

Wir haben es also innerhalb gewisser Grenzen ganz in unserer Hand, ein Thier so zu ernähren, dass es weniger oder dass es mehr Wärme ausgibt, als der Verbrennungswärme der von ihm aufgenommenen Nahrung entspricht. Ersteren Zustand können wir vorübergehend herstellen, wenn wir die Nahrungsmenge steigern,

oder dauernd, wenn wir dauernd reichlich füttern.[1] Den zweiten Zustand können wir immer nur vorübergehend herstellen, wenn wir die während einiger Zeit gereichte Nahrung plötzlich vermindern oder das Thier hungern lassen.

Zwischen beiden Zuständen liegt ein mittlerer, bei welchem die Wärmeproduction nahezu gleich ist der aus den Verbrennungswärmen der aufgenommenen Nahrungsbestandtheile berechneten, d. h., wo sie um diesen berechneten Werth herum Schwankungen nach oben und unten hin macht. Die zur Erreichung dieses Zustandes nothwendige Nahrung entspricht zugleich dem Minimum dessen, womit das Thier für längere Zeit gut bestehen und seinen Körper auf dem gleichen Gewicht ungefähr zu erhalten vermag. Bei einem Hunde z. B., welcher während mehr als 8 Monaten zu den hier in Rede stehenden Versuchen verwandt wurde, war ein solcher Gleichgewichtszustand bei Aufnahme von 40^g Eiweiss und 20^g Fett vorhanden. Bei dieser Nahrung schwankte sein Gewicht nur wenig; seine Wärmeproduction war in einer Reihe von Versuchen, deren jede eine Dauer von 2 bis 5 Tagen umfasst, im Minimum 283.6, im Maximum 396 Ca für je 24 Stunden, während aus der Nahrung sich 358.4 Ca ergeben. Es ist nun sehr lehrreich, zu verfolgen, wie jedesmal, wenn die Wärmeproduction unter der theoretisch berechneten bleibt, gleichzeitig eine Gewichtszunahme, dagegen bei grösserer Wärmeproduction immer eine Gewichtsabnahme des Thieres stattfand, wie aus folgender Zusammenstellung eines Theiles der Versuche hervorgeht:

	Mittl. Wärmeprod. in 24 Stunden	Gewichtsänderung in 24 Stunden
	326.3 Ca	+ 40^g
	363.0	— 15
	372.0	— 15
	335.5	— 6
	336.5	— 7
	322.9	+ 50
Mittelwerth:	342.7 Ca	+ 47^g

Die durchschnittliche Wärmeproduction bleibt nur um 15.3 Ca pro Tag unter der theoretisch berechneten. Dem gegenüber steht aber auch eine Gewichtszunahme von 47^g pro Tag. Worin diese Gewichtszunahme bestanden hat, ist nicht festzustellen. Es genügt

[1] Das war der Fall, welchen ich in meiner ersten Mittheilung allein berücksichtigt habe.

die Annahme, dass durchschnittlich pro Tag etwa 1g5 Fett unverbrannt geblieben seien, um den Fehlbetrag an producirter Wärme zu erklären. Die Gewichtsänderungen des Thieres aber sind bei den unvermeidlichen Schwankungen in der Ausgabe von Wasser, Koth u. s. w. niemals so zuverlässig, dass man auf sie genauere Berechnungen über die Natur der angesetzten Stoffe begründen könnte.

II.

Nachdem ich bei meinen früheren Versuchen gefunden hatte, dass bei einer Versuchsdauer von 1 oder von 2.4 Stunden gar keine Proportionalität zwischen der Wärmeproduction und der CO_2-Ausgabe besteht, habe ich in späteren Versuchen die Bestimmung der ausgegebenen CO_2 bis auf 6—9 Stunden ausgedehnt, ausserdem aber mich nur auf den Fall gleichmässiger und eben ausreichender Nahrung beschränkt, bei welchem noch am ehesten eine gewisse Constanz zu erwarten war. In der Regel wurde die CO_2-Ausgabe von 6 aufeinander folgenden Stunden experimentell bestimmt und mit der gleichzeitigen Wärmeproduction verglichen. Wegen des Einflusses, welchen die Verdauung auf die CO_2-Ausgabe und auf die Wärmeproduction ausübt, werden die Versuche immer nur von der 15. Stunde nach der Fütterung ab angestellt, d. h., in einer Periode, innerhalb welcher nach meinen früheren Versuchen[1] die Wärmeproduction am gleichförmigsten verläuft. Trotz aller dieser Vorsichtsmaassregeln konnte auch in diesen Versuchen ein constantes Verhältniss zwischen CO_2-Ausgabe und Wärmeproduction nicht aufgefunden werden. Es ergab sich jedoch eine andere Beziehung zwischen diesen beiden Werthen, welche mir von Interesse zu sein scheint. Ordnet man nämlich die Versuche nach dem Betrage der Wärmeproduction, so zeigt sich, dass die CO_2-Ausgabe allerdings gleichzeitig mit der Wärmeausgabe steigt, aber in geringerem Grade als jene, so dass der CO_2-Factor, d. h. die Wärmemenge, welche 1g CO_2 entspricht, stetig ansteigt. Zum Beleg für diesen Satz will ich eine Versuchsreihe mittheilen, welche an dem schon oben erwähnten Hunde bei derselben gleichmässigen Ernährung angestellt wurde. Diese Versuche erstrecken sich auf einen Zeitraum von 14 Tagen, während welcher Zeit das Gewicht des Thieres zwischen 5000 und 5100g schwankte.

---

[1] Archiv für Physiologie, 1889. S. 1 ff. S. 23 ff. S. 39 ff.

	Wärmeproduction in 1 Stunde n	CO_2-Ausgabe in 1 Stunde c	CO_2-Factor $\frac{n}{c}$
	11.55	3.970	2.909
	12.53	4.149	3.020
	12.85	4.152	3.095
	13.59	4.214	3.225
	14.05	4.156	3.381
	15.66	4.350	3.601
	16.04	4.216	3.805
	16.76	4.190	3.999
Mittelwerthe:	14.13	4.175	3.379

Werden die Versuche nicht mit all den oben angeführten Vorsichtsmassregeln ausgeführt, beschränkt man sich insbesondere nicht immer auf die gleiche Verdauungsperiode und auf die gleiche Fütterungsweise, so treten viel grössere Schwankungen auf. Aber trotzdem bewährt sich der ausgesprochene Satz auch für diese Fälle, wenn man nur die Mittelzahlen grösserer Versuchsreihen mit einander vergleicht. Drei solcher Versuchsreihen ergaben z. B. folgende Werthe:

Wärmeproduction in 1 Stunde	Kohlensäurefactor
12.096	3.13
15.300	3.62
16.956	4.18

Nur wenn wir annehmen dürften, dass bei gleichbleibender Fütterung die chemischen Umsetzungen stets in gleicher Weise ablaufen uud dass die ausgegebene CO_2 stets gleich der in derselben Zeit gebildeten sei, dürften wir auf ein constantes Verhältniss der CO_2-Abgabe und der Wärmeproduction rechnen. Die einfachste Annahme wäre, dass die im Körper verbrannten Stoffe den in der Nahrung zugeführten genau entsprechen. Wir müssten dann für jedes Gramm aus Eiweiss entstandener CO_2 (unter Berücksichtigung des im Harnstoff zur Ausscheidung gelangenden Antheils an C) 2.496 und für jedes Gramm aus Fett entstandener CO_2 3.418 Ca auftreten sehen. Bei einer Ernährung mit 2 Theilen Eiweiss und 1 Theil Fett hätten wir dann einen CO_2-Factor = 2.803 zu erwarten. Dem gegenüber haben unsere Versuche Werthe von 2.909—3.999 ergeben.

Zur Erklärung dieser Abweichung müssen wir annehmen entweder, dass nicht alle im Körper entstehende CO_2 ausgeathmet wird, sondern dass ein Theil derselben im Körper zurückbleibt oder auf einem anderen Wege ausgeschieden wird, oder dass die Verbrennungen nicht in der angenommenen Weise vor sich gehen.

Was die erstere Annahme anlangt, so können wir an den von den HH. von Pettenkofer und von Voit zuerst beobachteten Wechsel des Verhältnisses zwischen O-Aufnahme und CO_2-Ausgabe denken. Diese Forscher fanden bekanntlich, dass am Tage mehr CO_2 ausgegeben als O aufgenommen wird, während sich in der Nacht das Verhältniss umkehrt. Die HH. Henneberg und Stohmann wiesen dann nach, dass sich das Verhältniss umkehrt, wenn man die Fütterung auf die Nachtzeit verlegt. Da nun unsere Versuche stets in der zweiten Hälfte der 24 stündigen Fütterungsperiode angestellt wurden, so musste dementsprechend die CO_2-Ausgabe zu klein, also der CO_2-Factor zu gross ausfallen. Daneben kommt noch, wenngleich in geringerem Grade, in Betracht, dass immerhin etwas CO_2 im Harn absorbirt und in anderer Weise (nicht in Gasform) zur Ausscheidung gelangt.

Wenn aber auch aus solchen Gründen alle unsere CO_2-Factoren zu gross ausgefallen sind, so erklärt dies noch nicht das regelmässige Ansteigen mit steigender Wärmeproduction. Dasselbe wird jedoch verständlich, wenn wir annehmen, dass trotz der gleichbleibenden Ernährung das Verhältniss der im Körper verbrennenden Eiweiss- und Fettmengen veränderlich sei und zwar in dem Sinne, dass bei höherer Wärmeproduction relativ mehr Fett, bei geringerer Wärmeproduction relativ mehr Eiweiss verbrennt.

Wenn ein Thier längere Zeit hindurch sich bei gleichbleibender Nahrung im Ernährungsgleichgewicht befindet, so müssen sich ja diese von einem Tag zum anderen und innerhalb eines Tages durch den Einfluss der Verdauung auftretenden kleinen Schwankungen im grossen und ganzen ausgleichen. Da dieser Fall bei unserem Thier zutraf, so können wir die Richtigkeit unserer Vorstellungen an den Ergebnissen der Versuche prüfen. Nach meiner Erfahrung, welche mit denen der HH. von Pettenkofer und von Voit, Henneberg und Stohmann genügend übereinstimmt, bleibt die CO_2-Ausscheidung in der von mir zur Untersuchung benutzten Periode um rund 15 Procent gegen das Tagesmittel zurück. Der Mittelwerth des CO_2-Factors war in meinen Versuchen 3.379. Ziehen wir davon 15 Procent ab, so erhalten wir

2.872,

während wir als den einer Nahrung von 2 Theilen Eiweiss und 1 Theil Fett entsprechenden Werth berechnet haben

2.803.

Ich glaube, dass diese Übereinstimmung genügt, um folgende Sätze zu rechtfertigen:

1. Bei einem längere Zeit gleichmässig und ausreichend nur mit Fett und Eiweiss ernährten Hunde entspricht die

mittlere Wärmeproduction der aus den Verbrennungswärmen der Nahrungsstoffe berechneten Wärmemenge.

2. Die innerhalb gewisser Grenzen stets vorhandenen Schwankungen der Wärmeproduction kommen dadurch zu Stande, dass bei geringerer Production relativ weniger, bei höherer relativ mehr Fett verbrannt wird, als dem Durchschnitt der Nahrung entspricht.

III.

Bei meinen bisherigen Auseinandersetzungen habe ich nur auf diejenigen Schwankungen der Wärmeproduction Rücksicht genommen, welche von einem Wechsel in der Ernährung herrühren oder welche ohne Zuthun des Experimentators eintreten. Ich habe aber meine Untersuchungen auch auf die Frage ausgedehnt, welchen Einfluss die Umgebungswärme auf die Wärmeproduction hat. Es ist dies eine für das Verständniss des Wärmehaushalts der homoiothermen Thiere sehr wichtige Frage, welche schon vielfach behandelt, deren Lösung aber wegen des Mangels geeigneter calorimetrischer Methoden immer nur auf indirectem Wege versucht wurde.

Insbesondere haben Hr. PFLÜGER und mehrere seiner Schüler (die HH. RÖHRIG und ZUNTZ, COLASANTI, FINKLER) nachgewiesen, dass Warmblüter bei niederer Temperatur des umgebenden Mediums mehr CO_2 ausgeben und mehr O aufnehmen als bei höherer und haben daraus, unter stillschweigender Voraussetzung einer strengen oder doch wenigstens annähernden Proportionalität zwischen CO_2-Ausgabe und Wärmeproduction geschlossen, dass auch letztere bei niederer Umgebungswärme grösser sei als bei höherer. Hr. PFLÜGER hat aus diesen Versuchen die Lehre von dem sogenannten chemischen Muskeltonus abgeleitet, wonach in den Muskeln unter dem Einfluss des Centralnervensystems je nach der Grösse des von der Umgebungstemperatur abhängigen Wärmeverlustes an der Körperoberfläche mehr oder weniger Wärme producirt und so die Eigenwärme constant erhalten werden sollte. Als Beweis hierfür wurde insbesondere die Thatsache in's Feld geführt, dass nach Curarevergiftung, welche den Einfluss des Nervensystems auf die Musculatur aufhebt, jene Regulirung ausbleibe. Inzwischen hatte Hr. SANDERS-EZN im Leipziger physiologischen Institut gefunden, dass auch ohne Curarevergiftung immer, wenn durch Abkühlung oder Erwärmung von der Oberfläche die Eigenwärme des Thiers wirklich geändert wird (wenn also die Regulirung nicht ausreicht) der Abkühlung des Thiers eine Abnahme und der Erwärmung des Thiers

eine Zunahme der CO_2-Ausgabe entspricht, also gerade das Gegentheil von dem, was sonst einzutreten pflegt.

Im Gegensatz zu dieser Lehre wurde von anderen, insbesondere auch von mir[1] die Rolle der Körperoberfläche bei der Wärmeregulirung stärker betont. Es ist ja an und für sich wahrscheinlich, dass beide Vorgänge zusammenwirken, um die so merkwürdige Unabhängigkeit der Eigenwärme homoiothermer Thiere von der Temperatur der Umgebung zu Stande zu bringen. Wie viel aber dem einen und wie viel dem anderen zuzuschreiben ist, kann schliesslich nur durch directe Versuche, nicht auf Umwegen ermittelt werden.

Insbesondere muss die Beweiskraft der Schlussfolgerungen aus den Änderungen der CO_2-Abgabe bestritten werden, um so mehr als ich gezeigt habe, dass eine auch nur annähernde Proportionalität zwischen CO_2-Ausgabe und Wärmeproduction nicht besteht. Auch ist die CO_2-Ausgabe, wie wir gesehen haben, nicht ohne weiteres als identisch mit der CO_2-Bildung zu betrachten. Die CO_2-Ausgabe hängt ausser von der CO_2-Bildung auch noch von der Geschwindigkeit des Blutstromes, der Tiefe der Athemzüge und anderen Umständen ab, welche ihrerseits durch Wechsel der Aussentemperatur vielleicht in anderem Sinne oder in höherem Maasse beeinflusst werden, als die Wärmeproduction.

Meine Versuche an Hunden bewegen sich bis jetzt nur in engen Grenzen. Wenngleich ich viele Versuche bei hohen und niederen Temperaturen und zum Theil auch an einem und demselben Thier gemacht habe, so sind doch für den vorliegenden Zweck nur solche zu gebrauchen, welche bei ganz gleicher Ernährung und sonst möglicht gleichem Körperzustand des Thieres angestellt sind. Das von mir vorzugsweise benutzte sogenannte grosse Calorimeter war in einem Keller aufgestellt, dessen Temperatur sehr wenig schwankte. Durch zeitweiliges Öffnen der Fenster, namentlich während der Nacht, sowie durch Heizung des Raumes, konnte man es dahin bringen, dass Umgebungstemperaturen etwa zwischen $+5^\circ$ und $+15^\circ$ C. benutzt werden konnten, während sie innerhalb eines Versuches hinreichend constant blieben. Da jedoch auch innerhalb eines einzelnen Versuches, bei vollkommen constanter Umgebungstemperatur, die Wärmeproduction Schwankungen innerhalb weiter Grenzen zeigt, so kann man nur längere Versuchsreihen oder Mittelzahlen aus solchen, welche bei nahezu gleichen Temperaturen angestellt wurden, mit einander vergleichen.

Ich habe auch einige Male den Versuch im ungeheizten Keller begonnen und nachdem der Hund 6 Stunden lang im Calorimeter

[1] Zur Kenntniss der Wärmeregulirung bei den warmblütigen Thieren. Erlangen 1872.

verweilt hatte, die Temperatur durch Heizung des Raums schnell um einige Grade in die Höhe getrieben und dann 6 Stunden lang auf der neuen Höhe erhalten.

Das Gesammtergebniss aller dieser Versuche war, dass im Allgemeinen der Hund bei den höheren Temperaturen weniger Wärme producirte, als bei den niederen. Doch entsprach nicht etwa jeder bestimmten Umgebungstemperatur eine bestimmte Wärmeproduction, sondern es ergab sich jenes Gesetz nur als ganz im Groben gültig. Denn es trifft zwar in weitaus den meisten Fällen zu, dass beim Übergang von höheren zu niederen Temperaturen die Wärmeproduction steigt, in der Regel aber sinkt sie beim Anhalten der niederen Temperatur wieder, so dass häufig bei niederen Umgebungstemperaturen geringere Werthe der Wärmeproduction vorkommen können, als bei demselben Thier unter sonst ganz gleichen Umständen bei höherer Umgebungstemperatur. Ich habe aus allen meinen Beobachtungen den Eindruck empfangen, dass allerdings auch die Anpassung der Wärmeproduction an das Wärmebedürfniss zu den Regulirungsmitteln gehört, mittels deren das homoiotherme Thier seine Eigenwärme bei Wechsel der Umgebungstemperatur constant erhält, dass jedoch dieses Mittel gegenüber den anderen, unter dem Einfluss des Nervensystems in der Haut sich abspielenden Vorgängen, welche wir kurz unter der Bezeichnung »Änderung des Emissionscoëfficienten« zusammenfassen können, an Wirksamkeit weit zurückbleibt.

Da kleinere Thiere gegen Wechsel der Umgebungstemperatur sehr viel empfindlicher sind, so habe ich ausser den eben erwähnten Versuchen am Hund noch solche am Kaninchen angestellt. Ich bediente mich hierzu meines kleinen Calorimeters, welches gegen Schwankungen der Wärmeproduction empfindlicher ist und welches ausserdem den Vortheil darbot, dass man es mitsammt dem in ihm befindlichen Thier aus einem kalten Zimmer in ein warmes oder umgekehrt transportiren konnte, um so den Einfluss des Temperaturwechsels noch unmittelbarer zu beobachten. Diese Versuche zerfallen in drei Reihen. In den beiden ersten wurde das Thier abwechselnd im kalten und im warmen Zimmer untersucht, in der dritten wurde der Versuch entweder im kalten Zimmer begonnen und dann im warmen fortgesetzt oder umgekehrt. Die Versuche bewegen sich innerhalb der Grenzen von $+ 5^\circ$ bis $+ 25^\circ$ C.

Alle drei Reihen ergaben dasselbe. Bei einer Umgebungstemperatur von etwa 13—15° C. ist die Wärmeproduction ein Minimum, unterhalb wie oberhalb dieser Mitteltemperatur ist sie grösser. Die beobachteten Maxima waren bei $5^\circ = 2.7$ und bei $25^\circ = 2.8$ sec. Ca, während der geringste Werth bei $15^\circ = 1.6$ sec. Ca betrug. Die Zu-

nahme nach oben wie nach unten war eine ziemlich gleichmässige, so dass eine Curve mit den Umgebungstemperaturen als Abscissen und den Wärmeproductionen als Ordinaten aus zwei ziemlich symmetrisch von dem mittleren Minimum bei 15° nach beiden Seiten ansteigenden, ihre Concavitäten der Abscissenaxe zuwendenden Schenkeln besteht.

Da die Versuche am Hunde nur zwischen den Temperaturen 5° und 15° angestellt wurden, so besteht zwischen ihnen und den Kaninchenversuchen kein Widerspruch. Ich werde es mir angelegen sein lassen, im weiteren Verfolg meiner Versuche die Lücken, welche ich bis jetzt noch lassen musste, nach und nach auszufüllen.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 21. März 1889, XIV.)

XVIII.

Während im art. XVI für Fundamental-Discriminanten $-\Delta_0$, also für $Q = 1$, der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5) unmittelbar in den Ausdruck (2) eingesetzt und hiermit eine Darstellung des nach ρ genommenen logarithmischen Differentialquotienten von:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-\Delta_0}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}}$$

durch das arithmetische Mittel der Logarithmen der den verschiedenen Classen der Discriminante $-\Delta_0$ entsprechenden Invariante Λ' erlangt werden konnte, bedarf es für den Fall $Q > 1$ noch einiger Vorbereitungen, weil im Ausdruck (2) die Summation über alle ganzzahligen Werthe von m, n mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0, n = 0$, im Ausdruck (5) aber nur über diejenigen Werthsysteme m, n erstreckt wird, für welche $am^2 + bmn + cn^2$ prim zu Q ist.

§. 1.

In jeder Classe quadratischer Formen (a, b, c) giebt es solche, in welchen

$$a \text{ prim zur Discriminante } D,\ b \equiv 0 \pmod{Q},\ c \equiv 0 \pmod{Q^2}$$

ist.[1] Für solche Formen hat $am^2 + bmn + cn^2$ nur dann einen gemeinsamen Theiler mit Q, wenn m einen solchen hat; jene im art. VIII mit $(\mathfrak{M}')$ bezeichnete Gleichung:

$$\tau \sum_{h,k} \left(\frac{D}{h}\right) F(hk) = \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} F(am^2 + bmn + cn^2),$$

[1] Die Begründung dieser und aller anderen arithmetischen Voraussetzungen behalte ich einer besonderen, der Theorie der quadratischen Formen gewidmeten Arbeit vor.

in welcher die Summationen dahin beschränkt sind, dass die Argumente der Function F zu Q prim sein müssen, kann daher folgendermaassen dargestellt werden:

$$(1)\quad \tau\sum_{h,k}\left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right)F(hk)=\sum_{a,b,c}\sum_{m;n}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)\quad\left(\begin{matrix}h,k=1,2,3,\ldots\\ m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{matrix}\right),$$

wo nunmehr bei der Summation rechts einzig und allein das System $m=0$, $n=0$ wegzulassen ist.

Da b durch Q und c durch Q^2 theilbar ist, so kann man setzen:

$$b=b'Q,\ c=c'Q^2,$$

wo b', c' ganze Zahlen bedeuten. Dann wird:

$$am^2+bmn+cn^2=am^2+b'mnQ+c'n^2Q^2,$$

und man sieht also, dass das Quadrat des grössten gemeinsamen Theilers von m und Q den grössten gemeinsamen Theiler von

$$am^2+bmn+cn^2 \text{ und } Q^2$$

bildet. Wird nämlich der grösste gemeinsame Theiler von m und Q mit Q'_1 bezeichnet und:

$$m=m_1Q'_1,\ Q=Q_1Q'_1$$

gesetzt, so ist:

$$am^2+bmn+cn^2=(am_1^2+b'm_1nQ_1+c'n^2Q_1^2)Q_1'^2;$$

die Zahl $am^2+bmn+cn^2$ hat also mit Q^2, d. h. mit $Q_1^2Q_1'^2$, den Factor $Q_1'^2$ gemein, aber auch nur diesen; denn:

$$am_1^2+b'm_1mQ_1+c'n^2Q_1^2$$

ist prim zu Q_1, weil der Voraussetzung nach Q'_1 der grösste gemeinsame Theiler von m und Q, und folglich m_1 prim zu Q_1 ist.

Bedeuten $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die verschiedenen Primfactoren von Q und setzt man:

$$(2)\quad (1-q_1^z)(1-q_2^z)(1-q_3^z)\ldots=\sum_n \varepsilon_n n^z,$$

so kann man sich die Summation rechts auf alle Divisoren von Q ausgedehnt denken, wenn man nur $\varepsilon_n=0$ nimmt, sobald irgend ein Primfactor von n mehrfach darin enthalten ist, aber wenn dies nicht der Fall ist:

$$\varepsilon_n=1,\ -1,$$

je nachdem die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von n gerade oder ungerade ist. Ich bemerke hierbei, dass sich diese Bezeichnungsweise schon im §. 2 des art. XI findet, dass aber im art. X versehentlich das Product:

$$(1-p'z)(1-p''z)(1-p'''z)\ldots$$

als erzeugende Function angegeben ist. Offenbar muss z nicht Factor, sondern, wie in der Gleichung (2), Exponent der verschiedenen Primzahlen sein.

Bei Anwendung der eingeführten Bezeichnungsweise wird:

$$(3) \qquad \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2+bmn+cn^2) = \sum_{\mathfrak{k}} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q'_{\mathfrak{k}}} F(am_{\mathfrak{k}}^2+bm_{\mathfrak{k}}n_{\mathfrak{k}}+cn_{\mathfrak{k}}^2), \quad (\mathfrak{k}=1,2,3,\ldots)$$

wo $Q'_1, Q'_2, Q'_3, \ldots$ die verschiedenen Divisoren von Q bedeuten und die Summation rechts über alle Systeme von ganzen Zahlen $m_{\mathfrak{k}}, n_{\mathfrak{k}}$ zu erstrecken ist, für welche:

$$am_{\mathfrak{k}}^2+bm_{\mathfrak{k}}n_{\mathfrak{k}}+cn_{\mathfrak{k}}^2 \equiv 0 \pmod{Q'_{\mathfrak{k}}}$$

wird. Da b und c durch $Q'_{\mathfrak{k}}$ theilbar, a hingegen prim zu $Q'_{\mathfrak{k}}$ ist, so muss $m_{\mathfrak{k}}^2$ durch $Q'_{\mathfrak{k}}$ theilbar sein. Nun kommen, da für die Divisoren $Q'_{\mathfrak{k}}$, die irgend einen Primfactor mehrfach enthalten, $\varepsilon=0$ ist, nur solche Divisoren $Q'_{\mathfrak{k}}$ in Betracht, welche lauter verschiedene Primfactoren enthalten, und für diese hat die Congruenz:

$$m_{\mathfrak{k}}^2 \equiv 0 \pmod{Q'_{\mathfrak{k}}}$$

die speciellere:

$$m_{\mathfrak{k}} \equiv 0 \pmod{Q'_{\mathfrak{k}}}$$

als nothwendige Voraussetzung. Man kann daher in der Gleichung (3) rechts:

$$m_{\mathfrak{k}} = mQ'_{\mathfrak{k}}, \quad n_{\mathfrak{k}} = n$$

setzen und dann die Summation über alle Systeme ganzer Zahlen m, n, mit alleinigem Ausschluss des Systems $m=0, n=0$, erstrecken. Substituirt man nun noch für b, c beziehungsweise:

$$b'Q', \; c'Q'^2,$$

so verwandelt sich die Gleichung (3) in folgende:

$$(4) \quad \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2+bmn+cn^2) = \sum_{\mathfrak{k}} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q'_{\mathfrak{k}}} F\big((am^2+b'mnQ_{\mathfrak{k}}+c'n^2Q_{\mathfrak{k}}^2)\,Q_{\mathfrak{k}}'^2\big),$$

und es sind hier auf beiden Seiten die Summationen auf alle Systeme ganzer Zahlen m, n, mit Ausschluss des Systems $m=0, n=0$, zu erstrecken.

Setzt man in der Gleichung (4) links für (a, b, c) ein System nicht aequivalenter Formen der Discriminante D oder D_0Q^2, so kommen rechts für jeden Werth von $\mathfrak{k}$ die entsprechenden Formen:

$$(a, b'Q_{\mathfrak{k}}, c'Q_{\mathfrak{k}}^2)$$

der Discriminante $D_0Q_{\mathfrak{k}}^2$ vor, unter welchen jene »enthalten« sind. Von

diesen Formen sind aber gewisse einander aequivalent, und zwar ist die Anzahl derjenigen einander aequivalenten Formen:

$$(a', b'Q_t, c'Q_t^2)$$

der Discriminante $D_0 Q_t^2$, unter welchen eine bestimmte Form (a, b, c) der Discriminante D enthalten ist, für jede der letzteren Formen dieselbe.[1] Von den vorkommenden Formen:

$$(a', b'Q_t, c'Q_t^2)$$

gehören also je

$$\frac{K(D_0 Q^2)}{K(D_0 Q_t^2)} \text{ oder } \frac{K(D)}{K(D_0 Q_t^2)}$$

derselben Classe von Formen der Discriminante $D_0 Q_t^2$ an, und es besteht daher die Gleichung:

$$(5)\quad \frac{1}{K(D)} \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) = \sum_t \sum_{a_t, b_t, c_t} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q'_t} \frac{F((a_t m^2 + b_t mn + c_t n^2) Q_t'^2)}{K(D_0 Q_t^2)},$$

in welcher die Summationen sich auf alle Systeme ganzer Zahlen m, n, mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$, beziehen, ferner links auf ein vollständiges System nicht aequivalenter Formen (a, b, c) der Discriminante D, rechts aber für jede der in D enthaltenen Discriminanten $D_0 Q_t^2$ auf ein vollständiges System nicht aequivalenter Formen:

$$(a_t, b_t, c_t)$$

eben dieser Discriminante $D_0 Q_t^2$. Ersetzt man nunmehr die Summe auf der linken Seite der Gleichung (5) durch diejenige, welche die linke Seite der obigen Formel (1) bildet, so resultirt die Gleichung:

$$(6)\quad \frac{\tau}{K(D)} \sum_{h=1}^{h=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_t \sum_{a_t, b_t, c_t} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q'_t} \frac{F((a_t m^2 + b_t mn + c_t n^2) Q_t'^2)}{K(D_0 Q_t^2)},$$

und es zeigt sich daher, wenn $F(n) = n^{-1-\varrho}$ genommen und auf beiden Seiten der Gleichung (6) mit $|D|^{\frac{1}{2}(1+\varrho)}$ multiplicirt wird, dass der Werth von:

$$(7)\quad \frac{\tau |D|^{\frac{1}{2}(1+\varrho)}}{K(D)} \sum_{h=1}^{h=\infty} \left(\frac{D}{h}\right) h^{-1-\varrho} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) \rho k^{-1-\varrho}$$

mit dem Werthe von:

$$(8)\quad \rho |D|^{\frac{1}{2}(1+\varrho)} \sum_t \varepsilon_{Q'_t} \frac{Q_t'^{-2-2\varrho}}{K(D_0 Q_t^2)} \sum_{a_t, b_t, c_t} \sum_{m,n} (a_t m^2 + b_t mn + c_t n^2)^{-1-\varrho}$$

übereinstimmt.

[1] Vergl. die Abhandlung des Hrn. Lipschitz: »Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen«. Journal für Mathematik, Bd. LIII.

§. 2.

Bezeichnet man, wie im art. VIII und IX mit $H(D)$, $\overline{H}(D)$ beziehungsweise die Reihen:

$$\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{1}{h}, \quad \sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{\log h}{h}$$

und, wie im art. XVII, mit $\mathfrak{H}(D)$ den nach ρ genommenen Differentialquotienten von:

$$\log\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{|D|}}{n}\right)^{1+\rho},$$

für $\rho = 0$, so ist:

$$\mathfrak{H}(D) = -\frac{\overline{H}(D)}{H(D)} + \tfrac{1}{2}\log|D|,$$

und es ergiebt sich, wenn man die im art. VIII mit $(\mathfrak{N})$ bezeichnete Gleichung:

$$\tau H(D)\sqrt{-D} = 2\pi K(D) \tag{9}$$

berücksichtigt, dass *modulo* ρ^2 die Congruenz:

$$\frac{\tau(-D)^{\frac{1}{2}(1+\rho)}}{K(D)}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{1}{h^{1+\rho}} \equiv 2\pi\big(1+\rho\mathfrak{H}(D)\big) \tag{10}$$

besteht, d. h. dass der Ausdruck auf der rechten Seite das Aggregat aller derjenigen Glieder der Entwickelung des Ausdrucks auf der linken Seite nach steigenden Potenzen von ρ darstellt, welche nicht ρ^2 oder höhere Potenzen von ρ enthalten.

Nach der oben angewendeten Methode ergiebt sich ferner, dass:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)k^{-1-\rho} = \sum_{\mathfrak{t}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}(kQ'_\mathfrak{t})^{-1-\rho} = \sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{-1-\rho}_\mathfrak{t}\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{-1-\rho}$$

wird, wo die durch $\sum_{\mathfrak{t}}$ angedeutete Summation auf alle Divisoren $Q'_\mathfrak{t}$ von Q zu erstrecken ist. Da *modulo* ρ^2 die Congruenzen:

$$\rho\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{-1-\rho} \equiv 1+\rho C, \quad \sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{-1-\rho}_\mathfrak{t} \equiv \sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{-1}_\mathfrak{t} - \rho\sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{-1}_\mathfrak{t}\log Q'_\mathfrak{t},$$

in dem oben dargelegten Sinne, bestehen, so resultirt, wenn zur Abkürzung:

$$\sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{-1}_\mathfrak{t} = S(Q), \quad \sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{-1}_\mathfrak{t}\log Q'_\mathfrak{t} = \overline{S}(Q) \tag{11}$$

gesetzt wird, die Congruenz:

$$\rho\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)k^{-1-\rho} \equiv (1+\rho C)\,S(Q) - \rho\overline{S}(Q) \pmod{\rho^2}, \tag{12}$$

und aus den beiden Congruenzen (10) und (12) folgt endlich, dass:

$$(13)\qquad 2\pi\left(1+\rho C+\rho\mathfrak{H}(D)\right)S(Q)-2\pi\rho\bar{S}(Q)$$

das Aggregat der beiden ersten Glieder der Entwickelung des Ausdrucks (7) nach steigenden Potenzen von ρ darstellt, oder, was dasselbe ist,

dass die beiden Ausdrücke (7) und (13) einander *modulo* ρ^2 congruent sind.

Um nun das Aggregat der beiden ersten Glieder in der Entwickelung des Ausdrucks (8) nach steigenden Potenzen von ρ darzustellen, gehe ich von der im art. XIV mit (18) bezeichneten Gleichung aus, indem ich dieselbe in dem obigen Sinne als Congruenz *modulo* ρ^2 folgendermaassen fasse:

$$\rho(4ac-b^2)^{\frac{1}{2}(1+\rho)}\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\equiv 2\pi\left(1+2\rho C+2\rho\log 2\pi-\rho\log\Lambda'(0,0,w_1,w_2)\right).$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man von den Relationen:

$$D_0Q_t^2=b_t^2-4a_tc_t\,,\quad D=D_0Q_t^2Q_t'^2$$

Gebrauch macht, die Congruenz *modulo* ρ^2:

$$\rho(-D)^{\frac{1}{2}(1+\rho)}Q_t'^{-1-\rho}\sum_{m,n}(a_tm^2+b_tmn+c_tn^2)^{-1-\rho}\equiv 2\pi\left(1+2\rho C+2\rho\log\pi-\rho\log\Lambda'(0,0,w_1^{(t)},w_2^{(t)})\right),$$

in welcher für $w_1^{(t)}$, $-w_2^{(t)}$ die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$a_t+b_tw+c_tw^2=0$$

zu nehmen sind. Der oben mit (8) bezeichnete Ausdruck wird demnach *modulo* ρ^2 congruent dem Ausdrucke:

$$2\pi\sum_t\varepsilon_{Q_t'}\frac{Q_t'^{-1-\rho}}{K(D_0Q_t^2)}\sum_{a_t,b_t,c_t}\left(1+2\rho C+2\rho\log 2\pi-\rho\log\Lambda'(0,0,w_1^{(t)},w_2^{(t)})\right),$$

und dieser kann, da $K(D_0Q_t^2)$ die Anzahl der Formen (a_t, b_t, c_t) bedeutet, so dargestellt werden:

$$(14)\qquad 2\pi(1+2\rho C+2\rho\log 2\pi)\sum_t\varepsilon_{Q_t'}Q_t'^{-1-\rho}$$
$$-2\pi\rho\sum_t\varepsilon_{Q_t'}\frac{Q_t'^{-1-\rho}}{K(D_0Q_t^2)}\sum_{a_t,b_t,c_t}\log\Lambda'(0,0,w_1^{(t)},w_2^{(t)}).$$

Ersetzt man hierin $Q_t'^{-1-\rho}$ durch $Q_t'^{-1}-\rho Q_t'^{-1}\log Q_t'$ und benutzt die oben unter (11) eingeführten Bezeichnungen, so zeigt sich, dass der Ausdruck (14), und also auch der Ausdruck (8), *modulo* ρ^2 dem folgenden congruent ist:

$$(15)\qquad 2\pi(1+2\rho C+2\rho\log 2\pi)\,S(Q)-2\pi\rho\bar{S}(Q)$$
$$-2\pi\rho\sum_{\mathfrak{k}}\varepsilon_{Q'_{\mathfrak{k}}}\frac{1}{Q'_{\mathfrak{k}}\cdot K(D_0 Q_{\mathfrak{k}}^2)}\sum_{a_{\mathfrak{k}},b_{\mathfrak{k}},c_{\mathfrak{k}}}\log\Lambda'(0,0,w_1^{(\mathfrak{k})},w_2^{(\mathfrak{k})}).$$

Nun hat sich oben gezeigt, dass die Ausdrücke (7) und (13) einander *modulo* ρ^2 congruent sind, und schon am Schlusse des §. 1 hat sich ergeben, dass die Werthe der beiden Ausdrücke (7) und (8) an sich, d. h. nicht bloss *modulo* ρ^2, mit einander übereinstimmen; es folgt demnach,

dass die beiden Ausdrücke (13) und (15) einander *modulo* ρ^2 congruent sind,

und deren Vergleichung liefert unmittelbar die gesuchte Darstellung der Function $\mathfrak{H}$ für beliebige Discriminanten D durch die Invarianten Λ':

$$(16)\quad \mathfrak{H}(D)=C+\log 4\pi^2-\frac{1}{S(Q)}\sum_{\mathfrak{k}}\varepsilon_{Q'_{\mathfrak{k}}}\frac{1}{Q'_{\mathfrak{k}}\cdot K(D_0 Q_{\mathfrak{k}}^2)}\sum_{a_{\mathfrak{k}},b_{\mathfrak{k}},c_{\mathfrak{k}}}\log\Lambda'(0,0,w_1^{(\mathfrak{k})},w_2^{(\mathfrak{k})}),$$

welche mit der specielleren im art. XVII (11) angegebenen für den Fall $D=D_0$, $Q=1$ übereinkommt.

§. 3.

Die Gleichung (16) ist leicht in folgende zu transformiren:

$$(17)\quad \mathfrak{H}(D)=C-\frac{1}{\phi(Q)}\sum_{\mathfrak{k}}\varepsilon_{Q'_{\mathfrak{k}}}\frac{Q_{\mathfrak{k}}}{K(D_0 Q_{\mathfrak{k}}^2)}\sum_{a_{\mathfrak{k}},b_{\mathfrak{k}},c_{\mathfrak{k}}}\log\frac{1}{4\pi^2}\Lambda'(0,0,w_1^{(\mathfrak{k})},w_2^{(\mathfrak{k})}),$$

in welcher unter $\phi(Q)$ in der üblichen Gauss'schen Weise der Werth von:

$$Q\prod\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

zu verstehen und die Multiplication auf alle verschiedenen, in Q enthaltenen Primzahlen zu erstrecken ist.

Die eigentliche Bedeutung dieser Relation tritt klarer hervor, wenn man den Gauss'schen Begriff der »Ordnung« der verschiedenen zu einer Discriminante gehörigen Formenclassen zu Hülfe nimmt. Vereinigt man nämlich alle diejenigen quadratischen Formen:

$$ax^2+bxy+cy^2$$

in einer und derselben »Ordnung«, für welche die drei Coefficienten a, b, c einen und denselben grössten gemeinsamen Theiler t haben, so bilden die Formen:

$$(a_{\mathfrak{k}}Q'_{\mathfrak{k}},\ b_{\mathfrak{k}}Q'_{\mathfrak{k}},\ c_{\mathfrak{k}}Q'_{\mathfrak{k}})\qquad (\mathfrak{k}=1,2,\ldots)$$

der Discriminante D ein vollständiges System nicht aequivalenter

Formen der durch den Theiler Q_t' charakterisirten »Ordnung«. Hiernach stellt der Ausdruck:

$$-\frac{1}{K(D_0 Q_t^2)} \sum_{a_t, b_t, c_t} \log \frac{1}{4\pi^2} \Lambda'(0, 0, w_1^{(t)}, w_2^{(t)}),$$

in welchem $w_1^{(t)}, -w_2^{(t)}$ als die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$a_t + b_t w + c_t w^2 = 0$$

definirt sind, den Mittelwerth des Logarithmus der Invariante:

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda'\left(0, 0, \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \dfrac{b+\sqrt{D}}{2c}\right)}$$

für die verschiedenen Classen (a, b, c) der durch Q_t' charakterisirten »Ordnung« der Discriminante D dar. Bezeichnet man diesen Mittelwerth zur Abkürzung mit:

$$\log \mathrm{M}(\sqrt{D}, Q_t')$$

so bedeutet $\mathrm{M}(\sqrt{D}, Q_t')$ das geometrische Mittel der Invariante:

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda'\left(0, 0, \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \dfrac{b+\sqrt{D}}{2c}\right)} \tag{18}$$

für die durch Q_t' charakterisirte »Ordnung«, und die Relation (17) nimmt dann folgende übersichtliche Gestalt an:

$$\mathfrak{H}(D) = C + \frac{Q}{\phi(Q)} \sum_t \frac{\varepsilon_t \log \mathrm{M}(\sqrt{D}, t)}{t} \qquad (D = D_0 Q^2), \tag{19}$$

wo die Summation auf alle Divisoren t von Q zu erstrecken ist. Dabei ist daran zu erinnern, dass $\varepsilon_t = 0$ ist, wenn t irgend einen Primfactor mehrfach enthält, dass also nur diejenigen Divisoren von Q wirklich vorkommen, welche lauter von einander verschiedene Primfactoren enthalten.

Da die Argumente:

$$\frac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \frac{b+\sqrt{D}}{2c}$$

der Functionen Λ', deren Mittelwerth für die durch Q_t' charakterisirte Ordnung mit $\mathrm{M}(\sqrt{D}, Q_t')$ bezeichnet worden ist, einzig und allein von den Verhältnisswerthen:

$$b : c : \sqrt{D}$$

abhängen, so bleibt der Werth von $\mathrm{M}(\sqrt{D}, Q_t')$ ungeändert, wenn ein gemeinsamer Theiler beider Argumente weggelassen wird, d. h.

es besteht, wenn D_0 irgend eine Fundamental-Discriminante ist und P, Q, R irgend welche ganze Zahlen bedeuten, die Relation:

$$(20) \qquad \mathrm{M}(\sqrt{D_0 P^2 Q^2 R^2}, PQ) = \mathrm{M}(\sqrt{D_0 Q^2 R^2}, Q).$$

In der Gleichung (19) ist daher $\mathrm{M}(\sqrt{D}, t)$ durch $\mathrm{M}\left(\frac{1}{t}\sqrt{D}, 1\right)$ zu ersetzen, und dieselbe nimmt, wenn dies geschieht und noch mit d der zu t complementäre Divisor bezeichnet wird, die Form an:

$$(21) \qquad \phi(Q)\left(\mathfrak{H}(D_0 Q^2) - C\right) = \sum_{d,t} \varepsilon_t d \log \mathrm{M}(\sqrt{D_0 d^2}, 1) \qquad (dt = Q),$$

auf welche die im art. XI, §. 2 hergeleiteten, einander correspondirenden Relationen:

$$f(Q) = \sum_{d,t} \varepsilon_t h(d), \quad h(Q) = \sum_d f(d) \qquad (dt = Q)$$

unmittelbar anwendbar sind.

Demnach folgt aus der Gleichung (21), dass:

$$Q \log \mathrm{M}(\sqrt{D_0 Q^2}, 1) = \sum_d \phi(d)\left(\mathfrak{H}(D_0 d^2) - C\right)$$

ist, wenn die Summation rechts auf alle Divisoren d von Q ausgedehnt wird, und hieraus geht, wenn von der Relation $\sum_d \phi(d) = Q$ Gebrauch gemacht wird, die Gleichung:

$$(22) \qquad C + \log \mathrm{M}(\sqrt{D_0 Q^2}, 1) = \frac{1}{Q}\sum_d \phi(d)\,\mathfrak{H}(D_0 d^2)$$

hervor, welche die Darstellung des Mittelwerthes der Invariante (18) für die primitive Ordnung einer beliebigen Discriminante $D_0 Q^2$ durch die den verschiedenen Theiler-Discriminanten $D_0 d^2$ entsprechenden Functionen $\mathfrak{H}$ enthält. Die Werthe dieser verschiedenen Functionen $\mathfrak{H}$ lassen sich aber, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll, sämmtlich auf den der Fundamental-Discriminante entsprechenden Werth $\mathfrak{H}(D_0)$ zurückführen, und es kann damit eine Darstellung von $\log \mathrm{M}(\sqrt{D_0 Q^2}, 1)$ durch $\mathfrak{H}(D_0)$ allein erlangt werden.

§. 4.

Zu dem angegebenen Zwecke gehe ich von der Gleichung:

$$(23) \qquad \log\sqrt{-D} - \mathfrak{H}(D) = \frac{H'(D)}{H(D)} = \lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{D}{p}\right)}$$

aus, in welcher die Summation über alle Primzahlen p zu erstrecken

ist, und welche, ganz ebenso wie die speciellere im Anfange des art. XVII, durch Differentiation der Gleichung:

$$\log \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} = \sum_p \log \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\rho}}\right)^{-1}$$

nach ρ entsteht.

Substituirt man auf der rechten Seite der Gleichung (22) für $\mathfrak{H}(D_0 d^2)$ gemäss (23) den Ausdruck:

$$\log \sqrt{-D_0 d^2} - \lim_{\rho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right) \left(\frac{d^2}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)}$$

und berücksichtigt, dass:

$$\sum_d \left(\frac{d^2}{p}\right) \phi(d) = \frac{Q}{p^r}$$

ist, wenn die Summation auf alle Divisoren d von Q erstreckt und mit p^r die höchste in Q enthaltene Potenz von p bezeichnet wird, so kommt:

$$(24)\quad C + \log \mathrm{M}(\sqrt{D}, 1) = \log \sqrt{-D_0} + \frac{1}{Q} \sum_d \phi(d) \log d - \lim_{\rho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right) \frac{p^{-r} \log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)}.$$

Nun ist:

$$\sum_d \phi(d) \log d = \sum_{h_1, h_2, \ldots} (h_1 \log q_1 + h_2 \log q_2 + \ldots) \phi(q_1^{h_1}) \phi(q_2^{h_2}) \ldots,$$

wenn die Summation auf:

$$h_\mathfrak{k} = 1, 2, 3, \ldots r_\mathfrak{k} \qquad (\mathfrak{k} = 1, 2, \ldots)$$

erstreckt wird und $r_\mathfrak{k}$ den Exponenten der höchsten in Q enthaltenen Potenz von $q_\mathfrak{k}$ bezeichnet. In dieser Summe kommt $\log q_1$ mit:

$$\sum_{h_1} h_1 \phi(q_1^{h_1}) \sum_{h_2, h_3, \ldots} \phi(q_2^{h_2} q_3^{h_3} \ldots)$$

multiplicirt vor, und dieser Factor von $\log q_1$ ist gleich:

$$\frac{Q}{q_1^{r_1}} \sum_{h_1} h_1 \phi(q_1^{h_1}) \quad \text{oder} \quad r_1 Q - \frac{1 - q_1^{-r_1}}{q_1 - 1} Q.$$

Es wird also:

$$\frac{1}{Q} \sum_d \phi(d) \log d = \sum_\mathfrak{k} r_\mathfrak{k} \log q_\mathfrak{k} - \sum_\mathfrak{k} \frac{1 - q_\mathfrak{k}^{-r_\mathfrak{k}}}{q_\mathfrak{k} - 1} \log q_\mathfrak{k}$$

und folglich, da $\sum_\mathfrak{k} r_\mathfrak{k} \log q_\mathfrak{k} = \log Q$ ist, gemäss der Gleichung (24):

$$(25)\quad C + \log \mathrm{M}(\sqrt{D}, 1) = \log \sqrt{-D} - \sum_q \frac{1 - q^{-r}}{q - 1} \log q - \lim_{\rho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right) \frac{p^{-r} \log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)},$$

wo sich die erstere, auf q bezügliche Summation nur auf alle in Q enthaltenen Primzahlen, die letztere, auf p bezügliche aber auf alle Primzahlen erstreckt. In der letzteren Summe ist $r = 0$, sobald p nicht in Q enthalten und also keine der mit q bezeichneten Primzahlen ist. Man kann diese Summe daher auch so darstellen:

$$\lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)} - \sum_q \left(\frac{D_0}{q}\right) \frac{1 - q^{-r}}{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} \log q \,,$$

wo die erstere Summation auf alle Primzahlen, die letztere nur auf diejenigen zu erstrecken ist, welche in Q enthalten sind.

Die Gleichung (25) nimmt hiernach, wenn man zur Abkürzung:

$$(26) \qquad \sum_q \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\right) \frac{q^r - 1}{q^r - q^{r-1}} \cdot \frac{\log q}{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} = \mathrm{Z}(D_0, Q)$$

setzt, folgende Gestalt an:

$$(27) \quad C + \log \frac{\mathrm{M}(\sqrt{D}, 1)}{\sqrt{-D}} + \mathrm{Z}(D_0, Q) = -\lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)} \,,$$

und es ist zur Erläuterung des mit $\mathrm{Z}(D_0, Q)$ bezeichneten Ausdrucks nochmals hervorzuheben, dass, wenn Q, als Product von Potenzen von Primzahlen dargestellt, gleich:

$$q_1^{r_1} q_2^{r_2} q_3^{r_3} \ldots .$$

ist, die Summation auf der linken Seite der Gleichung (26) sich auf die Werthe:

$$q = q_1, q_2, q_3, \ldots$$

und die zugehörigen Werthe:

$$r = r_1, r_2, r_3, \ldots$$

bezieht. Wird nunmehr in der Gleichung (27) die Summe auf der rechten Seite gemäss der obigen Formel (23) durch $\mathfrak{H}(D_0)$ ausgedrückt, so geht dieselbe in folgende über:

$$(28) \qquad C + \log \mathrm{M}(\sqrt{D_0 Q^2}, 1) + \mathrm{Z}(D_0, Q) = \mathfrak{H}(D_0) \,,$$

welche die oben angekündigte Darstellung von $\log \mathrm{M}(\sqrt{D_0 Q^2}, 1)$ durch $\mathfrak{H}(D_0)$ allein enthält.

§. 5.

Für den Fall $D = D_0$, $Q = 1$ wird $\mathrm{Z}(D_0, Q) = \mathrm{Z}(D_0, 1) = 0$, und die Gleichung (28) reducirt sich daher auf folgende:

$$(28^*) \qquad C + \log \frac{\mathrm{M}(\sqrt{D_0}, 1)}{\sqrt{-D_0}} = \mathfrak{H}(D_0),$$

welche mit der Formel (11) im art. XVII genau übereinstimmt.

Substituirt man nun in der Gleichung (28) für $\mathfrak{H}(D_0)$ den Ausdruck, welcher die linke Seite der Gleichung (28*) bildet, so resultirt die Formel:

$$(29) \qquad \log \frac{\mathrm{M}(\sqrt{D}, 1)}{\sqrt{-D}} + \mathrm{Z}(D_0, Q) = \log \frac{\mathrm{M}(\sqrt{D_0}, 1)}{\sqrt{-D_0}},$$

durch welche der Mittelwerth der Invariante (18) für die primitive Ordnung einer beliebigen Discriminante $D = D_0 Q^2$ auf den der Fundamentaldiscriminante D_0 entsprechenden zurückgeführt wird. Zugleich zeigt die Formel (29),

dass der Ausdruck:

$$\log \frac{\mathrm{M}(\sqrt{D_0 Q^2}, 1)}{\sqrt{-D_0 Q^2}} + \mathrm{Z}(D_0, Q)$$

für alle Werthe von Q, d. h. also für alle Discriminanten $D = D_0 Q^2$, welchen dieselbe Fundamentaldiscriminante D_0 entspricht, einen und denselben Werth hat.

Man kann die Formel (29) aber auch zur Vergleichung solcher Werthe von M verwenden, welche verschiedenen O r d n u n g e n derselben Discriminante entsprechen.

Bedeutet nämlich, wie vorher, D_0 irgend eine Fundamentaldiscriminante, Q irgend eine ganze Zahl und sind d, t ebenso wie d_1, t_1 mit einander complementäre Divisoren von Q, so dass:

$$dt = d_1 t_1 = Q$$

wird, so ist gemäss der Formel (20), wenn, wie oben, $D = D_0 Q^2$ gesetzt wird:

$$\mathrm{M}(\sqrt{D}, t) = \mathrm{M}(\sqrt{D_0 d^2}, 1), \quad \mathrm{M}(\sqrt{D}, t_1) = \mathrm{M}(\sqrt{D_0 d_1^2}, 1)$$

und alsdann gemäss der Formel (29):

$$\log \frac{\mathrm{M}(\sqrt{D}, t)}{\sqrt{-D_0 d^2}} + \mathrm{Z}(D_0, d) = \log \frac{\mathrm{M}(\sqrt{D}, t_1)}{\sqrt{-D_0 d_1^2}} + \mathrm{Z}(D_0, d_1).$$

Diese Gleichung kann aber auch so dargestellt werden:

$$(30) \quad \log t\,\mathrm{M}(\sqrt{D}, t) + \mathrm{Z}\left(D_0, \frac{1}{t}\sqrt{\frac{D}{D_0}}\right) = \log t_1\,\mathrm{M}(\sqrt{D}, t_1) + \mathrm{Z}\left(D_0, \frac{1}{t_1}\sqrt{\frac{D}{D_0}}\right),$$

und es zeigt sich daher,

dass der Ausdruck:

$$\log t\,\mathrm{M}(\sqrt{D}, t) + \mathrm{Z}\left(D_0, \frac{1}{t}\sqrt{\frac{D}{D_0}}\right)$$

für alle Werthe von t, d. h. also für alle verschiedenen Ordnungen der quadratischen Formen der Discriminante D einen und denselben Werth hat.

Nun ist nach der oben im §. 3 aufgestellten Definition:

$$\log \mathrm{M}(\sqrt{D}, t) = -\frac{1}{K\left(\frac{D}{t^2}\right)} \sum_{a,b,c} \log \frac{1}{4\pi^2} \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right),$$

wenn über ein System unter einander nicht aequivalenter Formen (a, b, c) der Discriminante D summirt wird, in welchen a, b, c den grössten gemeinsamen Theiler t haben, welche also die verschiedenen Classen der durch t charakterisirten Ordnung repraesentiren. Ferner ist gemäss der Formel (15) im art. XV:

$$-\log \frac{1}{4\pi^2} \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{\pi\sqrt{-D}}{6c} - \log \frac{\sqrt{-D}}{c} - 2 \log \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - e^{2nw_1\pi i})(1 - e^{2nw_2\pi i});$$

$$\left(w_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \quad w_2 = \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right)$$

das in der Gleichung (30) enthaltene Resultat ist daher, wenn man auf die Bedeutung der Bezeichnungen M, Z zurückgeht, folgendermaassen zu fassen:

Versteht man unter (a, b, c) quadratische Formen der Discriminante D, welche die sämmtlichen Classen einer bestimmten, durch den Theiler t charakterisirten Ordnung repraesentiren, unter $K(D, t)$ die Anzahl dieser Classen, unter D_0 die der Discriminante D entsprechende Fundamentaldiscriminante, unter w diejenige Wurzel der Gleichung $a + bw + cw^2 = 0$, für welche der reelle Theil von wi negativ ist, und wird durch:

(31) $$q_1^{r_1} q_2^{r_2} q_3^{r_3} \ldots$$

die ganze Zahl:

$$\sqrt{\frac{D}{D_0 t^2}}$$

als Product von Potenzen verschiedener Primzahlen dargestellt, so hat das Aggregat:

$$\frac{1}{K(D,t)}\sum_{a,b,c}\left\{\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c}-\log\frac{\sqrt{-D}}{ct}-4\log\prod_{n=1}^{n=\infty}\left|1-e^{2n\pi c\pi i}\right|\right\}$$
$$+\sum_{q,r}\left(1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\right)\frac{q^r-1}{q^r-q^{r-1}}\cdot\frac{\log q}{q-\left(\frac{D_0}{q}\right)}\qquad\left(\begin{matrix}q=q_1,q_2,\ldots\\ r=r_1,r_2,\ldots\end{matrix}\right)^1$$

für jede der verschiedenen Ordnungen einen und denselben Werth.

In ganz analoger Weise kann der Inhalt der im art. VIII mit (𝔇) bezeichneten Gleichung:

(𝔇) $$\frac{K(D)}{K(D_0)}=Q\prod_q\left(1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\frac{\log E(D_0)}{\log E(D)}$$

folgendermaassen formulirt werden:

Versteht man unter $K(D,t)$ die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen der durch t charakterisirten Ordnung der Discriminante D, unter $E\left(\frac{D}{t^2}\right)$ die Fundamentaleinheit:

$$\frac{1}{r}\left(T+U\sqrt{\frac{D}{t^2}}\right),\qquad (r=1,2),$$

d. h. diejenige Einheit, durch deren ganze Potenzen sich sämmtliche Einheiten von der Form:

(32) $$\frac{1}{r}\left(T'+U'\sqrt{\frac{D}{t^2}}\right)\qquad (r=1,2)$$

darstellen lassen, so hat der Ausdruck:

$$tK(D,t)\prod\left(1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)^{-1}\log E\left(\frac{D}{t^2}\right),$$

in welchem die Multiplication auf alle verschiedenen, in der ganzen Zahl $\frac{D}{t^2}$ enthaltenen Primzahlen q zu erstrecken ist, für jede der verschiedenen durch t charakterisirten Ordnungen einen und denselben Werth.

Da nun die Gleichung (𝔇), und also auch die hier angegebene Formulirung ihres Inhalts, nur als eine etwas modificirte Darstellung jener Gauss'schen Sätze im art. 256 der *Disquisitiones arithmeticae* zu betrachten ist, welche die Vergleichung der Anzahl der in den ver-

---

[1] Bei der Summation sind, wie oben, stets nur die zusammengehörigen Werthe $q=q_t$, $r=r_t$ zu nehmen.

schiedenen Ordnungen enthaltenen Classen quadratischer Formen betreffen, so lässt die obige (mit (31) bezeichnete) Fassung des Inhalts der Gleichung (30) deutlich erkennen, dass das darin entwickelte, aus der Theorie der elliptischen Functionen geschöpfte Ergebniss, welches die Vergleichung der Mittelwerthe der Invariante Λ' für die verschiedenen Ordnungen quadratischer Formen betrifft, sich ebenso unmittelbar als ein neues Resultat jenen älteren GAUSS'schen anreiht, wie die im art. XVI in der Gleichung (7) ausgedrückte Relation zwischen den Werthen gewisser Reihen und den Mittelwerthen der Invariante Λ' für quadratische Formen primitiver Ordnungen an die bezüglichen DIRICHLET'schen Resultate anknüpfte.

§. 6.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass in der Gleichung (29) wundersame Beziehungen zwischen Zahlenausdrücken enthalten sind, und dass deren Eigenart leichter erkennbar wird, wenn man die angenäherten Werthe von Λ' benutzt.

Wird nämlich für den letzten Theil des Ausdrucks:

$$\frac{1}{K(D)}\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c}-\log\frac{\sqrt{-D}}{c}\right)-\frac{2}{K(D)}\sum_{a,b,c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\log(1-e^{2nw_1\pi i})(1-e^{2nw_2\pi i}),$$

welcher den Werth von $\log \mathrm{M}(\sqrt{D},1)$ darstellt, die Reihenentwickelung substituirt, so resultirt die Gleichung:

$$K(D)\cdot\log\mathrm{M}(\sqrt{D},1)=\sum_{a,b,c}\left\{\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c}-\log\frac{\sqrt{-D}}{c}+4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}S_d(n)e^{\frac{-n\pi\sqrt{-D}}{c}}\cos\frac{nb\pi}{c}\right\},$$

in welcher $S_d(n)$ die Summe der Divisoren von n bedeutet. Es stellt also, wenn zur Abkürzung:

$$\Phi(D_0Q^2)=\frac{1}{K(D_0Q^2)}\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi Q\sqrt{-D}}{6c}-\log\frac{-D}{c}\right)+\mathrm{Z}(D_0,Q)$$

$$\Psi(D_0Q^2)=\frac{4}{K(D_0Q^2)}\sum_{a,b,c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}S_d(n)e^{\frac{-n\pi\sqrt{-D}}{c}}\cos\frac{nb\pi}{c}$$

gesetzt wird, das Aggregat:

$$\Phi(D_0Q^2)+\Psi(D_0Q^2)$$

jenen Ausdruck dar, welcher gemäss der Gleichung (29) für alle Zahlen Q einen und denselben Werth hat, und die hiernach für zwei beliebige ganze Zahlen Q, $\mathfrak{Q}$ geltende Formel:

$$\Phi(D_0Q^2)+\Psi(D_0Q^2)=\Phi(D_0\mathfrak{Q}^2)+\Psi(D_0\mathfrak{Q}^2)$$

liefert offenbar eine unendliche Reihe von Relationen zwischen Zahlenausdrücken, die aus ganz verschiedenen Elementen gebildet sind.

Um nun den Charakter dieser Relationen deutlicher hervortreten zu lassen, will ich angenäherte Werthe von $\Psi(D_0 Q^2)$ entwickeln.

Zu diesem Zweck bemerke ich zuvörderst, dass:

$$S_d(n) < n^2$$

ist. Denn wenn n als Product von Primzahlpotenzen in der Form:

$$n = p_1^{h_1} p_2^{h_2} p_3^{h_3} \dots$$

dargestellt ist, so wird:

$$S_d(n) = \prod_{p,h} \frac{p^{h+1}-1}{p-1},$$

und da:

$$p^{2h} - \frac{p^{h+1}-1}{p-1} = \frac{p^h-1}{p-1}(p^{h+1}-p^h-1) > 0$$

ist, so zeigt sich, dass in der That:

$$S_d(n) < \prod_{p,h} p^{2h} \text{ also } S_d(n) < n^2$$

sein muss. Hiernach ergiebt sich die Ungleichheit:

$$\left| \sum_{n=k}^{n=\infty} \frac{1}{n} S_d(n)\, e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} \right| < \sum_{n=k}^{n=\infty} n e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}}.$$

Nun ist offenbar für einen positiven echten Bruch x:

$$\sum_{n=k}^{n=\infty} n x^n < k x^k \sum_{n=k}^{n=\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{n-k} x^{n-k} = \frac{k^2 x^k}{k-(k+1)x},$$

und wenn $x < e^{-\pi\sqrt{3}} < 0.00433343$ ist:

$$\sum_{n=k}^{n=\infty} n x^n < 1.01 \cdot k x^k.$$

Es findet daher die Ungleichheit:

$$\left| \sum_{n=k}^{n=\infty} \frac{1}{n} S_d(n)\, e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} \right| < 1.01 \cdot k e^{-\frac{k\pi\sqrt{-D}}{c}}$$

statt, sobald in den Ausdrücken von $\Phi(D_0 Q^2)$, $\Psi(D_0 Q^2)$ nur reducirte Formen (a, b, c), d. h. solche genommen werden, für welche:

$$|b| \leqq c \leqq a \text{ und folglich } \frac{\pi\sqrt{-D}}{c} \geqq \pi\sqrt{3}$$

ist. Dies vorausgesetzt, wird also $\Psi(D_0 Q^2)$ gleich:

$$\frac{4}{K(D_0 Q^2)} \sum_{a,b,c} \sum_{n=1}^{n=k-1} \frac{1}{n} S_d(n)\, e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} + \varepsilon \frac{4.04 \cdot k}{K(D_0 Q^2)} \sum_{a,b,c} e^{-\frac{k\pi\sqrt{-D}}{c}},$$

wo ε zwischen ± 1 liegt, und man kann nun entweder für jeden bestimmten Werth von D die Zahl k so gross wählen, dass der mit ε multiplicirte Werth vernachlässigt werden kann, oder man kann von vorn herein k so gross annehmen, dass diese Vernachlässigung für jeden Werth von D bei den vorgeschriebenen Genauigkeitsgrenzen statthaft erscheint. Da nämlich für die reducirten Formen stets:

$$e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}} < e^{-\pi\sqrt{3}}$$

ist, so kann der Werth des mit ε multiplicirten Ausdrucks für $k = 3$ nur Einheiten der sechsten Decimale und für $k = 4$ sogar nur Einheiten der neunten Decimale betragen.

Wählt man $k = 3$, so wird:

$$\Psi(D_0 Q^2) = \frac{1}{K(D_0 Q^2)} \sum_{a,b,c} \left(4e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{b\pi}{c} + 6e^{-\frac{2\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{2b\pi}{c} + \varepsilon\cdot 12.12 e^{-\frac{3\pi\sqrt{-D}}{c}}\right),$$

für $k = 2$ dagegen:

$$\Psi(D_0 Q^2) = \frac{1}{K(D_0 Q^2)} \sum_{a,b,c} \left(4e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{b\pi}{c} + \varepsilon\cdot 8.08 e^{-\frac{2\pi\sqrt{-D}}{c}}\right),$$

und endlich für $k = 1$:

$$\Psi(D_0 Q^2) = \frac{\varepsilon\cdot 4.04}{K(D_0 Q^2)} \sum_{a,b,c} e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}}.$$

Man kann aber hier den Factor 4.04 bei genauerer Discussion der bezüglichen Ungleichheiten noch bis auf etwa 4.026 verkleinern. Dann ist freilich der Werth dieses Factors immer noch um 0.026 grösser als der im art. XVII angewendete. Doch hat der Unterschied auf die dort entwickelten Resultate keinen anderen Einfluss, als dass die Genauigkeitsgrenzen der Zahlenangaben ein wenig modificirt werden. Auch a. a. O. würde übrigens statt des kleineren Factors 4 der Factor 4.026 ermittelt worden sein, wenn, wie es geschehen musste, für den absoluten Werth:

$$|\log(1 + Re^{\varphi i})(1 + Re^{\psi i})|$$

die Grenze $|2\log(1 - R)|$, die derselbe wirklich erreichen kann, berücksichtigt worden wäre.

Bei der Beschränkung auf angenäherte Werthe von $\Psi(D_0 Q^2)$ lässt sich nun der Inhalt der Gleichungen (29) oder (30) dahin formuliren, dass die zwischen den beiden Werthen des Ausdrucks:

$$\Phi(D_0 Q^2) + \frac{4}{K(D_0 Q^2)} \sum_{n=1}^{n=k-1} \frac{1}{n} S_d(n) \cdot e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} \pm \frac{4.04\cdot k}{K(D_0 Q^2)} \sum_{a,b,c} e^{-\frac{k\pi\sqrt{-D}}{c}}$$

liegenden Intervalle für alle verschiedenen ganzen Zahlen Q einen gemeinschaftlichen Theil haben müssen.

§. 7.

Um die vorstehenden Ausführungen an einigen Zahlenbeispielen zu erläutern, nehme ich zuerst $D_0 = -3$. Dann ist für $Q=1$, $Q=2$ und $Q=3$ nur je eine reducirte Form vorhanden:

$$(1, 1, 1), \ (3, 0, 1), \ (7, 1, 1),$$

und für $Q = 1$ wird:

$$\Phi(-3) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \log 3 = -0.19171229\ldots,$$

$$\Psi(-3) = -4e^{-\pi\sqrt{3}} + 6e^{-2\pi\sqrt{3}} + \ldots = -0.017222105\ldots;$$

also ist mit einer Unsicherheit von Einheiten in der sechsten Decimale:

$$\phi(-3) + \psi(-3) \text{ annähernd } = -0.208933.$$

Für $Q = 2$ wird:

$$\Phi(-12) = \frac{\pi\sqrt{12}}{6} - \log 12 + \frac{2\log 2}{3} = -0.20900865\ldots,$$

$$\Psi(-12) = 4e^{-2\pi\sqrt{3}} + \ldots = 0.000075,$$

also:

$$\phi(-12) + \psi(-12) \text{ annähernd } = -0.208933.$$

Für $Q = 3$ wird:

$$\Phi(-27) = \frac{\pi\sqrt{27}}{6} - \log 27 + \frac{\log 3}{3} = -0.208933\ldots;$$

$\Psi(-27)$ ist auf die ersten 6 Decimalen ohne Einfluss.

Die drei ganz verschieden zusammengesetzten Ausdrücke:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \log 3 - 4e^{-\pi\sqrt{3}} + 6e^{-2\pi\sqrt{3}},$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 3 - \frac{4}{3}\log 2 + 4e^{-2\pi\sqrt{3}},$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{3}\log 3,$$

haben also einen annähernd gleichen, in den ersten 5 Decimalen sicher übereinstimmenden Werth, und es lassen sich daraus offenbar auch angenäherte Gleichungen zwischen π, $e^{-\pi\sqrt{3}}$, $\log 2$, $\log 3$ ableiten. So erhält man z. B. das Resultat, dass

$$-x^2 - 2x + \frac{4}{3}\log 2 - \frac{5}{6}\log 3 \text{ annähernd } = 0,$$

nämlich positiv und kleiner als 0.0000004 ist, wenn $x = e^{-\pi\sqrt{3}}$ gesetzt wird.

Ich nehme jetzt zweitens $D_0 = -4$ und dann $Q = 1$, $Q = 5$ und $Q = 13$. Die reducirten Formen sind

für $Q = 1$, also $D = -4$: $(1, 0, 1)$,
für $Q = 5$, $D = -100$: $(25, 0, 1)$, $(13, 2, 2)$,
für $Q = 13$, $D = -4 \cdot 13^2$:
$(169, 0, 1)$, $(85, 2, 2)$, $(34, \pm 2, 5)$, $(17, \pm 2, 10)$.

Es wird demnach für $Q = 1$:

$$\Phi(-4) = \frac{\pi\sqrt{4}}{6} - \log 4 = -0.339097\ldots,$$

$$\Psi(-4) = 4e^{-2\pi} + 6e^{-4\pi} = 0.0074907,$$

also:

$$\Phi(-4) + \Psi(-4) \text{ annähernd } = -0.331606.$$

Für $Q = 5$ wird:

$$\Phi(-100) = \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 - \log 100 = -0.33160627\ldots;$$

$\Psi(-100)$ ist auf die ersten 6 Decimalen ohne Einfluss.

Für $Q = 13$ wird:

$$\Phi(-4 \cdot 13^2) = \frac{91}{60}\pi + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{3}{2}\log 2 - 2\log 13 = -0.3319120\ldots,$$

$$\Psi(-4 \cdot 13^2) = \frac{4}{3}e^{-2,6\cdot\pi}\cos\frac{\pi}{5} + \ldots = 0.000306\ldots,$$

wobei zu bemerken ist, dass die übrigen Glieder des Ausdrucks von $\Psi(-4 \cdot 13^2)$ weggelassen sind, weil sie auf die ersten 6 Decimalen keinen Einfluss haben. Es ist daher:

$$\Phi(-4 \cdot 13^2) + \Psi(-4 \cdot 13^2) \text{ annähernd } = -0.331606,$$

und die Werthe der drei Ausdrücke:

$$\frac{\pi}{3} - 2\log 2 + 4e^{-2\pi} + 6e^{-4\pi},$$

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{3}{2}\log 2 - 2\log 5,$$

$$\frac{91\pi}{60} - \frac{3}{2}\log 2 + \frac{2}{3}\log 5 - 2\log 13 + \frac{4}{3}e^{-2,6\cdot\pi}\cos\frac{\pi}{5},$$

stimmen also in den ersten 6 Decimalen mit einander überein.

Endlich nehme ich $D_0 = -7$ und dann $Q = 1$, $Q = 2$, $Q = 3$. Die reducirten Formen sind:

für $Q = 1$ also $D = -7$: $(2, 1, 1)$;
für $Q = 2$ also $D = -28$: $(7, 0, 1)$,
für $Q = 3$ also $D = -63$: $(16, 1, 1)$, $(8, \pm 1, 2)$, $(4, 1, 4)$.

Es wird demnach für $Q = 1$:

$$\Phi(-7) = \frac{\pi\sqrt{7}}{6} - \log 7 = -0.560598\ldots,$$

$$\Psi(-7) = -4e^{-\pi\sqrt{7}} + \ldots = -0.000982\ldots,$$

also:

$$\Phi(-7) + \Psi(-7) \text{ annähernd} = 0.561580\ldots.$$

Für $Q = 2$ wird:

$$\Phi(-28) = \frac{\pi\sqrt{7}}{3} - \log 28 = 0.561580\ldots,$$

und $\Psi(-28)$ ist auf die ersten 6 Decimalen ohne Einfluss.

Für $Q = 3$ wird:

$$\Phi(-63) = \frac{9\sqrt{7}}{32}\pi + \log 2 - \frac{3}{2}\log 3 - \log 7 = -0.5629679\ldots,$$

$$\Psi(-63) = e^{\frac{-3\pi\sqrt{7}}{4}} \cos\frac{1}{4}\pi = 0.0013872\ldots,$$

also:

$$\Phi(-63) + \Psi(-63) = 0.5615807\ldots,$$

und die Werthe der drei Ausdrücke:

$$\frac{\pi\sqrt{7}}{6} - \log 7 - 4e^{-\pi\sqrt{7}},$$

$$\frac{\pi\sqrt{7}}{3} - \log 7 - \log 4,$$

$$\frac{9\pi\sqrt{7}}{32} - \log 7 + \log 2 - 3\log\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-3\pi\sqrt{7}}{4}},$$

stimmen daher in den ersten 6 Decimalen mit einander überein.

Aus der näherungsweisen Übereinstimmung der beiden ersten Ausdrücke folgt, dass die Gleichung:

$$\frac{1}{24}x + e^{-x} = \log\sqrt{2}$$

näherungsweise durch den Werth $x = \pi\sqrt{7}$ befriedigt wird; aus der absoluten Übereinstimmung der beiden Ausdrücke:

$$\Phi(-7) + \Psi(-7),\ \Phi(-28) + \Psi(-28)$$

ergiebt sich für $x = \pi\sqrt{7}$ die Relation:

$$\frac{1}{24}x + \log\prod_{n=0}^{n=\infty}(1 - e^{-(2n+1)x}) = \log\sqrt{2},$$

aus welcher bei Anwendung der Formel (4) im art. 36 von JACOBI's *Fundamenta* unmittelbar hervorgeht, dass für $\frac{K'}{K} = \sqrt{7}$:

$$16xx' = 1\,,\ \text{also}\ x = \frac{3+\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$$

wird. Dabei ist zu bemerken, dass dieses bekannte specielle Resultat, ebenso wie das in der Gleichung (29) enthaltene allgemeine, der Theorie der Transformation der singulären elliptischen Functionen angehört.

(Fortsetzung folgt.)

Theorie der pendelartigen Schwingungen.

Von Dr. M. Thiesen
in Sèvres.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 14. März [s. oben S. 159.])

1. Die nachfolgende Theorie der pendelartigen Schwingungen, zu deren Entwickelung mich das Studium der Theorie der Waage veranlasst hat, ist einer sehr ausgedehnten Anwendung fähig. Von ähnlichen Untersuchungen, wie sie u. A. von Bessel[1], Chwolson[2], Schering[3], von Oppolzer[4] ausgeführt wurden, unterscheidet sich dieselbe durch ihre grössere Allgemeinheit, vor Allem aber dadurch, dass die Zurückführung der gestörten auf die normale Bewegung durch Verbesserung der beiden Elemente Zeit und Amplitude erfolgt, und dass die Beziehung zwischen den beiden Verbesserungen so gewählt ist, dass sich die Verbesserung auch noch auf Glieder zweiter Ordnung erstreckt. Dadurch wird es möglich, dem Resultate bei grosser Strenge eine sehr einfache Form zu geben. Die erreichte Näherung mag durch den Umstand gekennzeichnet werden, dass, falls wie beim gewöhnlichen Pendel die Hauptkraft dem Sinus des Ausschlagswinkels und nicht, wie hier angenommen wird, dem Ausschlagswinkel selbst proportional ist, die unberücksichtigt bleibende Kraft der neunten Potenz des Ausschlagswinkels proportional wird. Als normal wird, wie es der Natur entspricht, die gedämpfte Pendelschwingung angesehen.

2. Sei p ein Winkel, welcher die Lage eines schwingenden Körpers bestimmt, zur Zeit t; seien λ und α als Constanten, Γ als

---

[1] Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels. Abh. d. Berl. Akad. f. 1826, S. 100—124, 1829.

[2] Chwolson, über die Dämpfung von Schwingungen bei grössern Amplituden, und: Allgemeine Theorie der magnetischen Dämpfer. Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. (7) 26, n. 14, 1879 et (7) 28, n. 3, 1880.

[3] Schering, allgemeine Theorie der Dämpfung, welche ein Multiplicator auf einen Magnet ausübt. Wied. Ann. 9, S. 287 u. 452, 1880.

[4] von Oppolzer, Beitrag zur Ermittelung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen. Wien. Ber. II Abth. 86. S. 713, 1882.

Function von t, und X als Function von p, $\frac{dp}{dt}$ und t gegeben. Die Bewegung des Körpers, welche wir eine pendelartige nennen, sei durch die folgende Differentialgleichung definirt:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 2\lambda\frac{dp}{dt} + \alpha^2 p = \Gamma + X. \tag{1}$$

In Bezug auf X machen wir ferner die Voraussetzung, dass dasselbe nebst seinen Differentialquotienten als kleine Grösse erster Ordnung angesehen werden könne. Wir stellen uns die Aufgabe, die Differentialgleichung (1) unter Vernachlässigung der Grössen dritter Ordnung zu integriren.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$p = \phi + \eta \tag{2}$$

$$t = \tau + \varepsilon \tag{3}$$

und betrachten η und ε nebst ihren Differentialquotienten als kleine Grössen von der Ordnung von X. Wir wählen τ als unabhängige Variable und bezeichnen die Differentialquotienten nach dieser Grösse durch Indices. Dann wird, abgesehen von Gliedern dritter Ordnung:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\phi' + \eta'}{1 + \varepsilon'} = \phi' + (\eta' - \phi'\varepsilon') + \varepsilon'(\phi'\varepsilon' - \eta') \tag{4}$$

$$\frac{d^2p}{dt} = \phi'' + (\eta'' - \phi'\varepsilon'' - 2\phi''\varepsilon') + (3\phi'\varepsilon'\varepsilon'' + 3\phi''\varepsilon'\varepsilon' - \eta'\varepsilon'' - 2\varepsilon'\eta''). \tag{5}$$

Ferner ergibt die Entwickelung nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze, wenn eine dem Functionszeichen beigefügte o andeutet, dass die Argumente p, $\frac{dp}{dt}$, t durch ϕ, ϕ', τ zu ersetzen sind:

$$X = \quad X_0 + \left(\eta\frac{\partial X_0}{\partial\phi} + (\eta' - \phi'\varepsilon')\frac{\partial X_0}{\partial\phi'} + \varepsilon\frac{\partial X_0}{\partial\tau}\right) \tag{6}$$

$$\Gamma = \Gamma_0 + \varepsilon\Gamma_0' + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\Gamma_0'. \tag{7}$$

Die durch die Gleichungen (2), (4), (6), (7) gegebenen Entwickelungen führen wir in (1) ein und setzen die Glieder der verschiedenen Ordnungen für sich gleich Null. Dann geben zunächst die endlichen Glieder:

$$\phi'' + 2\lambda\phi' + \alpha^2\phi = \Gamma_0. \tag{8}$$

Die Glieder erster Ordnung geben die Gleichung:

$$\eta'' - \phi'\varepsilon'' - 2\phi''\varepsilon' + 2\lambda(\eta' - \phi'\varepsilon') + \alpha^2\eta = X_0 + \varepsilon\Gamma_0'.$$

Vereinfachen wir dieselbe dadurch, dass wir Γ'_0 mittels (8) eliminiren und dass wir die abgekürzte Bezeichnung einführen:

$$(9) \qquad \psi = \eta - \varepsilon\phi',$$

so ergibt sich:

$$(10) \qquad \psi'' + 2\lambda\psi' + \alpha^2\psi = X_0.$$

Endlich geben die Glieder zweiter Ordnung:

$$3\phi'\varepsilon'\varepsilon'' + 3\phi''\varepsilon'\varepsilon' - \eta'\varepsilon'' - 2\varepsilon'\eta'' + 2\lambda\varepsilon'(\varepsilon'\phi' - \eta')$$
$$= \eta\frac{\partial X_0}{\partial\phi} + (\eta' - \phi'\varepsilon')\frac{\partial X_0}{\partial\phi'} + \varepsilon\frac{\partial X_0}{\partial\tau} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\Gamma''_0.$$

Die drei ersten Glieder der rechten Seite können wegen der Identität:

$$X'_0 = \phi'\frac{\partial X_0}{\partial\phi} + \phi''\frac{\partial X_0}{\partial\phi'} + \frac{\partial X_0}{\partial\tau}$$

gleich

$$-\psi\frac{\partial X_0}{\partial\phi} - \psi'\frac{\partial X_0}{\partial\phi'} - \varepsilon x'_0$$

gesetzt werden. Eliminirt man jetzt X'_0 durch (10) und Γ''_0 durch (8) und führt man zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$(11) \qquad \chi = -\tfrac{1}{2}\phi''\varepsilon^2 - \varepsilon\psi'$$

$$(12) \qquad Y_0 = \psi\frac{\partial X_0}{\partial\phi} + \psi'\frac{\partial X_0}{\partial\phi'},$$

so nimmt die von den Gliedern zweiter Ordnung gelieferte Gleichung die Form an:

$$(13) \qquad \chi'' + 2\lambda\chi + \alpha^2\chi = Y_0.$$

Die drei ganz gleichgebauten linearen Differentialgleichungen (8), (10), (13), deren rechte Seiten als gegebene Functionen von τ zu betrachten sind, enthalten nun die Lösung des Problems. Hat man dieselben der Reihe nach integrirt, d. h. ϕ, ψ, χ als Functionen von τ gefunden, so ergibt die quadratische Gleichung (11) auch ε, die Substitution dieses Werthes in (9) η und damit durch die Gleichungen (2) und (3) die Amplitude p und die Zeit t als Function von τ.

Behufs Darstellung der Integrale der Differentialgleichungen führen wir ein:

$$(14) \qquad u = Ae^{-\lambda\tau}\sin x$$

$$(15) \qquad x = \rho(\tau - t)$$

$$(16) \qquad \rho = \alpha\cos\beta$$

$$(17) \qquad \lambda = \alpha\sin\beta,$$

wo A und t willkürliche Constanten sind. Dann ist u die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$u'' + 2\lambda u' + \alpha^2 u = 0. \tag{18}$$

Mit Hülfe dieser Grösse können jetzt die Integrale der Differentialgleichungen (8), (10), (13) hingeschrieben werden. Es ist:

$$A^2\rho^2\phi = u\int \Gamma_0 u' e^{2\lambda\tau} d\tau - u'\int \Gamma_0 u e^{2\lambda\tau} d\tau \tag{19}$$

$$A^2\rho^2\psi = u\int X_0 u' e^{2\lambda\tau} d\tau - u'\int X_0 u e^{2\lambda\tau} d\tau \tag{20}$$

$$A^2\rho^2\chi = u\int Y_0 u' e^{2\lambda\tau} d\tau - u'\int Y_0 u e^{2\lambda\tau} d\tau. \tag{21}$$

Sind die angedeuteten Quadraturen ausgeführt, so ergiebt sich schliesslich:

$$t = \tau + \frac{1}{\phi''}(R - \psi') \tag{22}$$

$$p = \phi + \psi + \frac{\phi'}{\psi'}(R - \psi') \tag{23}$$

$$R = \sqrt{\psi'\psi' - 2\phi''\chi}. \tag{24}$$

Beiläufig mag bemerkt werden, dass das Auftreten der Quadratwurzel R es erklärt, woher Hr. Chwolson[1] das hier in zweiter Näherung gelöste Problem schliesslich selbst in erster Näherung unlösbar finden musste. In der That setzt Hr. Chwolson bei seinen Entwickelungen voraus, dass der Einfluss der störenden Kräfte auf die Zeiten und Amplituden in erster Näherung ein linearer sei; diess ist aber, wie sich ergeben hat, im allgemeinen keineswegs der Fall.

3. Bei der Anwendung der Theorie sind vor allem zwei Grössen in's Auge zu fassen, welche meistens einer scharfen experimentellen Bestimmung fähig sind. Diess sind die grössten Elongationen und die Zeiten des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage oder vielmehr die Differenzen dieser Grössen. Wir wollen daher die allgemeinen Ausdrücke für diese Grössen ableiten, insbesondere unter der Voraussetzung, dass die Kräfte in erster Näherung nicht direct von der Zeit abhängig sind.

Der Augenblick der Umkehr der Schwingungsrichtung ist durch die Gleichung bestimmt:

$$0 = p' = \phi' + \eta'. \tag{25}$$

Wollte man hieraus die Zeit der Umkehr mit der Genauigkeit ermitteln, welche die Theorie gestattet, so müsste man den Ausdruck

---

[1] Chwolson, Mém. de l'Ac. de St. Pét. (7) 28, Nr. 3, p. 120, unter Berichtigungen.

bis auf Glieder zweiter Ordnung entwickeln. Diess ist leicht ausführbar aber ohne Interesse, da in diesem Falle ein Fehler in der Bestimmung von τ nur mit seinem Quadrat in die Bestimmung der Amplitude eingeht. In dem Ausdrucke für η':

$$\eta' = \psi' + \left(1 - \frac{\phi'\phi'''}{\phi''\phi''}\right)(R - \psi') + \frac{\phi'}{\phi''}(R' - \psi'')$$

können daher die in ϕ' multiplicirten Glieder (da ϕ' in diesem Falle selbst von der ersten Ordnung ist) fortgelassen werden, und man erhält $\eta' = R$ und zur Bestimmung von τ:

$$(26) \qquad 0 = \phi' + R.$$

Sei nun $\tau_{n+\frac{1}{2}}$ der Werth von τ, für welchen ϕ' verschwindet, und bezeichne der Index $(n + \frac{1}{2})$ Functionen, in denen das Argument τ durch $\tau_{n+\frac{1}{2}}$ ersetzt ist, so folgt durch Entwickelung von (26) nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze:

$$(27) \qquad \tau = \tau_{n+\frac{1}{2}} - \frac{R_{n+\frac{1}{2}}}{\phi''_{n+\frac{1}{2}}}.$$

Den hiermit gewonnenen Werth für das τ, welches der grössten Elongation entspricht, führen wir in (23) ein, entwickeln die rechte Seite nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze, und ersetzen schliesslich R^2 mittels (24) durch seinen Werth. Dann ergibt sich

$$(28) \qquad p = \phi_{n+\frac{1}{2}} + \psi_{n+\frac{1}{2}} + \chi_{n+\frac{1}{2}} - \frac{\left(\psi'_{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2\phi''_{n+\frac{1}{2}}}$$

als Werth der gesuchten **grössten Elongation**.

Ist insbesondere $\Gamma = 0$, sind also die auf das Pendel wirkenden Kräfte, soweit sie als endlich angesehen werden, nicht direct von der Zeit abhängig, so ist $\phi = u$ zu setzen. Wir bemerken, dass die Differentialquotienten der Grösse u dieselbe Form haben wie das durch (14) definirte u selbst, nur tritt durch jede Differentiation der Factor α hinzu, und das Argument unter dem Sinuszeichen wird um $\frac{\pi}{2} + \beta$ vermehrt. Es ist also insbesondere:

$$(29) \qquad \begin{aligned} u' &= A\alpha\, e^{-\lambda\tau} \cos(x + \beta) \\ u'' &= -A\alpha^2 e^{-\lambda\tau} \sin(x + 2\beta) \\ u''' &= -A\alpha^3 e^{-\lambda\tau} \cos(x + 3\beta) \end{aligned}$$

u. s. f.

Der Werth $\tau_{n+\frac{1}{2}}$, für welchen ϕ' verschwindet, ist also in dem speciellen Falle gegeben durch:

$$x_{n+\frac{1}{2}} + \beta = \frac{2n+1}{2}\pi;$$

woraus folgt

$$(30) \qquad \tau_{n+\frac{1}{2}} = t + \frac{1}{\rho}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - \beta\right)$$

$$(31) \qquad u_{n+\frac{1}{2}} = (-1)^n A \cos\beta\, e^{-\lambda\tau_{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ferner nimmt der durch (28) gegebene Werth für die grösste Elongation die Form an:

$$(32) \qquad p = u_{n+\frac{1}{2}} + \psi_{n+\frac{1}{2}} + \chi_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\left(\psi'_{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2\alpha^2 u_{n+\frac{1}{2}}}.$$

Bei Berechnung der Zeit des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage könnte man von verschiedenen Definitionen der Gleichgewichtslage ausgehen. Wir bestimmen dieselbe dadurch, dass für sie

$$(33) \qquad \phi'' = 0$$

werden soll. Der Werth von τ, welcher diese Gleichung erfüllt, sei τ_n; ferner bezeichne der Index (n) Functionen, in denen τ durch τ_n ersetzt ist. Führt man nun diesen Werth in (22) ein, so erscheint der Ausdruck für t in unbestimmter Form; doch findet man sofort durch Entwickelung der Wurzel oder durch Zurückgehen auf die jetzt linear gewordene Gleichung (11):

$$(34) \qquad t = \tau_n - \frac{\chi_n}{\psi'_n}$$

als Zeit für den Durchgang durch die Gleichgewichtslage.

Ist insbesondere $\Gamma = 0$ also $\phi = u$, so wird die Gleichung (33) erfüllt durch:

$$x_n + 2\beta = n\pi;$$

woraus folgt:

$$(35) \qquad \tau_n = t + \frac{1}{\rho}(n\pi - 2\beta).$$

4. Um die Theorie auf einen gegebenen Fall praktisch anzuwenden, bedarf es noch der Ausführung der Quadraturen, welche mittels der Gleichungen (19), (20), (21) die Werthe von ϕ, ψ, χ bestimmen. Die Differentialquotienten dieser Grössen können entweder

dadurch gefunden werden, dass man die Grössen Γ_0, X_0, Y_0 durch ihre Differentialquotienten ersetzt, oder auch unter Beibehaltung derselben Integrale, wenn man bedenkt, dass z. B.

(36) $$A^2\rho^2\psi' = u'\int X_0 u' e^{2\lambda\tau} d\tau - u''\int X_0 u e^{2\lambda\tau} d\tau$$

wird, und dass die höheren Differentialquotienten durch (10) linear mittels ψ, ψ', X_0 nebst seinen Differentialquotienten ausgedrückt werden können.

Die Ausführung der Quadraturen hängt natürlich von der Form der Functionen Γ und X ab; doch gibt es einen besonders einfachen und zugleich wichtigen Fall, auf welchen wir noch näher eingehen. Lassen sich nämlich die Grössen Γ_0 und X_0 nach Potenzen von $e^{-\lambda\tau}$ und nach ganzen positiven Potenzen von ϕ und ϕ' entwickeln, so können alle vorkommenden Integrale auf die Form

(37) $$J^p_{m,n} = \int e^{-\lambda p\tau} u^m u'^n d\tau$$

zurückgeführt werden, wo m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, also auf Integrale, welche sich in endlicher Form ausführen lassen.

Zur Berechnung der $J^p_{m,n}$ kann die folgende Formel dienen, welche man durch Differentiation und Integration von $e^{-\lambda p\tau} u^m u'^n$ erhält:

(38) $$e^{-\lambda p\tau} u^m u'^n = mJ^p_{m-1,n+1} - n\alpha^2 J^p_{m+1,n-1} - (2n+p)\lambda J^p_{m,n}.$$

Stellt man diese Gleichung für alle Werthe von n auf, welche einem constanten

(39) $$s = m + n$$

entsprechen, so ergeben sich die $(s+1)$ Werthe der $J^p_{s-n,n}$ durch Auflösung des Systems von $(s+1)$ Gleichungen.

Eine andere Beziehung erhält man aus der identischen Gleichung:

(40) $$u'u' + 2\lambda uu' + \alpha^2 u^2 = A^2\rho^2 e^{-2\lambda\tau},$$

falls man dieselbe mit $e^{-\lambda p\tau} u^m u'^n d\tau$ multiplicirt und integrirt:

(41) $$J^p_{m,n+2} + 2\lambda J^p_{m+1,n+1} + \alpha^2 J^p_{m+2,n} = A^2\rho^2 J^{p+2}_{m,n}.$$

Durch Verbindung von (38) und (41) erhält man:

(42) $$sJ^p_{m-1,n+1} - p\lambda J^p_{m,n} = A^2\rho^2 nJ^{p+2}_{m-1,n-1} + e^{-\lambda p\tau} u^m u'^n;$$

(43) $$(2s+p)\lambda J^p_{m,n} + s\alpha^2 J^p_{m+1,n-1} = A^2\rho^2 mJ^{p+2}_{m-1,n-1} - e^{-\lambda p\tau} u^m u'^n;$$

und ferner, falls

(44) $$N^p_s = s^2\alpha^2 + p(2s+p)\lambda^2$$

gesetzt wird,

$$(45)\qquad N_s^p J_{m,n}^p = -e^{-\lambda p r}\{su' + (p+2s)\lambda u\}u^{m-1}u'^n + A^2\rho^2\{s(m-1)J_{m-2,n}^{p+2} - (p+2s)n\lambda J_{m-1,n-1}^{p+2};$$

$$(46)\qquad N_s^p J_{m-1,n+1}^p = e^{-\lambda p r}\{s\alpha^2 u - p\lambda u'\}u^{m-1}u'^n + A^2\rho^2\{p(m-1)\lambda J_{m-2,n}^{p+2} + sn\alpha^2 J_{m-1,n-1}^{p+2}.$$

Die beiden letzten Gleichungen können zur recurrirenden Berechnung der $J_{m,n}^p$ dienen, wenn man noch den aus (42) oder (43) folgenden Werth zufügt:

$$(47)\qquad J_{0,0}^p = -\frac{e^{-\lambda p r}}{\lambda p}.$$

Wir führen jetzt ein

$$(48)\qquad A^2\rho^2 U_{m,n}^p = uJ_{m,n+1}^{p-2} - u'J_{m+1,n}^{p-2},$$

wo also $\psi = U_{m,n}^p$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist.

$$(49)\qquad \psi'' + 2\lambda\psi' + \alpha^2\psi = e^{-\lambda p r}u^m u'^n.$$

Dann ergibt sich, wenn man in die rechte Seite von (48) die Ausdrücke (45) und (46) einführt, nachdem in denselben m durch $m+1$ und p durch $(p+1)$ ersetzt ist, und unter Berücksichtigung von (40):

$$(50)\qquad N_{s+1}^{p-2}U_{m,n}^p = (s+1)e^{-\lambda p r}u^m u'^n - m\{(2-p)\lambda u + (s+1)u'\}J_{m-1,n}^p + n\{(s+1)\alpha^2 u + (2s+p)\lambda u'\}J_{m,n-1}^p.$$

Man erhält ferner durch Differentiation von (49):

$$(51)\qquad (U_{m,n}^p)' = mU_{m-1,n+1}^p - (2n+p)\lambda U_{m,n}^p - n\alpha^2 U_{m+1,n-1}^p,$$

und demnach:

$$(52)\qquad (U_{m,n}^p)'' = m(m-1)U_{m-2,n+2}^p - 2m(2n+p+1)\lambda U_{m-1,n+1}^p + \{(2n+p)^2\lambda^2 - (2nm+m+n)\alpha^2\}U_{m,n}^p + 2n(2n+p-1)\alpha^2\lambda U_{m+1,n-1} + n(n-1)\alpha^4 U_{m+2,n-2}.$$

Führt man die durch (51) und (52) gegebenen Ausdrücke in (49) ein, so ergibt sich:

$$(53)\qquad e^{-\lambda p r}u^m u'^n = m(m-1)U_{m-2,n+2}^p - 2m(2n+p)\lambda U_{m-1,n+1}^p + \{(2n+p)(2n+p-2)\lambda^2 - (2mn+m+n-1)\alpha^2\}U_{m,n}^p + 2n(2n+p-2)\alpha^2\lambda U_{m+1,n-1} + n(n-1)\alpha^4 U_{m+2,n-2}.$$

Mittels dieser letzteren Gleichung können die $U_{m,n}^p$ direct durch Auflösung eines Systems von $m+n+1$ Gleichungen gefunden werden, ohne dass die Kenntniss der $J_{m,n}^p$ dazu nöthig wäre.

5. Behufs weiterer Erläuterung der Theorie mögen schliesslich die vorstehend gegebenen Formeln auf ein bestimmtes Beispiel angewandt werden. Wir nehmen an:

$$(54) \qquad \Gamma_0 = 0$$

$$(55) \qquad X_0 = \mp a_{02}\phi'^2 + a_{20}\phi^2 + a_{30}\phi^3.$$

Das doppelte Vorzeichen von a_{02} soll andeuten, dass dieser Coefficient negativ für ein positives ϕ' und positiv für ein negatives ϕ' angenommen werden soll.

Das Beispiel entspricht der Bewegung eines Pendels, auf welches der Luftwiderstand auch einen dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Einfluss hat, und auf welches überdiess, etwa in Folge seiner Aufhängung, Kräfte wirken, welche von der Amplitude des Pendels abhängen.

Die Differentialgleichung, durch welche in diesem Falle die Bewegung definirt wird, ist die Gleichung (1), falls darin $\Gamma = 0$ gesetzt und für X der durch (55) gegebene Ausdruck für X_0 eingeführt wird, nachdem darin ϕ und ϕ' durch p und $\frac{dp}{dt}$ ersetzt sind.

Da $\Gamma_0 = 0$, so fallen in unserm Beispiel die Differentialgleichungen (8) und (9) zusammen und es ist

$$(56) \qquad \phi = u$$

zu setzen, wo u die durch (14), (15), (16), (17) definirte Function von τ ist. Führt man diesen Werth in (55) ein, so erhält man als Integral der Differentialgleichung (10) mittels der durch (48) eingeführten Grössen:

$$(57) \qquad \psi = \mp a_{02}(U^0_{0,2} + C_n) + a_{20} U^0_{20} + a_{30} U^0_{30}.$$

Die Grösse C_n haben wir hier zugefügt, um dem Umstande Rechnung zu tragen, dass in unserm Beispiele X_0 für $\phi' = 0$ discontinuirlich ist, und dass daher ohne Einführung einer solchen mit n sich ändernden Grösse der Ausdruck für ψ nur für Werthe von τ giltig sein würde, die zwischen $\tau_{n-\frac{1}{2}}$ und $\tau_{n+\frac{1}{2}}$ gemäss der durch (30) gegebenen Bedeutung dieser Grössen liegen.

Wir berechnen jetzt das durch (12) definirte Y_0. Doch möge Alles vernachlässigt werden, was in vierte Potenzen von u oder u' multiplicirt ist. Es wird dann

$$Y_0 = \mp 2a_{02}\phi'\psi' + 2a_{20}\phi\psi,$$

oder vielmehr:

$$(58) \qquad Y_0 = 2a_{02}^2 u' U^{0\prime}_{0,2} \mp 2a_{02}a_{20}(u' U^{0\prime}_{2,0} + u U^0_{0,2}) + 2a_{20}^2 u U_{2,0}.$$

Nun erhält man leicht, etwa mittels (50), (45), (46), (51):

$$
(59)\quad
\begin{aligned}
N_3^{-2}U^0_{0,2} &= 3u'^2 + 8\lambda uu' + 6\alpha^2 u^2\\
N_3^{-2}U^0_{2,0} &= \frac{1}{\alpha^2}\Big\{6u'^2 + 16\lambda uu' + (3\alpha^2 + 8\lambda^2)u^2\Big\}\\
N_3^{-2}U^{0\prime}_{0,2} &= -4\lambda u'^2 + (6\alpha^2 - 16\lambda^2)\,uu' - 8\alpha^2\lambda u^2\\
N_3^{-2}U^{0\prime}_{2,0} &= -\frac{1}{\alpha^2}\Big\{8\lambda u'^2 + (6\alpha^2 + 16\lambda^2)uu' + 16\lambda\alpha^2 u^2\Big\}.
\end{aligned}
$$

Denkt man sich diese Werthe in (58) eingeführt, so erlaubt der jetzt bekannte Werth von Y_0 unmittelbar das Integral der Differentialgleichung (13) hinzuschreiben. Es wird, falls man wieder eine Constante D_n einführt, um der Discontinuität der Integrale Rechnung zu tragen:

$$
\begin{aligned}
(60)\quad N_3^{-2}\chi = &-4a_{02}^2\big\{2\lambda U^0_{0,3} - (3\alpha^2 - 8\lambda^2)U^0_{1,2} + 4\alpha^2\lambda U^0_{2,1}\big\}\\
&\pm\frac{2a_{02}a_{20}}{\alpha^2}\Big\{8\lambda U^0_{0,3} + (3\alpha^2 + 16\lambda^2)U^0_{1,2} + 8\alpha^2\lambda U^0_{2,1} - 6\alpha^4 U^0_{3,0} + D_n\Big\}\\
&+\frac{2a_{20}^2}{\alpha^2}\Big\{6U^0_{1,2} + 16\lambda U^0_{2,1} + (3\alpha^2 + 8\lambda^2)U^0_{3,0}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Führt man jetzt statt der U ihre durch die Gleichungen (50) oder (53) zu berechnenden Werthe ein, so erhält man χ als bekannte Function von τ. Schliesslich ergibt die Einführung von ϕ, ψ, χ in die Gleichungen (24), (22), (23) die Amplitude p und die Zeit t als Functionen der unabhängigen Variabeln τ.

Diese Rechnung soll nicht allgemein durchgeführt werden, sondern nur soweit es die Berechnung der grössten Elongationen und der Zeiten des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage erfordert. Ist zunächst $u' = 0$, so wird:

$$
(61)\quad
\left.
\begin{aligned}
N_4^{-2}U^0_{3,0} &= \left(11 + 12\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)\frac{u^3}{2}\\
N_4^{-2}U^0_{2,1} &= -(\alpha^2 + 6\lambda^2)\frac{u^3}{\lambda}\\
N_4^{-2}U^0_{1,2} &= \frac{9}{2}\alpha^2 u^3\\
N_4^{-2}U^0_{0,3} &= -\frac{3}{\lambda}\alpha^4 u^3
\end{aligned}
\right\}\ \text{für } u' = 0.
$$

Die Einführung dieser Werthe in (60) ergiebt:

$$
\begin{aligned}
(62)\qquad N_3^{-2}N_4^{-2}\chi = &\Big\{2\alpha^2(47\alpha^2 - 24\lambda^2)a_{02}^2 \mp (103\alpha^2 + 24\lambda^2)a_{02}a_{20}\\
&+\left(55\alpha^2 - 68\lambda^2 + 96\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)\frac{a_{20}^2}{\alpha^2}\Big\}u^3 \pm 2\,\frac{a_{02}a_{20}N_4^{-2}}{\alpha^2}\,D_n.
\end{aligned}
$$

Um die Grösse D_n zu bestimmen, wenden wir diese Gleichung auf den Werth $\tau = \tau_{n+\frac{1}{2}}$ an, in dem wir die entsprechende Elongation einmal als Ende der vorhergehenden und dann als Anfang der folgenden Schwingung betrachten. Subtrahirt man die beiden entsprechenden Ausdrücke von einander, so wird

$$(63) \qquad \frac{N_4^{-2}}{\alpha^2}(D_{n+1} + D_n) = (103\alpha^2 + 24\lambda^2)\, u^3_{n+\frac{1}{2}}\,.$$

Die Summation dieser Differenzengleichung ergibt, wenn $D_\infty = 0$ gesetzt wird:

$$(64) \qquad D_n = \frac{(103\alpha^2 + 24\lambda^2)\,\alpha^2}{16\alpha^2 - 12\lambda^2}\,\frac{u^3_{n+\frac{1}{2}}}{1 - e^{-3\frac{\lambda\pi}{\varrho}}}\,.$$

In ähnlicher Weise erhält man für C_n die Differenzengleichung:

$$(65) \qquad N_3^{-2}(C_n + C_{n+1}) + 12\alpha^2 u^2_{n+\frac{1}{2}} = 0$$

und daraus

$$(66) \qquad C_n = -\frac{12\alpha^2}{9\alpha^2 - 8\lambda^2}\,\frac{u^2_{n+\frac{1}{2}}}{1 + e^{-2\frac{\lambda\pi}{\varrho}}}\,.$$

Jetzt ist die Rechnung so weit geführt, dass der Werth der durch (28) gegebenen grössten Elongation hingeschrieben werden kann. Der Einfachheit wegen möge noch die bei praktischen Anwendungen wohl stets zutreffende Annahme gemacht werden, dass in dem Gliede dritter Ordnung λ^2 gegen α^2 vernachlässigt werden könne; es fällt dann auch, wie die Gleichungen (59) zeigen, das letzte Glied in (28) fort.

Bemerkt man noch, dass das Zeichen $(\mp)$ durch $(-1)^{n+1}$ ersetzt werden kann, da u' in dem zwischen $\tau_{n-\frac{1}{2}}$ und $\tau_{n+\frac{1}{2}}$ gelegenen Intervalle das Zeichen $(-1)^n$ hat, und wendet man die Gleichung (28) auf das Ende der entsprechenden Schwingung an, so wird schliesslich

$$(67) \qquad p = u_{n+\frac{1}{2}} + \left\{\frac{3\alpha^2 + 8\lambda^2}{9\alpha^2 - 8\lambda^2}\,\frac{a_{20}}{\alpha^2} + (-1)^n\,\frac{6\alpha^2 a_{02}}{9\alpha^2 - 8\lambda^2}\,\frac{1 - e^{-2\frac{\lambda\pi}{\varrho}}}{1 + e^{-2\frac{\lambda\pi}{\varrho}}}\right\} u^2_{n+\frac{1}{2}}$$
$$+ \left\{\frac{11}{32}a_{30} + \frac{47}{72}a^2_{02} + \frac{55}{144\alpha^4}a^2_{20} + (-1)^n\,\frac{103}{144}a_{02}\,a_{20}\,\frac{1 + e^{3\frac{\lambda\pi}{\varrho}}}{1 - e^{3\frac{\lambda\pi}{\varrho}}}\right\} u^3_{n+\frac{1}{2}}\,.$$

Um zweitens die Zeit des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage zu berechnen, setzen wir $u'' = 0$ und erhalten

$$
(68)\qquad \left.\begin{aligned}
N_4^{-2}U^0_{3,0} &= \frac{1}{\alpha^2\lambda}\left\{3-15\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+28\frac{\lambda^4}{\alpha^4}-48\frac{\lambda^6}{\alpha^6}\right\}u'^3\\
N_4^{-2}U^0_{2,1} &= \frac{1}{2\alpha^2}\left\{1-4\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+48\frac{\lambda^4}{\alpha^4}\right\}u'^3\\
N_4^{-2}U_{1,2} &= \frac{1}{\lambda}\left\{1-5\frac{\lambda^2}{\alpha^2}-12\frac{\lambda^4}{\alpha^4}\right\}u'^3\\
N_4^{-2}U_{0,3} &= \frac{1}{2}\left\{11+12\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right\}u'^3
\end{aligned}\right\}\text{ für } u''=0.
$$

Führt man diese Werthe in (60) ein und formt man den durch (64) gegebenen Werth von D_n durch die Bemerkung um, dass

$$u_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha}u'_n e^{-\lambda\frac{\pi+2\beta}{2\varrho}}$$

ist, so erhält man

$$
\begin{aligned}
(69)\quad N_3^{-2}N_4^{-2}\chi_n = \Bigg\{ & \frac{4\alpha^2 a_{02}^2}{\lambda}\left(3-36\frac{\lambda^2}{\alpha^2}-80\frac{\lambda^4}{\alpha^4}-192\frac{\lambda^6}{\alpha^6}\right)\\
&+\frac{2a_{20}^2}{\alpha^2\lambda}\left(15-43\frac{\lambda^2}{\alpha^2}-140\frac{\lambda^4}{\alpha^4}+464\frac{\lambda^6}{\alpha^6}-384\frac{\lambda^8}{\alpha^8}\right)\\
&+(-1)^{n+1}\frac{2a_{02}a_{20}}{\lambda}\left(15-139\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+252\frac{\lambda^4}{\alpha^4}-288\frac{\lambda^6}{\alpha^6}\right)\\
&+(-1)^n\frac{2a_{02}a_{20}}{\alpha}\left(103+24\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)\frac{e^{-3\lambda\frac{\pi+2\beta}{2\varrho}}}{1-e^{-3\frac{\lambda\pi}{\varrho}}}\Bigg\}u_n'^3.
\end{aligned}
$$

Der Werth von ψ'_n ergibt sich aus (57), (59) und (68), wenn man bemerkt, dass nach (51)

$$U^{0\prime}_{3,0} = 3U^0_{2,1}$$

ist, und wenn man wieder eine von n abhängige Constante einführt und dieselbe auf die schon angegebene Weise bestimmt:

$$
\begin{aligned}
(70)\quad N_3^{-2}N_4^{-2}\psi'_n = {} & 4\frac{\lambda}{\alpha^2}a_{20}N_4^{-2}\left(1-8\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)u_n'^2\\
&+\frac{3}{2\alpha^2}N_3^{-2}\left(1-4\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+48\frac{\lambda^4}{\alpha^4}\right)u_n'^3\\
&+(-1)^n\,16\lambda a_{02}N_4^{-2}\,\frac{1+e^{-2\frac{\lambda\pi}{\varrho}}-e^{-\lambda\frac{\pi+2\beta}{\varrho}}}{1+e^{-2\frac{\lambda\pi}{\varrho}}}\,u_n'^3.
\end{aligned}
$$

Führt man schliesslich die durch (69) und (70) gegebenen Werthe, welche sich meist bei der praktischen Anwendung sehr vereinfachen werden, in (34) ein, so erhält man die Zeit des $n$ten Durchgangs durch die Gleichgewichtslage in bekannten Grössen ausgedrückt.

Ausgegeben am 4. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.

XIX.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

4. April. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Diels las über zwei sibyllinische Orakel.

2. Hr. von Bezold legte vor eine Abhandlung des Hrn. Dr. A. Sieben in Lichterfelde: Experimentaluntersuchungen über elektrische Figuren auf lichtempfindlicher Platte.

Die Mittheilung erfolgt in einem der nächsten Berichte.

3. Hr. Kronecker trug vor: zur Theorie der elliptischen Functionen.

4. Hr. Tobler las über die Predigten des h. Bernhard in altfranzösischer Übertragung.

Die letzteren beiden Vorträge folgen in diesem Hefte.

Das correspondirende Mitglied der Königlichen Akademie Hr. Franz Cornelius Donders ist am 24. März in Utrecht gestorben.

Predigten des h. Bernhard in altfranzösischer Übertragung.

Von A. Tobler.

Unter den Handschriften der Meerman'schen Sammlung, die im März 1889 aus dem Besitze der Erben des Sir Thomas Phillipps durch Ankauf in den der Königlichen Bibliothek zu Berlin übergegangen ist, befinden sich zwar die nicht, um deren willen die Schätze von Middlehill und später Cheltenham bei den Romanisten vorzugsweise in Ansehn gestanden haben; ein paar Stücke des neuen Erwerbes aber[1] sind für die Geschichte von Sprache und Litteratur des mittelalterlichen Frankreichs doch auch von nicht geringer Bedeutung, und von dem einen soll hier in Kürze gehandelt werden. Die Handschrift, welche in dem neuerlich gedruckten Kataloge der Meerman'schen Handschriften mit 1925, in dem älteren der sämtlichen Handschriften von Middlehill mit 567/870 bezeichnet ist,[2] ist ein Buch von 214 nicht numerierten Pergamentblättern, deren Höhe beinahe 24 Centimeter und deren Breite $15^1/_2$ Centimeter beträgt. Die Blätter müssen ursprünglich etwas breiter und höher gewesen sein; denn auf den immer noch ansehnlich breiten Rändern ist, was einst gleichzeitig mit der Ausführung der Textesniederschrift darauf geschrieben worden, ein paarmal nur noch in seinem inneren Teile vorhanden, während, was weiter aufsen oder unten stand, einer Beschneidung zum Opfer fiel. Diese Randeinträge sind übrigens von keinem Belange für uns; sie

[1] Dazu rechne ich auch die freilich späte provenzalische Liederhandschrift mit noch jüngerem Anhang von Sprichwörtern, von der man durch Constans (Revue des langues romanes T. XIX 261) seit 1881 einige Kenntnis hatte; s. auch Romania X 618.

[2] Die Nummer 870 ist die der Meerman'schen Sammlung. Im vierten Bande der Bibliotheca Meermanniana sive catalogus librorum impreſſorum et codicum manuſcriptorum, quos maximam partem collegerunt viri nobiliſſimi Gerardus et Joannes Meerman; morte dereliquit Joannes Meerman, der die Handschriften aufzählt, findet man in der That auf S. 150 unter 870: Sermons en vieux Français, dont l'index se voit à la tête du volume. Sur velin, de 198 (unrichtig) feuillets, écriture de la fin du XIII[e] ſiècle. vel. cordé. Damit ist nur wiederholt, was in dem Catalogus manuſcriptorum codicum Collegii Claromontani . . Pariſienſis, Paris 1764, S. 296 unter DCCLXXVI zu lesen steht, nur dafs hier die Anfangszeilen der ersten Predigt abgedruckt sind.

sind einmal überhaupt nicht zahlreich, und dann bestehen sie entweder aus schwarzen Einzelbuchstaben oder Überschriften, die nachmals im Texte farbig ausgeführt wurden, oder aus Zahlen, die den in Worten gegebenen Distinktionen des Textes entsprechen (so Blatt 201 v, 202 r), oder aus kurzen Hinweisen in Worten (so Blatt 70 v, 71 r), oder es sind Kustoden, wie sie jetzt nur noch auf den Rückseiten der Blätter 40, 120, 128, 152, 160, sei es ganz, sei es teilweise sich finden, ursprünglich wohl auf jedem achten Blatte standen. Nur das letzte Heft scheint blofs sechs Blätter gehabt zu haben; von dem letzten derselben ist die obere Hälfte weggeschnitten; es ist übrigens wie die Rückseite des vorletzten völlig leer. Der Einband des Buches ist ein einfacher, derber, weifser Pergamentband, der aus dem Anfang des vorigen Jahrhunderts stammen mag. Von den Lederriemen und Knöpfen zum Schliefsen ist zur Zeit blofs noch ein Riemen vorhanden. Auf dem Rücken liest man in Goldpressung *Sermones gallici*; aufgeklebt ist eine ältere Bezeichnung M L (oder D? der Buchstabe ist nur im unteren Teile vorhanden) 73, und eine jüngere 870. Das Papierblatt zwischen dem vorderen Deckel und dem ersten Pergamentblatt enthält auf der Vorderseite von oben nach unten an einander gereiht und auf der Rückseite ebenso sich fortsetzend unter der Überschrift *Titres des Sermons* die Aufschriften der Predigten, wie sie im Buche selbst gegeben sind[1], jedoch in neufranzösischer Fassung: *L'annonciation. Sur le même sujet. Sur le même sujet. Le Dimanche des Rameaux* u. s. w. Daneben ist mittels eines Stempels ein auf der linken Hintertatze aufrecht stehender Löwe mit der Unterschrift *Sir S. P. Middle Hill* in schwarzer Farbe abgedruckt. Das erste Pergamentblatt trägt links oben die Nummer 198, rechts oben in Schrift des 17. Jahrhunderts *Collegij Parifienfis Societ. Jefu* und links am Rande von unten nach oben: *Paraphé au desir de L'arrest du 5. Juillet 1763 Hesnit* (?). Die Schrift des Textes scheint mir dem Übergang vom 12. zum 13. Jahrhundert anzugehören, und zwar dürfte wohl der nämliche Schreiber das ganze Buch ausgeführt haben; denn die Verschiedenheit des Gesamteindrucks, den verschiedene Teile desselben auf das Auge machen, erklärt sich hinlänglich aus der ungleichen Beschaffenheit von Tinte, Feder, Pergament, aus dem Eintritt einer gewissen Abspannung des Schreibers nach anfänglicher Frische; auch der Umstand, dafs das zu Anfang häufig begegnende, dem & der heutigen Kaufmannsschrift ähnliche Zeichen für *et* und ebenso *w* neben *uu* späterhin selten wird, oder dafs

---

[1] Da der Titel der zweiundvierzigsten vom Rubricator nicht ausgeführt ist, so ist diese in dem Verzeichnis nicht berücksichtigt; es weist somit ein Stück zu wenig auf.

neben Punkt und Fragezeichen das ? später seltener vorkommt, scheint mir nicht entscheidend. Sicher ist, daſs von Anfang bis zu Ende die Seite 23 (selten 22) ungebrochene Zeilen aufweist, auch die graphischen Gewohnheiten dieselben bleiben, so die (spärliche) Verwendung von Accenten ungefähr im Sinne des Tremas, so nach und nach immer regelmäſsiger *j* für konsonantisches oder vokalisches *i*, so oft dasselbe vor oder nach vokalischem oder konsonantischem *u* steht, in welchem Falle anfangs der sonst seltene Strich über *i* den Lesefehlern vorbeugt; von vorn bis hinten zeigt sich auch die Neigung *p* oder *q* auf der untersten Zeile durch einen aus Punkten gebildeten senkrechten Schweif tief in den unteren Rand hinein zu verlängern, wie dies sonst in der Urkundenschrift oft geschehen ist. Die Predigten zeigen im Innern für das Auge keine Gliederung; an reichlicher Interpunktion fehlt es zwar nicht; sonst aber verläuft das Ganze ohne Absätze. Dagegen ist der Beginn jeder Predigt durch einen groſsen farbigen Anfangsbuchstaben ausgezeichnet, der, wenn er rot ist, blaue Schnörkel hat, wenn er selbst blau ist, rote; und eine Überschrift in roter Farbe giebt das Thema an. Bei dem noch gröſseren Anfangsbuchstaben der ersten Predigt ist, auſser Blau und Rot, auch Grün verwendet. Einige Verbesserungen, Ausstreichungen überflüssiger, Einschaltungen übersprungener Wörter scheinen vom Schreiber selbst vollzogen zu sein; Bl. 79v, 136r und 135v ist dergleichen mit roter Farbe geschehen, und bei dieser Gelegenheit sind an letzterer Stelle auch noch einige schwarz geschriebene Majuskeln des Textes mit Rot durchzogen.

Daſs die Predigten Übersetzungen und zwar von solchen des h. Bernhard seien, ist zwar nirgends gesagt, war aber leicht zu erkennen; die drei ersten sind identisch mit den drei letzten[1] der ähnlichen Sammlung von Übersetzungen aus den Homilien des gleichen Heiligen, die in ihrem ganzen Umfang durch W. Foerster (im 2. Band der von Vollmöller herausgegebenen Romanischen Forschungen, Erlangen 1886) bekannt geworden ist. Eine fernere Predigt der Berliner Handschrift, die neunundzwanzigste, hat zwar ebenfalls mit einer der Pariser die lateinische Vorlage gemein, mit der vierzigsten; während aber jene drei ersten einfach andere Niederschriften der nämlichen Übertragung ins Französische sind, von den Texten bei Foerster kaum anders als in Äuſserlichkeiten der Schreibung verschieden, so ist die neunundzwanzigste mit der entsprechenden Pariser durch weiter gar nichts verwandt als durch die Gleichheit der wiedergegebenen Vor-

[1] Die letzte ist in der Pariser Handschrift, die am Ende verstümmelt ist, nur zur Hälfte vorhanden und kann nun aus der unseren vervollständigt werden. Nach dieser gebe ich sie nachstehend in ihrem ganzen Umfange.

lage. Übrigens steht die Berliner Sammlung der Pariser auch durch die Besonderheit der Sprache so nah als möglich; nichts von den merkwürdigen Erscheinungen, die vorzugsweise die Bedeutung jenes Textes ausmachen, dem man nicht auch hier begegnete; und nur in der schriftlichen Darstellung der nämlichen sprachlichen Thatsachen geht der Berliner Text bisweilen andere Wege, indem er z. B. *agn, ogn* vor *aign, oign* oder *age* vor *aige* bevorzugt, überhaupt wohl das *i* der Diphthonge *ai, oi, ei, ui* leichter fallen läſst.

Es folge hier eine Übersicht des Inhaltes der Handschrift. Neben der die Stelle jedes Stückes in der Reihenfolge angebenden Zahl findet man die Angabe von Blatt und Seite der Handschrift, wo es beginnt, ferner seine Überschrift nebst Anfang, endlich die Zahl der Spalte, auf welcher man im 183. Bande von MIGNE's Patrologia latina die entsprechende lateinische Predigt trifft, nebst dem ihr dort gegebenen Titel.

1[1]	1r	**D lannunciment no*ſ*tre ſynor.** O cum es Richeſ em miſericorde. chier ſire.	392	In feſto annuntiationis b. virginis ſermo III
2[2]	9v	**Ancor de ceu.** Por ceu ke li glore habitaſt en noſtre terre	383	In feſto annuntiationis b. virginis ſermo I
3[3]	19v	**ANCOR de ceu.** Uuardez chier frere en la ſolemniteit	390	In feſto annuntiationis b. virginis ſermo II
4	23r	**lo jor des palmes.** Ne fut mies ſenſ choſe ceu que	253	In dominica palmarum ſermo I
5	26r	**Ancor des palmes.** Il noſ coujent huj chier freire parler	256	In dominica palmarum ſermo II
6	30r	**Ancor deſ palmes.** Ja ſoit ceu q*ue* deuſ feſiſt totes choſes	259	In dominica palmarum ſermo III
7	34r	**Ancor des palmes.** Uelliez chier freire de cuer. por ceu	263	In feria IV hebdomadæ ſanctæ
8	44v	**En la cene no*ſ*tre ſignor.** Ciſt ſunt li ior chier freire cuj nos	271	In coena domini
9	48v	**En la follempnitey de paſke.** Li lieonſ de la lignieie de juda at	273	In die ſancto paſchæ

[1] Ist das 43. Stück der von FOERSTER herausgegebenen Sammlung. Rom. Forsch. II 162.

[2] Das 44. Stück bei FOERSTER, a. a. O. II 169.

[3] Das 45. Stück bei FOERSTER, a. a. O. II 177; in der Pariser Handschrift ist nur der Anfang erhalten.

10	55r	**Ancor de pafkes.** Uencut at li lieons. de la lignie juda	278[1]	
11	62v	**Ancor de pafkes.** Nof auonf entendut de lapoftle *que* criz	283	In tempore refurrectionis, ad abbates fermo II
12	69v	**Vnf fermonf de la lepre. Naaman.** Tot enficum en la medicine def cors	288	In tempore refurrectionis fermo III
13	76v	**Lo primier demenge apref la pafques.** Tot ceu que neit eft de deu formontet	291	In octava pafchæ fermo I
14	82r	**Ancor del primier dimenge.** Vne leiceonf nof eft huj lete chier	296	In octava pafchæ fermo II
15	85r	**Li fermonf des croiz.** Li quels de uof auerit un amin.	297	In rogationibus
16	87r	**Li fermons de lencenfyon.** ENfi cum li unze diciple feoient	299	In afcenfione domini fermo I
17	89v	**Ancor de lencenfion.** Cefte follemnitez. chier freire eft gloriouſe	301	In afcenfione domini fermo II
18	94r	**Ancor de lafcenfion *noftre* fignor.** Huj peffat *per* mei la haltece def ciels	304	In afcenfione domini fermo III
19	100r	**Ancor delencenfion.** Si nos auons dignement *et per* deuocion	309	In afcenfione domini fermo IV
20	110r	**Ancor de lencenfyon.** Huj eft offerz li filz de lo*m*me a celuj	316	In afcenfione domini fermo V
21	120r	**Lo ior de la pentecofte.** Celebru*n*f huj chier frere la follem*n*pniteit	323	In fefto pentecoftes fermo I
22	124r	**Ancor de la pentecofte.** Hvj unt chier freire li ciel decorrut daua*n*t	326	In fefto pentecoftes fermo II
23	129v	**Ancor de la pentecofte.** Certes chier freire fi deuf me doneuet	330	In fefto pentecoftes fermo III
24	135v	**De faint Johan baptifte.** Lonz foit de cez noz affembleies chier	397	In nativitate f. Joannis baptiftæ
25	144r	**En la Vigile Sainz piere *et* Sainz pol.** ENs ujgilef def fainz coujent uellier	403	In vigilia ff. Petri et Pauli apoftollorum.

[1] Ist im lateinischen Text von dem, was vorangeht, nicht getrennt, darum auch ohne Überschrift.

26	146r	**De Sainz piere. *et* Saint pol.** Apparue noſ eſt chier frere li glorioſe	405	In feſto ſſ. Petri et Pauli apoſto lorum ſermo I
27	149v	**Ancor de ſaint piere *et* de ſ. pol.** Ciſt ſaint dont noſ huj faiſonſ la feſte	408	In feſto ſſ. Petri et Pauli apoſto-lorum ſermo II
28	154v	**Ancor de Sainz piere. *et* de Sainz pol.** Per droit chier frere raffiert aſ ſainz	412	In feſto ſſ. Petri et Pauli apoſto-lorum ſermo III
29[1]	158v	**De no*ſtre* damme.** Li charitez ke me fait eſtre cu-ſencenos	178	In quadrageſima ſermo V
30	162v	**Ancor de no*ſtre* damme.** Germet li *ter*re herbe uerdiant *et* ſemence faiſant.		
31	166r	**Ancor de no*ſtre* damme.** Repaire repaire deſpete. repaire repaire		
32	167r	**De no*ſtre* damme.** Troiſ uertuz noſ loet ſainz lucas	665	De diverſis ſermo XLIII
33	168r	**De *dauid et* de Goliet.** Noſ trouons el ljure deſ roiſ don baron	333	Dominica IV poſt pentecoſten
34	171r	**De cinc pains.** Pitiez me prent de ceſte torbe ke troiſ iors	337	Dominica VI poſt pentecoſten ſermo I
35	174r	**De la haltelce. *et* de la baſſece del cuer.** De ceu ke nos diſimes ancor. neſ uuaires.	637	De diverſis ſermo XXXVI
36	177r	**De la parole de la poſtle.** Jl eſt aujſ ke nos ſoienſ poure.	644	De diverſis ſermo XXXVIII
37	179r	**Des traualz de ceſt exil.** Chier frere li traualz de ceſt exil	645	De diverſis ſermo XXXIX
38	181r	**Des apoſtles.** Ceu eſt ceſte generacionſ ke qujert deu.	639	De diverſis ſermo XXXVII
39	186v	**De la ſumption no*ſtre* damme.** Huj eſt monteie chier freire li glorioſe	415	In aſſumptione b. virginis Mariæ ſermo I
40	189r	**Ancor de laſumcion no*ſtre* damme.** Jheſuſ entrat en un chaſteil. *et* une fe*m*me	417	In aſſumptione b. virginis Mariæ ſermo II

[1] Diese Übertragung ist von der verschieden, die von der nämlichen Predigt in der Pariser Handschrift (bei Foerster als 40. Stück, a. a. O. II 153) zu lesen ist; auch sie drucke ich im folgenden ab.

41	195r	**Ancor de no*ſtre* damme.** Jeſus entrat en un chaſtelet. *et* une fe*m*me	421	In aſſumptione b. virginis Mariæ ſermo III
42[1]	200v	Tenſ eſt ke tote charſ parouſt huj	425	In aſſumptione b. virginis Mariæ ſermo IV
43	203v	**Ancor de noſtre damme.** EN un chaſtelet entrat no*ſtre* ſires		

Zu den Stücken 30, 31 und 43 habe ich lateinische Originale bisher zu finden nicht vermocht. Daſs auch sie Übersetzungen seien, bezweifle ich nicht; aber unter den Predigten des h. Bernhard oder unter den bei Migne als ihm fälschlich zugeschrieben gedruckten dürfte man die Vorlagen vergeblich suchen. Die beiden kürzeren 30 und 31 folgen unten; vielleicht gelingt es anderen nachzuweisen, woher sie stammen. Die erste ist nach Blatt 163r eine Predigt auf die Geburt der h. Jungfrau. Die letzte, welche ebenfalls mitzuteilen es mir hier an Raum gebricht, vergleicht, ausgehend von Lucas X 38 ff. das unreine Menschenherz mit einer Burg; ihre Lebensmittel sind die weltlichen Freuden, ihre Mauern die Verhärtung des Herzens, ihre Waffen Scheingründe; wenn der Herr in ihr einkehrt, zerstört er sie um eine neue zu erbauen. Drei Gnaden empfangen wir von Gott: Bekehrung, Beistand, Vergeltung. Maria und Martha werden auf Werke und Betrachtung gedeutet. Einen Hinweis auf die Rettung des Theophilus, wie im 31. Stücke, findet man auch in Bernhards Tractatus ad laudem b. virginis I 1143; doch hat dieser mit der hier vorliegenden Anrufung der Sulamit sonst nichts gemein.

Wie in der Pariser Handschrift, so sind auch in der Berliner einige von den Predigten De Diversis in die Reihe derer De Tempore und De Sanctis eingeschaltet (32, 35, 36, 37, 38). Diese letzteren folgen im allgemeinen der Ordnung des Kirchenjahres vom Palmsonntag bis zum sechsten Sonntag nach Pfingsten, was die beweglichen Feste angeht (nur daſs die Fastenpredigt 29 an unrechter Stelle steht); und von der Verkündigung Marias (25. März) zur Geburt des Täufers (24. Juni), Peter und Paul (29. Juni) und Marias Himmelfahrt (15. August), so weit die unbeweglichen in Betracht kommen (nur daſs wieder die Predigt auf Marias Geburt 30, die auf den 8. September fällt, keinesfalls am richtigen Orte steht). Sieht man von den beiden hervorgehobenen Fehlern ab, so stellen sich bewegliche und unbewegliche Feste so, wie es der Fall sein muſs, sobald Ostern frühestens auf den 14. April fällt, bei welchem Sachverhalt

[1] Der Predigt fehlt die rote Initiale nicht; dagegen ist der für die rote Überschrift vorhandene freie Raum nicht ausgefüllt.

der vierte Sonntag nach Pfingsten (30. Juni) hinter Peter und Paul zu liegen kommt. Die beiden Handschriften zusammen geben nun übersetzt die lateinisch vorhandenen Reden De Tempore beinahe vollzählig, die De Sanctis zu einem ansehnlichen Teile, von denen De Diversis wenigstens sechs. Wer will uns wehren auf weiteres zu hoffen?

3. ANCOR de ceu.

[1][1] Uuardez chier frere en la ſollemniteit quj huj eſt la ſimple hyſtoire de noſtre raparillement. aſſi cum une treſ deletaule planece. Om enjunt a gabrihel lang*e*le un nouel miſage. *et* la uirgine q*ui* regehit la nouele uirtut honoret om de nouel ſalut. Om oſtet lanciene maldeceon des fe*m*mes. *et* ſi receot li nouele mere nouele beneiceon. Celei empliſt om de grace que ne ſeit que cuujſes ſoit por ceu ke cele engenuiſſet p*er* lo ſaint eſp*er*it un fil al haltiſ (20r)me. que compagnie ne dignet auoir a ho*m*me. P*er* cele porte miſmes entret a nos li medicine de ſalueteit. p*er* caj li uelinſ del ſerpent entrat *et* entoſchat tote lumaine lignieie. ligierement pounſ cullir de cez preiz gra*n*t meſſe de tels manieres de flors. mais ju eſwarz enmei une abiſme dune p*er*fundeteit que molt fait adoter. Abyſmes eſt uraiement que cerchiez ne puet eſtre. li ſacremenz de lincarnation noſtre ſignor. *et* abyſmes eſt q*ui* treſp*er*ciez ne puet eſtre. li parolle keſt faite charſ *et* quj habitat en nos. Quj poroit a ceſte abyſme auenir. *et* q*ui* lo poroit encerchier? P*er*funz eſt ciſt puz. *et* ju nen ai mies uaſſel en caj ju en poie puſier. Toteuoies ſuelt alafieie enmuſtir leſ linceues ke ſor luj puix ſunt miſ. li humours que dededenz iſt. Ju q*ui* conoſ ma p*r*opre enfermeteit ne moſe mies abandoner. dentrer en ceſt puix. *et* toteuoies eſpa*n*t ju a ti ſouent ſire meſ mainſ aſſi cum ſuſ la boche de ceſt puiſ. por ceu que mon ai*n*rme eſt a ti ſi cum t*er*re ſenſ auue. Ceu pittit chier freire ke meſ cuers at receut de la tres tenuene ſumiere que de ceſt puix eſt contremont uenue uos uoil ju repartir ſenſ enuje. *et* arroſer uos cuerſ dune treſ pittites gotteſ de la celeſtiene roſeie queſtorſes ſunt aſſi *cum* (20v) dun linceuel. [2] Ju encerche p*er* quel raiſon li filz preſiſt anceoſ char. ke li peres. ou ke li ſainz eſpiriz. cum ce ſoit ke tote li trinitez ſoit de vuual glore *et* dune miſmes ſuſtance. Maiſ quj pot unqueſ conoſſere lo ſens noſtr ſignor. ou q*ui* fut unkeſ ſes conſilliers?

[1] Ich schalte in eckigen Klammern und mit fetter Schrift die Zahlen ein, welche bei MIGNE die Abschnitte des lateinischen Textes bezeichnen, in runden Klammern und in gewöhnlicher Schrift die Bezeichnung von Blatt und Seite der Berliner Handschrift.

Perſunz eſt molt ciſt ſacremenz. ne de tel choſe ne doienſ noſ mieſ ultrecudiement *et* haſtiulement doner ſentence. Ceu ſemblet aſſi q*ue* ceu fuſt pluſ couenaule choſe ke cil deueniſt ſpecialment filz quj filz eſtoit dauant. por ceu quel nom nen auſt nule dotance. Daltrepart ceu eſt li ſingulers glore *et* li ſoueraine honors de noſtre uirgene Marie. qujlle un miſmes fil ot comu*n* enſemble deu lo pere. *et* ceu ne pujſt mje eſtre ſi li filz nen auſt priſ char. Noſ miſmes nè puſſiens p*er* altre oqueſon eſpirer leritage p*er*menant. car cil quj eſtoit li ſouls filz del pere. apelat ſens dote p*er* ceu q*u*il primiers neiz deuint entre pluſorſ freres ceoſ en ſon heritage. cuj il apelat en ſon electjon. car ſi noſ ſu*m*mes frere. donſ ſu*m*meſ aſſi hoir. Donques tot enſicum n*oſ*tre ſoyaules moyneres. ihe*su* criz aſſemblat p*er* tres merujllouſ ſacrement en une perſone la ſoſtance deu *et* de lo*m*me. enſi alet il en noſtre reconciliement p*er* ſi couenaule conſoil. qujl (21r) de la moyene droiture ne ſe p*ar*tit mies. donanz *et* a lun *et* alaltre ceu ka unchaſcun ap*er*teniuet. a deu lonor. *et* a lo*m*me la pitiet. Ceſte eſtoit li miedre maniere? de faire paix entre lo ſignor quj correciez eſtoit. *et* lo ſerjant ki colpaules eſtoit. enſi q*ue* li ſerianz ne fuſt apreſſeiz de plus fiere ſentence p*er* lo matelent del ſignor cuj il deuſt auoir honoreit *et* ke li ſireſ ne fuſt daltrepart trop panniz de tel honor. cum en li deuoit. p*er* la pitiet ken feroit a ceſtuj [3]. Or eſuuarde diliantrement ſi li ang*e*le miſmeſ ne uuardent ceſte choſe[1] en la naſſance de ceſt moynour. Glore dient il ſoit enſ haltimes a deu. *et* en terre paiz aſ ho*m*mes de bone uolenteit. Por ceu a uuarder ne deffallit unques a criſt n*oſ*tre ſoyaule reconciliour. ne li eſpiriz de cr*i*mour dont il ades portaſt honor al pere. *et* queſiſt ades ſa glore. ne li eſpiriz de pitjet donſ il aſ ho*m*mes fuſt piſ *et* miſericors. Porceu ot il aſſi meſtier de leſpirit de ſcience p*er* cuj li dep*ar*teme*n*z de la crimor *et* de la pitiet fuſt faiz ſens confuſion. Jl troj furent ki lo primiez pechiet aidarent a faire. maiſ aouertement defallerent a ceoſ troiſ. troiſ choſes. Ciſt troi furent eue. *et* li diaules *et* adans. Eue nen ot mies ſcience que deceue fut ſi cum diſt (21v) li apoſtles en la preuarication. Maiſ ceſte ne deffallit mies al ſerpent. q*ui* eſtoit pluſ uoiſous de totes les altreſ beſtes. maiſ nen ot poent de pitiet li maligneſ enemins. q*ui* deſ lencomencement eſt deuenuz homicides. Ce ſemblet q*ua*dans fuſt pis qua*n*t il ſa fe*m*me ne uolt mies correcier. maiſ la cr*i*mor de deu deuuerpit. quant il anceoſ fut obedienſ aſa uoix? q*ua* la uoix de deu. hai cumbien nos fuſt auenut ſi li crimours de deu auſt en luj la plus grant force. ſi cum en leiſt nomeiment de criſt. *et* li eſpiriz de crimor lo raamplit. En totes

[1] Hier bricht der Text der Pariser Handschrift ab.

chofes chofes (falsch wiederholt) *et* per totef chofes doit eftre li crimourf noftre fignor mife dauant. la pitiet des pro*f*mes. *et* ceft cille foule chofe que tot lo*m*me doit traire alei. En ces troif chofes reconciliat noftre moyneres lo*m*me adeu. ceft en crimour. em pitiet. *et* em fcience. maif en confol *et* en force lo deliurat il de la main de fon aduerfaire. Jl pennit p*er* confol lenemin de fon anciene droyture. *et* p*er* force fift qujl per force ne pot retenir ceof quj rachateit eftoient. qua*n*t il uenkeres repairat denfer. *et* qua*n*t li uje des ho*m*mes releuat enfemble luj [4]. Por ceu nof paft il or del pain de uje. *et* dentendement. *et* fe nos aboe (22r) uret dauue de fantiule fapience. car li entendemenz des chofes efpiritelf *et* niant ujfibles eft li uraif pains de lai*n*rme. confermanz noftre cuer. *et* enforzanz totes noz bones oyures en toz eftudes efpiritels. Maif li charnalf cuers q*ui* nen ap*er*ceot mies celef chofes ke funt de lefpirit de deu anz li femblet fottie! cil diet en gemiffement *et* en plour. Defachiez eft mef cuers car ju aj oblieit a maingier mon pain. Vraye *et* p*er*faite ueritez eft q*ue* ne ualt niant a lo*m*me fil tot lo munde uuaignet. por ceu q*u*il facet lenpoirement de fon ai*n*rme. Maif ceu coment poroit entendre li cuers auerf? En uain fe trauallet cil q*ui* ceu li uuet enhorter. *et* por caj? Certes por ceu ke tot ceu li femblet eftre fottie. Quels chofe eft pluf uraje que ceu q*ue* li juf de crift foit fueys? Or lo mat alo*m*me feculer dauant! fi uaraf q*u*il anceos lo tarrit apiere q*ua* pain. Et certes de lentendement de cefte dedentriene ueriteit ujt li ai*n*rme. *et* cift mangiers eft efpiritels. car li hom ne ujt mies foulement de pain! maif de totte la parolle quj ift de la boche de deu. Tu ne pues mie traire en ti fens grant poene la ueriteit. (22v) deciatant que tu enfenf la fauour. maif qua*n*t tu tencomences iaj en lei adeletier. fi neneft iaj ele mief maingiers. maif boeures. *et* ligierement entret donf a lai*n*rme. *et* p*er* lo boeure de fapience matift li ujtalle de lentendement. porceu kille ne foit pluf a charge q*ua* a efploit af fas me*m*bref del dedentrien ho*m*me. ceft af faches affections. [5] Nule chofe ne deffallit en n*oft*re faluour. que meftier auffent an*oft*re falueteit. car ceft il de cuy. yfaies li p*r*oph*et*es parlat gra*n*t tens dauant. Vne uerge dift il ifferit de la racine de ieffe. *et* une flours aparrit de fa racine. *et* for cele flour fe repoferit li efpiriz de n*oft*re fignor. li efpiriz de fapience *et* dentendement. li efpiriz de confol *et* de force. li efpiriz de fcience *et* de pitiet. *et* fel raamplerit li efpiriz de la crimour noftre fignor. A ceu pren uuarde diliantrement q*u*il dift q*ue* li flours aparroit de la racine *et* nemief de la uerge. carfi li nouele charf di crift fuft en la ujrgene creeie de niant fi cum plufor gent cudarent! om ne pujft mie dire que li flours fuft aparue de la racine maif de la uerge. Maif por ceu qujl uffit de la racine. ceft de la comune racine! fi nen eft mies dote qujl nen auft

matiere comune. Et *per* ceu (23 r) qujl diſt *que* li eſpiriz ſe repoſat ſor luj. ſi moſtret il aouertement qujl en luj nen ot nule contrarieteit. Maiſ por ceu *que* li eſpiriz nen eſt mieſ en noſ al deſoure del tot? ſi ne ſe repoſet il mieſ en noſ car li chars encuujſt encontre leſpirit. *et* li eſpiriz encontre la char. *et* de ceſt batalle nos pujſt deliurer li noues hom *qui* en luj nen ot nule tel choſe *qui* la uraie ymagene receut de noſtre char. ſens lo ujez liuain de cuujſe.

29. De n*oſt*re damme.

[1] Li charitez ke me fait eſtre cuſencenos por uos. me deſtrent de parler a uos. *et* molt pluſ ſouent j parleroie ſi nen eſtoient pluſor afaire quj me detienent. Et ne fait mies a merujllier ſi ju ſujſ en cuſenceon por uos. deſke ju troz en moi miſmes granz okeſonſ de cuſenceon. car totes celes fieies ke ju eſwart ma miſere *et* pluſors periz ou ju ſujſ. ne fait adoter ke mon ai*n*rme ne ſoit torbeie em mi. ne moenſ de cuſenceon ne rai ju mieſ dun chaſcun de uos. ſi ju uoſ ai*m*me ſi cum mi miſmes. Ceu ſeit cil quj les cuers cerchet. quantes fieies mes cuers eſt pluſ chargiez de u*oſt*re cusenceon ke de la ſeie miſmes. Et nen eſt mies meruelle ſi iaj grant cuſenceon. *et* ſi (159 r) grant dotance me deſtorbet por uoz toz. q*ua*nt ie uoi ke uoſ eſtes en ſi grant chaiteueteit *et* en tantes manieres de periz. Aouerte choſe eſt ke noſ miſmes porto*n*s n*oſt*re laz *et* n*oſt*re enemin par tot auoc nos. De la char di je ke de pechiet eſt neie *et* em pechiet norrie *et* molt corrumpue *per* la naſſance. maiſ molt plus emperieie *per* maluaiſe coſtume. De ceu aujent qujlle ſe drecet ſi fierement encontre leſp*er*it. *et* qujl ades murmuret *et* ne puet ſoffrir diſcipline. anz nos ſemont a faire ceu ke ne loiſt. ne ne uuelt eſtre ſoſiete ala raiſon. ne *per* nule crimor ne ſe reſtrent. [2] Jcele embreſet. jcele ajuet. *per* cele ſe combat encontre nos li tres uoiſous ſerpenz ſi cum cil kaltre deſier nen at. nen altre entente. nen altre afaire. maiſ ke la p*er*dicion des ai*n*rmes. Ceu eſt il quj ades penſet mal. quj les deſiers de la char enflammet. quj lo naturaule feu de cuujſe ſofflet aſſicu*m* *per* uenenoſes ſemontes. *et* enfla*m*met les maluaiz emmouem*enz*. *et* aparellet les okeſonſ de pechiet. *et* ne ceſſet de te*m*pter les cuers des ho*m*mes *per* mil enginz dont il les nujſt. Ceu eſt cil *qui* les mains nos liet de n*oſt*re *pro*pre cinteur. *et* enſicum en ſuelt dire de n*oſt*re baſton miſmes nos fiert. enſi ke li chars (159 v) ken ajue noſ fut doneie. ſoit a nos unſ trabuchemenz *et* unſ enlacemenz. [3] Maiſ ke ualt ceu ſi noſ auons moſtrez les periz *et* nos ni mettons ancun ſolaz ou ancune medicine? Granz periz eſt uoirement *et* fiere lute.

combatre encontre cel enemin quj eſt de n*oſtre* maiſon miſmes. maiſmement cum nos eſtrainge ſoienſ *et* cil ſoit neiz del pais. cum cil magnet en ſa contreie. *et* nos ſoiens pelerin *et* daltre t*erre*. Certes perilloſe choſe eſt de combatre ſouent. ou ades encontre leſ uoiſous deceuemenz de lenemin cuj cuj (falsch wiederholt) om ne puet ueor. *et* ke p*er* nature eſt molt plus uoiſouſ *et* p*er* lo maliee qujl at longement meneit. Nekedant en n*oſtre* poſteit eſt ſi noſ uolons qujl ne noſ uenkerit mies. car nuls ne chiet en ceſte batalle encontre ſon uolor. Deſoz lo*m*me at miſ d*eus* ſon cuujſe por ceu qujl en ſoit poſtis. lenmouement de la temtacion puet li diaules enciter. maiſ en nos eſt ſi noſ j uolonſ conſentir ou non. De ton enemin pues faire ton ſeriant ſi tu wels. enſi ke toteſ les choſes tetorneront a ton bien. Or ſoit qujl tenfla*m*met en cuujſe de maingier. ou de uaniteit ou dimpacience. ou de luxure. Warde ni conſentir. car tantes fieies cum tu reſte (160r) raſ encontre. tantes fieies ſeraſ coronez. [4] Nekedent noſ ne deſnoionſ mieſ ke ce ne ſoit granz anujs. *et* molt perilloſe choſe. maiſ unſ pis delez naſt de la conſcience ke bone bone eſt. ſi noſ hardiement reſtonſ en la batalle. Je croi q*ue* li diaules en irat confus ap*er*me*m*mes. ne ne reparrat mieſ toſt ne ſi uolentierſ. ſi noſ les maluaiſes penſes ne laſſons mieſ en nos de morer. ap*er*me*m*mes ke nos leſ ap*er*ceuo*ns*. *et* ſi noſ p*er* grant air deſp*er*it nos drezons encontre. Maiſ quels choſe ſo*m*mes nos ou q*ue*lſ eſt n*oſtre* force. ke nos encontre tantes te*m*ptacionſ poienſ aler? Ceſtoit uraiement ceu ke deuſ quaroit. ceſtoit ceu ou il noſ uoloit moner. ke noſ n*oſtre* deſſallement ap*er*ceuxiens. *et* aſa mercit p*er* grant humiliteit recorreſſienſ q*ua*nt nos en nos altre ſeſcors ne trouerienſ. por ceu uoſ pri chier freire ke uos recorriez ades al treſ ſeur refuge doriſon dont ju ai altre fieie parleit. [5] Nekedent totes celeſ fieies ke ie doriſon parolle. ſi me ſemblet ke ju óíé unes umaines penſes enſ uoz cuers. ke ju unkes nen ap*er*ceu em mi. iaſoit ceu ke ju leſ aie ſouent oit des altres. Aka tient ceu ka poenes ap*er*ceot nulſ de nos ancune fieie queſl ſoit li fruz de ſon oriſon. ſor ceu (160v) ke noſ unkes ne ceſſons dorer? Enſi cum nos alons a oreſon. enſe ſemblet ke noſ en repariens. nuls ne reſpont anos. nuls ne noſ donet niant. anz eſt aujs ke nos noſ traujlliens en uain. Maiſ q*ue* diſt n*oſtre* ſires en lewa*n*g*e*le? Ne jugiez mies ſelonc lo p*er*defors. anz jugiez droit jugement. *et* quj eſt li droiz jugemenz ſi li jugemenz non de la foyt? li juſtes ujt de la foyt. *et* por ceu ſi doies tu ſeure lo jugement de la foyt. *et* nemieſ ton eſprouement. car li foyz eſt uraie *et* li eſprouemenz fals. Et quels eſt li ueritez de la foyt ſi ceu n*on* ke li filz de deu promat? De quant diſt il ke uos en oriſon demandez creez queuos laueroz. *et* ſi ſerat doneit auos. Nuls de uoſ ne tignet ujl ſon oriſon. car ie uos di ke cil a cuj nos la

faifons ne la tient mies a niant. Anceos qujlle foit iffue de n*o*ſ*t*re boche. la comandet il a efcriure en fon ljure. *et* fens dote poons atendre de douf chofes lune. car il nof donrat ceu q*ue* nos demandons. ou ceu q*ui*l feit ke plus gra*n*t meftier nof at. car nof ne fauons fi cum il coujent quel chofe nos preons. maif luj prent pitiet de n*o*ſ*t*re nonfachance. fi receoit debonairement n*o*ſ*t*re orifon. *et* ceu q*ue* del tot nen at meftier a nos. ou ke ne coujent mies fi toft doner ne nof otroet il (161 r) mief. iafoit ceu ke li orifons ne remagnet mies sens frut. [6] fi nof faifons ceu qujl nos femont el faltier. ceft fi nos nof deletonf en deu. car fainz daujd dift. Delete toi en n*o*ſ*t*re fignor. *et* il te donrat ceu que tes cuers li requarrit. Maif o tu fainz proph*et*es quels chofe eft ceu ke tu nos femonf fi deliurement deletier en n*o*ſ*t*re fignor. affi cum aienf aparilliet tel maniere del deleit? lo deleit de maingier *et* de boyure. de dormir *et* de repofer *et* def altres chofes ken *ter*re fu*n*t! celuj coneffons nos. Maif deuf quel deleit at il ke nof en luj nof deletiens? Ceu poient dire chier frere li gent feculer. maif nof nemies. Quj eft or nuls de uos quj nen ait fouent aparceut lo deleit de bone confcience. *et* quj nen ait fentit la fauour de chafteit. dumiliteit *et* de chariteit? Ce nen eft mies delez de maingier ou de boeure ou dancune tel chofe. nekedent fi eft li unj delez q*ui* tot iceft formontet. car cift delez fi eft de deu. *et* nemies charnels. *et* qu*a*nt nos en tel chofe nof deletons. fi nos deletons nof en n*o*ſ*t*re fignor. [7] Maif pueceftre li plufor fe deplagnent de ceu qujl petit *et* molt areif ap*er*ceouent ceft deleit. quj e*ſt* plus douz ke miez ne braffe ne foit. *et* qujl or funt traujlliet enf tem (161 v) tacions. quj molt plus ujguerofement lo funt fil tant ai*m*ment ujrtut qujl fe tignent folement por ceu qujl feuent ke ceu plaift adeu. ancor ne fentent il mies grant deleit. Ne ne fait mies adoter ke cil quj tels eft ne concorcet molt bien ala femonte de la proph*et*e quj dift. Delete toi en n*o*ſ*t*re fignor. car il ceu ne dift mief por ceu kap*er*me*m*mes eft! maif de ceu ka auenir eft. car tels delez ap*er*tient a bienevrteit *et* li trauals a ujrtut. Delete toi fait il en n*o*ſ*t*re fignor. ceft a ceu tent a ceu tenforce. ke pregnef deleit en n*o*ſ*t*re fignor. *et* il te donrat ceu que tes cuerf li requarrit. Maif or pren uuarde a ceu qujl dift ceu que tef cuerf li requarrit. ceft ceu kal jugement de raifon fe concorderit. ne ci ne puef ueor chofe dont tu te doies deplagnere maif dont tu doies de tot ton cuer a deu graces rendre. q*ua*nt deuf at fi gra*n*t cure de ti. qujl totes celes fieies ke tu p*er* nonfachance quers chofe que ne tat meftier ne ten uuelt oir. anz te donet ceu ke miez te ualt enficum li peres charnels fait a fom petit enfant. q*ua*nt il li demandet del pain. Jl li donet uolentierf lo pain. *et* fil li demandet lo coutel ne len donet mies anz li brifet anceos lo pain qujl doneit li at ou il li fait brifier

ancuen de ſes ſcrianz enſi ke li enfeſ nen at nule greuance ne nul trauail. (162r) [8] Et en troiſ choſes puet om trouer ceu ke li cuers requjert. ne ne uoi ke cuerſ eſlez pujſt per droit altre choſe demander. les douſ choſes ſunt de ceſte uje. ceſt li biens del cors *et* li bienſ de lainrme. li tierce eſt li bieneurtez de la uje permenant. Ne te merujllier mies de ceu ke iai dit ken doit querre les biens del cors de deu. car ſien ſunt tu li bien corporel. ſi cum li eſpiritel. De lui doienſ dons querre *et* atandre ceu dont noſ ſoienſ ſoſtenut en ſon ſerujſe. mai por la beſoigne de lainrme doienſ nos plu ſouent *et* pluſ ardanment orer. ceſt por la grace de deu aauoir. *et* por leſ ujrtuz de lainrme. Por la uje permenant doienſ aſſi preier. de tot n*oſt*re cuer *et* de tot n*oſt*re deſier. car la ſerat li planiere *et* li perfaite bieneurteiz del corſ *et* de lainrme. [9] *et* por ceu q*ue* n*oſt*re deſier ſoient couenaule a deu en cez troiſ choſes ſi noſ coujent uuarder kel primier nen ait ſuperflueteit. el ſecont kil ni ait ordeit. el tierz kil ni ait elacion. ſi cum il aujent ſouent. car om qujert a la fieie leſ biens temporels por maluaiz delez. *et* les ujrtuz por uantiſe. *et* ancune gent ſunt pueceſtre quj qujerent la uje permenant nemies per humiliteit maiſ aſſi cum per la fiance de lor deſſerte. Ne ceu ne di ie mies ke (162v) li grace com prent de deu ne donſt fiance dorer. maiſ ne coujent mies kancuenſ mettet en lei la fiance dembaſſier ceu qujl qujert. A ceu ſolement ajuent ciſt primier don com ait eſperance de receoure pluſ granz de celei miſericorde ke cez miſmeſ at donez. Or ſoit donſ li oriſons quj eſt por les temporels bienſ reſtroite a celes choſes ſolement kil coujent auoir per beſſogne. *et* cele quj eſt por les ujrtuz de lainrme ſoit deljure de tote uaniteit. *et* cele quj e*ſt* por la uje permenant. ait fiance per grant humiliteit en la miſericorde de deu ſolement ſi cum droiz eſt.

30. Ancor de n*oſt*re damme.

Germet li terre herbe uerdiant *et* ſemence faiſant. *et* pomier frut faiſant ſelonc ſa maniere. quj ait ſa ſemence en ſoi miſmes ſor terre.[1] Deſke noſ doiens por n*oſt*re ſalueteit troiſ choſes a toz ceos quj ſaint ſunt donſ les doit om plus a cele damme quj lo ſalueor portat per grant deuocion rendre. ceſt ſemblance. honor *et* oriſon. por ceu q*ue* noſ aienſ lor ſemblance per ſainteit. *et* noſ onorienſ lor bienaurteit. *et* proienſ lor debonareteit. A ceu doit tendre tote n*oſt*re criſtientez *et* n*oſt*re religions. ke nos ſoiens deſirant deſtre ſemblant a ous. *et* eſtudioſ

[1] Germinet terra herbam virentem et facientem ſemen, et lignum pomiferum faciens fructum juxta genus ſuum, cujus ſemen in ſemetipſo ſit ſuper terram, Genes. I 11.

douſ a honrer. *et* (163r) deuoit douſ apreier. por ceu que noſ ſachiens quelſ ſoit li bone uoluntez de deu *et* li bien plaiſanz *et* li p*er*faite. la bone p*er* ſemblance de bonteit. la bien plaiſant p*er* honrer. la p*er*faite p*er* orer. En ancune de ces troiſ choſes doit ades eſtre entenduz cil quj uuelt eſploitier. aüeſ ſon ai*n*rme. *et* quj ne uuelt fallir *et* (l. en) teile choſe ka p*er*feccion ap*er*tignet. *et* quj en ceſte trineteit welt del tot eſtre ſogez a la uolunteit de la ſainte trineteit. enſi qujl en netteit *et* en humiliteit de bone uje ſoit ſemblanz aſ ſainz. *et* p*er* deuocion de loange leſ honret. *et* p*er* deſier les apelet en ſon oriſon. Et ceſte roine de pitiet quj eſt n*oſtre* uoereſſe *et* li bienauroſe porta de ciel. cuj naſſance eſt atoz leſ chaitiſ huj de ceſt ior granz enioiemenz. *et* tant cum ille eſt pluſ des altres ſainte. bienauroſe. debonaire. tant la doienſ nos en ceſt exil pluſ cuſencenoſement enſſeure p*er* ſemblance. pluſ planierement loer. *et* pluſ doucement preier. Ceu que uoſ auoiz anuit traujlliet en chantant apartient a ſon honor. *et* ſi eſt oriſonſ a lei. enſicum ceu ke Moyſes diſt de lei. noſ ſemont a la ſembla*n*ce de lei. Deu ujt fait il ke ceſtoit biens. ſi diſt. Germet li terre herbe uerdiant *et* ſeme*n* (163 v) ce faiſant. O boenſ deuſ q*ua*nz bienſ tu noſ aſ donez *et* cum granz en ceſte generacion iaſoit ceu ke nos nen ſoiens digne. Primierſ ſelonc la letre. q*ua*nt tu p*er* ton comandement creas *et* feſis toteſ choſes enſi q*ue* li t*er*re germet *et* portet ceu dont noſ ujuonſ. *et* ke noſ ueſtons. Apreſ ſelonc lalegorie. les tierz ſelonc la doctrine de uje. les quarz ſelonc les biens de ciel laſus. Selonc leſpiritel ſen q*ua*nt li ciel de deſoure tramiſent la roſeie *et* leſ nues plurent lo juſte. enſi ke li t*er*re fut áouerte. *et* li uerres fut molliez. de de (zu tilgen) la roſeie de ciel. *et* nemieſ de t*er*re. p*er* cai ille germet lo ſalueor. *et* enſemble luj nos ujnrent tut bien. Germet fait il li t*er*re herbe uerdiant. O. ſi deuſ ne nos auſt laſſiet ceſt germel. enſicum ſodome fuſſiens *et* ſemblant agomorre. maiſ en ceſte ſemence ſeront benoit totes les genz. Ceſt li t*er*re dont li p*re*cios liles deſ ualleies naſkit. p*er* cuj les natures ſunt chaingieies *et* les colpes deſ ho*m*mes p*er*doneies. Ciſt eſt herbe p*er* lumaniteit. uerdianz p*er* la diujneteit. ſemence faiſanz p*er* lo ſacrement de lalteit. car ſicu*m* li grains de froment. quj chiet en t*er*re fait ſemence p*er* cai il eſt multipliez. enſi ujnt criz en t*er*re quj eſt li grainſ de froment. *et* de ceſt grain (164r) noſ ſiſt ſon cors ſelonc ſa maniere. car enſicum li generacions de ih*es*u criſt em Marie fut p*er* grant miracle enſi ciſt chaingemenz quj eſt del pain *et* del ujn en ſon cors *et* en ſon ſanc ne poroit eſtre ſi p*er* grant miracle n*on*. Arbres pomeſ portanz eſt il aſſi p*er* la paſſion. frut faiſanz p*er* lo rachetement qujl at fait de ſon peule. li ſeme*n*ce de ceſt arbre eſt en luj miſmes ſor terre. car enſicu*m* li grains de froment quj eſt en la grainge neſt mies deſſem-

blanz a celuj q*ui* eſt ſemeiz en t*er*re. enſi nen eſt li cors ih*es*u criſt quj eſt laſſuſ en ciel mieſ deſſemblanz a celuj com ſacret en lalteit. Jl ſicum noſ auons dit quj eſt li grains de froment getiez en t*er*re. *et* releuanz de mort a uje ajuet molt aſ pechors p*er* lo pardon com prent el ſacrement de lalteit. qujl nos at laxiet. *et* ſi portat mol grant frujt. Et benoiz ſoit deuſ quj ceſte bonteit at fait a nos. p*er* cai n*oſ*tre t*er*re at doneit ſon frut. Ceſt li fruz dont li angeles diſt. Benoz ſoit li fruz de ton uentre. De ceſt frut quj eſt de larbre de uje quj unkes en maingerat en p*er*menant ujuerat. *et* aſſicum p*er* la pome adan ſo*m*mes tut mort. enſi per la pome ke ihc̄ eſt pouns tut reparier auje. Mainju*n*ſ dons tut ceſte pome en toz leus. ceſt el moſtier. em maiſon. en (164v) n*oſ*tre leit. *et* en n*oſ*tre oyure. Et aſſicum li t*er*re quj eſtoit ujrgene en lencomencement. ceſt niant laboreie germat p*er* lo comandement de deu de ſon eſpoine greit herbe uerdiant *et* nemies chardons nen eſpines pugnanz. *et* aſſi cum la ujz portet frut de ſueſ olor ſenſ ſon corrumpement. enſi portat n*oſ*tre da*m*me lo ſalueor per laumbrement del haltiſme. O cum amerienſ cele t*er*re ke ſens trauail *et* ſenſ poene nos raporteroit frut a cent doules. Combien doit om donſ amer pluſ cele t*er*re *et* chiere tenir dont cil hom ujnt ſens ſemence quj doneit at anos nemieſ ſolement ſon humaniteit. maiſ neſ aſſi ſa deiteit? Ce ſunt li cent doule. ceſt la uje p*er*menanz. ceſt li t*er*re ke decort de lait *et* de miel. Ceſt la bone t*er*re de cortil bien cloſe. *et* de la fontaine ſoeleie. Ceſt cele fontaine quj eſt áóuerte por lauer lo pechor *et* la fe*m*me quj at ſes flors. Ceſt cele fe*m*me (l. fontaine) dont mardocheuſ diſt. Ju uj une fontaine petite ke deujnt une granz auue. De ceſt auue ſe refroident cil quj enſpriſ ſu*n*t de maltalent de luxure. ou dauarice. *et* cil quj ſoit ont en boeuent. *et* li ort ſen leuent. Iſſonſ donſ chier freire de n*oſ*tre t*er*re. laxonſ noz parouz. *et* ſi en (165r) alonſ en la t*er*re ke deuſ noſ demoſtarrit. car il eſt une de moranz dont il noſ coujent eſſir. *et* une terre de ujuanz ou il noſ couient aler. Jl eſt aſſi li t*er*re de n*oſ*tre corſ. *et* li terre del cuer. Sor tozes (l. totes) cez terres ſunt miſ cil prince dont il eſt eſcrit. Tu feras douſ princes ſor tote la t*er*re. li primiere t*er*re eſt ſelonc la letre. li ſeconde ſelonc lo ſen eſpiritel. li tierce ſelonc la doctrine de bone (l. uje?). li quarte deſ bienſ quj ſu*n*t laſſus en ciel. Molt doienſ do*n*s chier freire p*er* grant deſier de cuer ſerujr aſ (l. al) prince des princes por aquaſter ſi noble ſignerie. *et* a la fille del prince ſeruons de tot n*oſ*tre corſ quj eſt de quatre choſes ſelonc la loy ken aampliſt p*er* quatre grez damor. ceſt ſoſcorre lo proſme p*er* conſoil. *et* p*er* lajue de ta choſe *et* de ti. Germet donkes ſelonc leſſample de n*oſ*tre da*m*me n*oſ*tre t*er*re. *et* ſi donſt ſon frut. ceſt frut ke li ſoit aidanz. *et* uert. ceſt

ujuant. car li uje del cuer ſi eſt amors. li uerdorſ de loyure ceſt li ardorſ de chariteit. p*er* cai li hom eſt eſclatiers. *et* li fru (fehlt ein Buchstabe) de leſpirit eſt charitez. paiz. pacience. debonairetez. Quj ſa (l. at?) ſemence en luj miſmes. li ſemence eſt li parolle de deu. ke li hom doit auoir en luj (165 v) miſmeſ. ſelonc ceu que daujd diſt. En mon cuer diſt il ai miſes teſ parolles. por ceu que ju ne pecheſſe encontre ti. P*er* la terre eſt ſignifieie li ai*n*rme q*ui* apert aſſi*nc* ſache de ujces. *et* deſcombreie q*ua*nt les auues en ſunt oſteies. ceſt li deleit charnel. ne ni trueuet li diauleſ uoie per cai il i pujſt aler. ne leu moſte ou il pujſt demorer. car cele t*er*re eſt ſeche. *et* donſ diſt por ceu qujl uoit ke boen eſt deuſ cuj dires eſt faires. Germet li t*er*re herbe uerdiant *et* arbre frut porta*n*t que per repaxement de parolle raſaciet. *et* p*er* ajue dombre uuarſt. *et* per doctrine paxet. *et* per umbrage deſſendet. enſi qujlle donſt nemieſ ſolement herbe de fec̒cion. anz donſt auoc lo frut doyure. larbre de defendement. Et li arbres porcet ſemence ſelon ſa maniere. ke li hom per ceu qujl uoit en luj apregnet quelſ il doit eſtre. enuerſ altruj. *et* p*er* enſi porcet lo germel de droite oyure. De ceu diſt unſ ſages hom. Ceu q*ue* tu ne uuels com facet ati. ne faire aaltruj. et n*oſ*tre ſires en leuuengele. Ceu ke uoſ uoloiz diſt il cum facet a uos. faites aſſi aaltruj. Ceſt a dire. voſtre̒ nature eſuuardez en altruj. ſi troueroz en uos miſmes quel uoſ doiez eſtre en (166 r) uerſ altruj. Si cum om trueuet en la ujſion dun boen ho*m*me quj nom bernarz. li herbe uerdianz ſignefiet celuj quj nouelement encomencet bien a faire p*er* ardor. li arbres frut portanz eſt li criſtienſ quj aprochet aperfeccion doyures. *et* quj bien enſegnet *et* bonement ujt. Selonc lo ſen quj apertient a celes choſes que ſu*n*t en ciel ſi eſt li herbe uerdianz. li paſtuire p*er*menanz ke raſaziet leſ eſlez! en la t*er*re des ujuanz. enſi que li altre quj ſu*n*t de pluſ grant deſſerte manguent lo frut de larbre de uje. car li une eſtoile eſt pluſ clere de laltre. a celei clarteit noſ conduet ih*es*u criz quj eſt li uraie clartez per la deſſerte *et* p*er* la preiere de ſa ſaintiſme mere *et* de toz ſes ſainz quj ujt *et* regnet ſenſ fin amen.

31. Ancor de n*oſ*tre da*m*me.

Repaire repaire deſpete. repaire repaire que noſ te uoienſ.[1] Tu quj eſ benoite *et* pluſ que benoite. repaire que noſ teſwardienſ. Repaire primierſ p*er* nature. Aſ tu donſ oblieit n*oſ*tre umaniteit por

[1] Revertere, revertere, Sulamitis: revertere, revertere, ut intueamur te, Cant. Cant. VI. 12. Sulammit ist seltsam miſsdeutet.

ceu que tu ef deifieie? Ceu ne foit ia chiere da*m*me. car tu feif bien en quel peril tu nof af laffiez. ou tei chaitif geifent. *et* cum bien il forfunt. car il nen eft mie couenaule (166v) chofe ada*m*me. de fi grant pitiet qujlle ceof mettet en obli quj de fi grant mifere fu*n*t aamplit. ancor lenfoftracet li glore. fi li doit retrare li nature. Repaire lo parax per poffance. Quelf chofe te poroit eftre refufeie. q*ua*nt ceu ne te fut defnoiet ke tu ne retraeffes teophilum nef de la p*er*fugneit de perdicion? Coment poroit contrefter ata poffance. cele poffance ke de ta char prift naffance charnel? Semognet te li nature *et* li poffance tenmoicet aceu. car tant cum tu ef pluf poffanz fi doies fi doies (fälschlich wiederholt) eftre pluf merciaule. Repaire tierce fieie p*er* amor. Bien fap chiere da*m*me ke tu nof ai*m*mes per fi grant amor ke uencue ne puet eftre. *et* ke tu ef tref debonaire enuers ceos cuj tef filz ai*m*met p*er* amor en ti *et* per ti. Quj eft nulf quj fachet q*ua*ntes fieies tu refroides lo maltalent del jugeor q*ua*nt li fentence de juftice ift fors de la prefence de la djujneteit? Repaire la quarte fieie per fingulariteit. car en tes mainf funt li trefor de la mercit n*o*f*t*re fignor. *et* tu ef foule a cuj fi granz grace foit otrieie. Repaire donkes def fete (l. defpete?) cuj ai*n*rme trefpercet li efpeie. *et* ke fuf apeleie fe*m*me de feure. (167r) Et por coi? Por ceu que nof te uoiens. Soueraine glore eft ken te uoiet apres deu. *et* ken fe tignet ati. *et* ken demoret en ta uuarde. Oi nof. car enfi tenhouret tes filz quj nule chofe ne defnoiet a ti. quj fenf fin eft benoiz amen.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 28. März 1889, XVIII.)

XIX.

Ich will hier einige Bemerkungen über die Function $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$, welche den Ausgangspunkt für alle vorhergehenden Entwickelungen gebildet hat, einschalten, um mich im Folgenden darauf beziehen zu können. Die im art. I aufgestellte Definitionsgleichung:

$$(1) \qquad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = (4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i} \cdot \frac{\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)}{\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}}$$

kann mit Hülfe der im art. XV mit (14) bezeichneten Relation:

$$\Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{4\pi^2}{c_0}\left(\frac{\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)}{4\pi^2}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (c_0(w_1+w_2) = i)$$

in folgende transformirt werden:

$$(2) \quad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)\sqrt{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)}$$
$$= 2\pi\left(\sqrt{-(w_1+w_2)i}\right) e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2).$$

Wird hier für den Ausdruck auf der rechten Seite gemäss der mit $(\mathfrak{C}_0)$ bezeichneten Gleichung im art. III die Reihenentwickelung eingesetzt, so resultirt die Formel:

$$(3) \quad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)\sqrt{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)}$$
$$= 2\pi \sum_{m,n} (-1)^{mn+m+n} e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi + 2(m\sigma+n\tau)\pi i},$$

in welcher die Summation auf alle ganzzahligen Werthe von m und n, d. h. also für m und n von $-\infty$ bis $+\infty$, zu erstrecken ist und a_0, b_0, c_0 durch die Gleichungen:

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = c_0(w - w_1)(w + w_2), \quad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1$$

bestimmt sind. Nun ist gemäss der im art. XV mit (16) bezeichneten Formel:

$$(4) \quad \sqrt{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)}$$
$$= 2\pi\left[\sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} (a_0m^2 + b_0mn + c_0n^2)\, e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi}\right]^{\frac{1}{3}},$$

und das System der beiden Formeln (3) und (4) liefert daher zugleich für beide Functionen:

$$\mathrm{A}(\sigma, \tau, w_1, w_2), \quad \mathrm{A}'(0, 0, w_1, w_2),$$

Definitionen, welche den Invariantencharakter in Evidenz treten lassen.

§. 1.

Die Function A kann als Product zweier Factoren aufgefasst werden, welche für sich einen gewissen Invariantencharakter haben. Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung den Ausdruck:

$$\left(\frac{2\pi}{\vartheta'(0, w)}\right)^{\frac{1}{3}} e^{(\sigma + \tau w)\tau\pi i}\, \vartheta(\sigma + \tau w, w),$$

in welchem:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}$$

ist, mit:

$$\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

und definirt hierin a_0 durch die Gleichung $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$, so wird:

$$\mathrm{A}\left(\sigma, \tau, \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right) = \mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \cdot \mathrm{A}(\sigma, -\tau, a_0, -b_0, c_0).$$

Da die drei Argumente a_0, b_0, c_0 durch eine Gleichung mit einander verbunden sind, so ist die mit *Alpha* bezeichnete Function in Wirklichkeit nur von vier Variabeln, oder, um dies sachgemässer auszudrücken, von zwei Paaren von Variabeln abhängig. Nach den bekannten, im art. I reproducirten Formeln ist sie als Product in folgender Weise darstellbar:

$$(5) \quad \mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = e^{\left(\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)w + \sigma\tau - \sigma + \frac{1}{2}\right)\pi i} \prod_{n, \varepsilon} \left(1 - e^{2(nw + \varepsilon\sigma + \varepsilon\tau w)\pi i}\right),$$

wo die Multiplication auf $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = -1$ und für $\varepsilon = +1$ auf die Werthe $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, für $\varepsilon = -1$ aber nur auf die Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu erstrecken ist.

Mit Hülfe der für die ϑ-Function geltenden Transformationsgleichungen:

$$\vartheta(\zeta, w + 1) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\, \vartheta(\zeta, w),$$

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{-1}{w}\right) = -i(\sqrt{-wi})\, e^{\zeta^2 w\pi i}\, \vartheta(\zeta w, w),$$

$$\vartheta'\left(0, \frac{-1}{w}\right) = (\sqrt{-wi})^3\, \vartheta'(0, w),$$

welche in eben dieser Form schon für die Function $A(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ benutzt worden sind, ergiebt sich unmittelbar, dass:

$$(6)\qquad \begin{aligned} A(\sigma^{(1)}, \tau^{(1)}, a_0^{(1)}, b_0^{(1)}, c_0^{(1)}) &= e^{\frac{1}{6}\pi i} A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)\,, \\ A(\sigma^{(2)}, \tau^{(2)}, a_0^{(2)}, b_0^{(2)}, c_0^{(2)}) &= e^{\frac{1}{2}\pi i} A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)\,, \end{aligned}$$

wird, wenn:

$$\sigma^{(1)} = \sigma - \tau\,,\ \tau^{(1)} = \tau\,,\ a_0^{(1)} = a_0 + b_0 + c_0\,,\ b_0^{(1)} = b_0 + 2c_0\,,\ c_0^{(1)} = c_0\,,$$
$$\sigma^{(2)} = -\tau\,,\ \tau^{(2)} = \sigma\,,\ a_0^{(2)} = c_0\,,\ b_0^{(2)} = -b_0\,,\ c_0^{(2)} = a_0$$

ist. Hieraus folgt aber, dass allgemein:

$$(7)\qquad A(\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0') = e^{\frac{h}{6}\pi i} A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

wird, wenn die Transformationsrelationen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau\,,\quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau\,,\quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1\,, \\ &a_0' = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2\,, \\ &b_0' = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta'\,, \\ &c_0' = a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2\,, \end{aligned}$$

erfüllt sind, in welchen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten. Denn die beiden Gleichungen (6) entsprechen den speciellen Fällen:

$$\begin{aligned} &\alpha = 1\,,\quad \alpha' = 1\,,\quad \beta = 0\,,\quad \beta' = 1\,, \\ &\alpha = 0\,,\quad \alpha' = -1\,,\quad \beta = 1\,,\quad \beta' = 0\,, \end{aligned}$$

und aus diesen beiden »elementaren« Substitutionssystemen lassen sich alle zusammensetzen. Demnach kann der Factor auf der rechten Seite der Gleichung (7) auch nur ein Product von Factoren $e^{\frac{1}{6}\pi i}$, $e^{\frac{1}{2}\pi i}$, wie sie in den Gleichungen (6) vorkommen, d. h. also nur eine zwölfte Wurzel der Einheit sein, und es kann daher h in der Gleichung (7) nur einen der Werthe:

$$0\,,\ \pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 5\,,\ 6$$

haben. Die zwölfte Potenz der Function $A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ bleibt folglich bei jeder der bezeichneten Transformationen ungeändert.

Die Beziehung zwischen zwei durch lineare Transformation aus einander entstehenden ϑ-Reihen wird durch die in der Gleichung (7) enthaltene Invarianteneigenschaft der Function *Alpha* in der elegantesten Weise dargestellt. Diese Function genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$w^2 \frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\,\partial\sigma} - 2w \frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\,\partial\tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial\tau\,\partial\tau} = \big((\sigma + \tau w)\pi i\big)^2 A\,,$$

und ihr Logarithmus lässt sich, wie ich in einem späteren Abschnitte

näher ausführen werde, nach derselben Methode in eine doppelt unendliche Reihe entwickeln, welche ich im art. I zur Entwickelung von $\log \mathrm{A}(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ angewendet habe.

§. 2.

Im art. III ist die oben citirte Umformung des Ausdrucks:

$$(9)\qquad \left(\sqrt{-(w_1+w_2)i}\right) e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\, \vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\, \vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)$$

in die doppelt unendliche Reihe:

$$(10)\qquad \sum_{m,n} (-1)^{mn} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + \left(m(2\sigma+1)+n(2\tau+1)\right)\pi i}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

zu dem Zwecke vorgenommen worden, den Invariantencharakter in Evidenz treten zu lassen. Aber es ist am Schlusse des erwähnten Abschnitts auch der andere Gesichtspunkt hervorgehoben worden, nach welchem eben dieselbe Umformung als eine Reduction der Rosenhain'schen ϑ-Reihe (10) auf einfache (Jacobi'sche) ϑ-Reihen aufgefasst werden kann. Unter diesem letzteren Gesichtspunkt erscheint die Frage natürlich, ob nicht auch die Rosenhain'sche ϑ-Reihe, welche entsteht, wenn man in der Reihe (10) das Zeichen $(-1)^{mn}$ weglässt, auf einfache ϑ-Reihen zurückführbar ist. Es zeigt sich, dass dies in der That der Fall ist, und dass auch dieselbe Methode zum Ziele führt, welche im art. III angewendet worden ist. Nur muss, wie sich von selbst versteht, der dort eingeschlagene Weg in entgegengesetzter Richtung verfolgt werden.

Ich gehe also von der Rosenhain'schen ϑ-Reihe:

$$(11)\qquad \sum_{m,n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(\sigma m + \tau n)\pi i} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

aus, setze wie in den früheren Abschnitten:

$$w_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \quad w_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0},$$

und wende alsdann die im art. III ebenfalls benutzte Transformationsgleichung:

$$(12)\qquad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-n^2\left(\frac{1}{w} - 2n\eta + n\right)\pi i} = \left(\sqrt{-wi}\right) \sum_{\nu} e^{w\pi i\left(\eta + \frac{1}{2}\nu\right)^2}$$

$$(\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

in der Weise an, dass ich darin:

$$2\eta = 2\tau + \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} m + 1 \text{ und } w = w_1 + w_2$$

nehme. Hiernach verwandelt sich jene Reihe (11) in folgende:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}} \sum_{m,\nu} e^{\left(\frac{1}{4}w_1(m+\nu+1)^2 + (\sigma+\tau w_1)(m+\nu+1) + \frac{1}{4}w_2(m-\nu-1)^2 + (\sigma-\tau w_2)(m-\nu-1)\right)\pi i},$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\ \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

in welcher an Stelle von $\nu + 1$ offenbar $2n$ gesetzt und dann auch in Beziehung auf n von $-\infty$ bis $+\infty$ summirt werden kann. Alsdann nimmt aber für jeden bestimmten Werth von $m + 2n$ die andere im Exponenten vorkommende Verbindung, $m - 2n$, genau alle diejenigen ganzzahligen Werthe an, welche dem Werthe von $m + 2n$ *modulo* 4 congruent sind. Es ergiebt sich also schliesslich, dass die Reihe (11) sich in den Ausdruck:

$$(13)\quad \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}} \sum_{r=0}^{r=3} \sum_n e^{\left((4n+r)^2\frac{w_1}{4} + (4n+r)(\sigma+\tau w_1)\right)\pi i} \sum_n e^{\left((4n+r)^2\frac{w_2}{4} + (4n+r)(\sigma-\tau w)_2\right)\pi i},$$

transformiren lässt, in welchem die auf n bezüglichen Summationen auf alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $-\infty$ zu erstrecken sind. Dieser Ausdruck ist offenbar eine Summe von vier Producten je zweier einfacher (JACOBI'scher) ϑ-Reihen; dass derselbe bei den Transformationen, welche im §. 1 mit (8) bezeichnet sind, ungeändert bleibt, tritt in seiner ursprünglichen Gestalt (11) deutlich hervor, aber es lässt sich auch an der Form, in welcher er hier erscheint, mit Hülfe der Relation (12) darthun, wenn man die Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left((4n+r)^2\frac{w}{4} + (4n+r)(\sigma+\tau w)\right)\pi i}$$

durch die ihrem Werthe nach damit übereinstimmende:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left(n^2\frac{w}{4} + n(\sigma+\tau w) + \frac{1}{2}k(n-r)\right)\pi i}$$

ersetzt.

Bezeichnet man diese Reihe zur Abkürzung mit $R_r(\sigma, \tau, w)$, so ist:

$$R_0(\sigma, \tau, w) = \vartheta_3\big(2(\sigma+\tau w), 4w\big),\quad R_2(\sigma, \tau, w) = \vartheta_2\big(2(\sigma+\tau w), 4w\big),$$

$$R_1(\sigma, \tau, w) = R_3(-\sigma, -\tau, w) = e^{\left(\frac{1}{4}w+\sigma+\tau w\right)\pi i}\,\vartheta_3\big(2(\sigma+\tau w)+w, 4w\big),$$

und durch die Formel:

$$(14)\quad \sum_{m,n} e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi + 2(\sigma m+\tau n)\pi i} = \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}} \sum_{r=0}^{r=3} R_r(\sigma, \tau, w_1)\, R_r(\sigma, \tau, w_2)$$

wird alsdann die Zurückführung der ROSENHAIN'schen Reihe (11) auf einfache ϑ-Reihen dargelegt.

Setzt man darin $\sigma = \tau = 0$, so wird:

$$R_0(0, 0, w) = \vartheta_3(0, 4w), \quad R_2(0, 0, w) = \vartheta_2(0, 4w),$$
$$R_1(0, 0, w) = R_3(0, 0, w) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, w),$$

und also:

$$(15) \quad \sum_{m,n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi}$$
$$= \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, w_1)\vartheta_2(0, w_2) + \vartheta_2(0, 4w_1)\vartheta_2(0, 4w_2) + \vartheta_3(0, 4w_1)\vartheta_3(0, 4w_2)\right\};$$

der in sehr einfacher Weise aus ϑ-Functionen gebildete Ausdruck auf der rechten Seite hat also genau dieselbe Invarianteneigenschaft wie $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$, nämlich für alle der Form (a_0, b_0, c_0) aequivalenten Formen (a'_0, b'_0, c'_0) ungeändert zu bleiben, wenn die Werthe w'_1, w'_2 mittels der Gleichungen:

$$w'_1 = \frac{-b'_0 + c}{2c'_0}, \quad w'_2 = \frac{b'_0 + c}{2c'_0}$$

daraus entnommen werden.

Zur Vergleichung dieses Ausdrucks mit der Invariante $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$ führe ich hier die Relation:

$$(16) \quad \frac{1}{\pi}\sqrt{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)} = \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| \left(2\vartheta_0(0, w_1)\vartheta_0(0, w_2)\vartheta_2(0, w_1)\vartheta_2(0, w_2)\vartheta_3(0, w_1)\vartheta_3(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}$$

an, welche aus den im art. XV mit (14) und (16) bezeichneten Gleichungen unter Berücksichtigung der schon in JACOBI's *Fundamenta* angegebenen Beziehung:[1]

$$\vartheta'(0, w) = \pi\vartheta_0(0, w)\vartheta_2(0, w)\vartheta_3(0, w)$$

fliesst. Bei Anwendung der bereits im §. 1 des art. XII gebrauchten JACOBI'schen Bezeichnungen geht aber der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (16) in folgenden über:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| \vartheta_3(0, w_1)\vartheta_3(0, w_2)(4\varkappa_1\varkappa'_1\varkappa_2\varkappa'_2)^{\frac{1}{6}}.$$

Der aus ROSENHAIN'schen ϑ-Reihen gebildete Ausdruck:

$$(17) \quad \left(4\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)}\right)^{-\frac{1}{3}} \sum_{m,n} e^{-\pi f(m,n)},$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

[1] Vergl. die Formel IV in meiner im Monatsbericht vom December 1881 abgedruckten Mittheilung.

in welchem, wie früher, $a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2 = f(m, n)$ gesetzt ist, und welcher seine Invarianteneigenschaft klar zeigt, wird also gleich dem aus einfachen ϑ-Reihen gebildeten Ausdruck:

$$(18)\quad \frac{\frac{1}{2}\vartheta_2(0, w_1)\vartheta_2(0, w_2) + \vartheta_2(0, 4w_1)\vartheta_2(0, 4w_2) + \vartheta_3(0, 4w_1)\vartheta_3(0, 4w_2)}{(x_1 x_1' x_2 x_2')^{\frac{1}{6}}\vartheta_3(0, w_1)\vartheta_3(0, w_2)},$$

und dieser lässt sich mittels der Relationen:

$$\vartheta_0(0, w)\left(\vartheta_3(0, w)\right)^{-1} = \sqrt{x'}, \quad \vartheta_2(0, w)\left(\vartheta_3(0, w)\right)^{-1} = \sqrt{x},$$
$$2\vartheta_2(0, 4w) = \vartheta_3(0, w) - \vartheta_0(0, w),$$
$$2\vartheta_3(0, 4w) = \vartheta_3(0, w) - \vartheta_0(0, w),$$

in welchen der Einfachheit halber die Indices bei w, x, x' weggelassen sind, als explicite algebraische Function von x_1 und x_2 folgendermaassen darstellen:

$$\frac{1 + \sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1' x_2'}}{2(x_1 x_2' x_2 x_2')^{\frac{1}{6}}}.$$

Die bemerkenswertheste Anwendung findet die Formel (15) bei der Summirung jener verallgemeinerten GAUSS'schen Reihen, welche ich im art. X eingeführt habe. Wird nämlich in der dort mit ($\mathfrak{W}$) bezeichneten Gleichung:

$$q = e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{-D}}}$$

gesetzt, so lässt sich die unendliche Reihe mittels der Formel (15) unmittelbar durch algebraische Functionen von singulären Moduln ausdrücken, und die Summation aller jener GAUSS'schen Reihen wird demgemäss für den Fall singulärer elliptischer Functionen und solcher allgemeinerer ϑ-Quotienten, wie sie a. a. O. vorkommen, vollständig ausführbar. Ich werde dies in einer folgenden Mittheilung eingehend darlegen.

§. 3.

Die Methode, welche ich im art. III zur Umwandlung des Products:

$$(1)\qquad e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)$$

in eine ROSENHAIN'sche ϑ-Reihe benutzt und in entgegengesetzter Richtung im vorigen Paragraphen angewendet habe, führt auch zur Transformation des allgemeinen Products:

$$(2)\qquad e^{(\tau_1^2 w_1 + \tau_2^2 w_2 + \sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma_1 + \tau_1 w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma_2 + \tau_2 w_2, w_2)$$

in eine doppelt unendliche ϑ-Reihe, welche einen analogen Charakter zeigt, wie die in der Gleichung (6) des art. XV für das Product (1) aufgestellte Reihe. Hier soll aber dieselbe Methode nur zur Transformation des specielleren Products:

$$(3)\qquad e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma+\tau w_1\,,\,w_1)\,\vartheta_0(\sigma-\tau w_2\,,\,w_2)$$

gebraucht werden.

Dieses Product lässt sich in der Form:

$$\sum_{\lambda,l} e^{\pi i\phi(\lambda,l)} \qquad \begin{pmatrix}\lambda=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots\\ l=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots\end{pmatrix}$$

darstellen, wenn:

$$\phi(\lambda,l)=\tau^2(w_1+w_2)+\tfrac{1}{4}\lambda^2 w_1+\lambda(\sigma+\tau w_1)-\tfrac{1}{2}\lambda+l^2 w_2-2l(\sigma-\tau w_2)+l$$

genommen wird. Setzt man nun:

$$\lambda=2n+1\,,\ l=n+\tfrac{1}{2}(\mu+1)\,,$$
$$\sigma=\tfrac{1}{2}(s+1),\ \tau=\tfrac{1}{2}(t-1)\,,$$

so entsteht eine zweifach unendliche Reihe, in welcher die Summationsbuchstaben n, μ die Werthe:

$$n=0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\pm 3\,,\ldots;\ \mu=\pm 1\,,\pm 3\,,\pm 5\,,\ldots$$

annehmen. Transformirt man hierin die auf n bezügliche Summe mittels der Formel:

$$(4)\qquad \sum_n e^{-n^2\frac{\pi}{c_0}+nx\pi i}=|\sqrt{c_0}|\sum_m e^{-\frac{1}{4}\pi c_0(x+2m)^2}\qquad (m,n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots),$$

indem:

$$x=t(w_1+w_2)+\mu w_2$$

genommen wird, und setzt, wie früher, zur Abkürzung:

$$a_0x^2+b_0xy+c_0y^2=f(x,y)\,,$$

so resultirt die Reihe:

$$(5)\qquad |\sqrt{c_0}|\sum_{\mu,m} e^{-\pi f\left(\frac{1}{2}\mu,m\right)-\frac{1}{2}(\mu m+\mu s+2mt)\pi i}\qquad \begin{pmatrix}\mu=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots\\ m=0,\pm 1,\pm 2,3,\ldots\end{pmatrix},$$

welche also ihrem Werthe nach mit dem Producte (3) übereinstimmt.

Nun kann andrerseits das mit:

$$(6)\qquad e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta_0(\sigma+\tau w_1,w_1)\,\vartheta_0(\sigma-\tau w_2,w_2)\,,$$

dem Werthe nach, übereinstimmende Product:

$$e^{\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta\!\left(\sigma+\left(\tau+\tfrac{1}{2}\right)w_1,w_1\right)\vartheta\!\left(\sigma-\left(\tau+\tfrac{1}{2}\right)w_2,w_2\right)$$

gemäss der Gleichung ($\mathfrak{C}_0$) im art. III durch die Reihe:

$$(7)\qquad (\sqrt{c_0})\sum_{m,n}(-1)^{m(n-1)}e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}\qquad (m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

dargestellt werden. Da ferner der Quotient der Division des Products (3) durch das Product (6) gleich $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w_1),\ \frac{1}{2}w_1\right)$ ist, so resultirt die Gleichung:

$$(8)\qquad \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w),\ \tfrac{1}{2}w\right)=\frac{\sum\limits_{\nu,n}(-1)^n i^{-(n+1)\nu}e^{-\pi f\left(\frac{1}{2}\nu,n\right)+2\left(\frac{1}{2}\nu\sigma+n\tau\right)\pi i}}{\sum\limits_{m,n}(-1)^{m(n-1)}e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}},$$

in welcher die elliptische Function $\mathrm{El}(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w,\ \frac{1}{2}w))$ als Quotient zweier ROSENHAIN'scher ϑ-Reihen ausgedrückt erscheint. Dabei ist das Zeichen f durch die Gleichung:

$$f(x,y)=a_0x^2+b_0xy+c_0y^2\qquad (4a_0c_0-b_0^2=1)$$

ferner w als diejenige Wurzel der Gleichung $f(1,w)=0$ bestimmt, in welcher der mit i multiplicirte Theil positiv ist, und die Summationen sind auf die Werthe:

$$\nu=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots;\quad m,n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots$$

zu erstrecken. Nähere Ausführungen über die Bedeutung des in der Gleichung (8) enthaltenen Resultats, sowie über die daraus zu ziehenden Folgerungen, behalte ich in einer anderen Mittheilung vor.

(Fortsetzung folgt.)

Ausgegeben am 11. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.

XX.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

11. April. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

Hr. Pringsheim las über alkalische Ausscheidungen der Pflanzen im Licht.

Ausgegeben am 18. April.

1889.
XXI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

11. April. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Conze las über eine Form altgriechischer Kohlenbecken.

2. Hr. Mommsen legte vor de Rossi Inscriptiones Christianae urbis Romae septimo saeculo antiquiores II, I.

Zur pergamenischen Gigantomachie.

Von Dr. O. PUCHSTEIN
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. CONZE am 28. März [s. oben S. 229].)

Zweiter Artikel.

Von den Namenbeischriften, welche die einzelnen Göttergestalten der Gigantomachiereliefs am grossen Altar zu Pergamon ehemals deutlich erklärten, habe ich in einem ersten Artikel (s. oben 1888 S. 1231 ff.) nur diejenigen ausführlich besprochen, welchen mit Hülfe der Versatzmarken des Gesimses eine bestimmte Stelle am Altarbau zugewiesen werden konnte. Ausser diesen ist noch eine Anzahl von Namen und Namenresten vorhanden, welche von den Gesimsblöcken abgesplittert sind und infolge dessen mit Versatzmarken nicht mehr in Verbindung gebracht werden können. Wie weit diese Reste trotzdem ebenfalls für die Deutung der zahlreichen noch unerklärten Götterfiguren verwendbar sind, soll hier nachträglich untersucht werden.

Es handelt sich dabei um die folgenden Inschriften, die ich mit den Nummern aufzähle, welche ihnen Hr. FRÄNKEL in Band VIII, 1 der Alterthümer von Pergamon gegeben hat:

93. ᾿Ε]νυώ. Auf der Nordseite des Altarfundaments gefunden.
94. Ε///. Auf der Nordseite des Altarfundaments gefunden.
95. ῞Η]βη. Fundort nicht festzustellen. Vergl. oben 1888 S. 1248
98. ῞Η[λιος oder ῞Η[φαιστος? Im Schutt der byzantinischen Mauer gefunden. Vergl. ebenda S. 1249.
100. Κλωϑ[ώ. Im Schutt der byzantinischen Mauer gefunden.
103. Ποσειδῶν. Vor der Ostseite des Altarfundaments gefunden.
105. ᾿Ωκεανός. Fundort unbekannt.
108. ...ος. Auf dem westlichen Theil der Agora gefunden. Vergl. Nr. 98.
109. ////Φ///. Im Schutt früherer Ausgrabungen gefunden.
110. ////Ρ///. Auf dem südlichen Theil der Theaterterrasse gefunden.
111. ////Α. Auf der Nordseite des Altarfundaments gefunden.

Endlich findet besser neben diesen Fragmenten als neben den im ersten Artikel besprochenen Namen ein Inschriftrest seine Stelle, der auf dem Gesimsblock ME (mit dem Namen des Dionysos) erhalten ist und über der ersten Figur an der rechten Treppenwange stand: es ist nur die untere wagrechte Haste eines Σ oder Ω oder auch Ξ vom Ende eines Götternamens (Nr. 82b).

Ich betrachte zuerst die Namen Okeanos und Poseidon. In welchem Theile des Altarfrieses die entsprechenden Gottheiten zu suchen sind, ergiebt sich aus dem offenbaren Princip der pergamenischen Künstler, die kämpfenden Götter genealogisch und systematisch zu gruppiren. Am deutlichsten ist das bei den Figuren an der Südostecke des Altars zu beobachten: hier hat man in der Asteria und der Hekate Mutter und Tochter unmittelbar neben einander, und weiterhin ist die Schwester der Asteria, Leto, mit ihren Kindern Artemis und Apollon zusammengestellt. Eine ähnliche Gruppe bilden Dione, Eros, Aphrodite und Ares, ferner an der Ostseite des Altars Athena, Zeus, Herakles und Hera, in deren Nähe ich oben die inschriftlich gesicherte Hebe (s. Nr. 95) und den Hephaistos, der gewiss nicht in der pergamenischen Gigantomachie fehlte, vermuthungsweise angesetzt hatte. So treten nun auch die bisher gedeuteten Wassergottheiten in genealogischer Reihenfolge auf: neben der Amphitrite einerseits ihr Sohn Triton, andererseits ihr Vater Nereus, dessen jugendliche Begleiterin mit den aus Fischhäuten oder Seegewächsen gefertigten Stiefeln seine Gattin Doris sein wird. In der Nähe dieser Gestalten müssen auch Poseidon und Okeanos anzutreffen sein; und zwar aller Wahrscheinlichkeit nach so vertheilt, dass ersterer nicht allzuweit von seinem Sohne Triton, letzterer dicht beim Nereus kämpfte, d. h. Poseidon an der Nordseite des Altars unweit der Ecke, Okeanos dagegen an der linken Treppenwange.[1] Hier befindet sich neben der Doris in der That eine innerhalb dieser Reihe dominirende und für die Darstellung des Okeanos gut passende Gestalt von sehr kräftigen Körperformen, mit der Exomis bekleidet und in ihrem Kopftypus dem Nereus auffällig verwandt; sie wird als Waffe ein Ruder benutzt haben, das wie eine Lanze geschwungen wurde und an der linken Schulter, wo einige Gewandfalten nachträglich abgearbeitet sind, eigens befestigt war. Die von Okeanos fast ganz verdeckte Göttin, welche einen Ast schwingt, ist demnach höchst wahrscheinlich Tethys. Dass Okeanos mit seiner Gemahlin an dem einen Endpunkt des Frieses die Reihe der Götter abschliesst, soll nach der Absicht des Künstlers gewiss auf den τελήεις ποταμός, wie ihn Hesiod th. 242 nennt, hindeuten.

---

[1] Vergl. M. Mayer, Giganten und Titanen S. 376.

Wenn wir hiernach um so sicherer den Poseidon auf der Nordseite des Altars neben dem Triton anzusetzen haben, so lässt sich sein Platz mit Hülfe des Gesimses ziemlich genau bestimmen. Man könnte nämlich annehmen, dass das Bruchstück mit dem Namen des Gottes ursprünglich zu dem unmittelbar an den Nordwesteckblock (ΛΕ) anstossenden Gesimsblock (ΜΕ) gehörte; dann würde, da der nördliche Schenkel des ersteren 0.755 lang ist und der Name Poseidon von der rechten Stosskante des Bruchstücks 0.126 absteht, die Inschrift $0.755 + 0.126 = 0.891$ von der Ecke entfernt sein. Nach dem Durchschnittsmaass der Reliefplatten müsste sich demnach das Haupt des Gottes, vorausgesetzt, dass die Inschrift genau über demselben eingemeisselt war, etwa neben der Fuge zwischen der ersten und zweiten Platte befunden haben.

Diese Vermuthung lässt sich durch Betrachtung gewisser Reste des Frieses zur Gewissheit erheben. Es ist nämlich eine sehr schöne Reliefplatte vorhanden, auf welcher ein schon immer dem Poseidon zugewiesenes Zweigespann von Hippokampen dargestellt ist. Hieran haben die Herren Freres und Possenti erst kürzlich einige sicher von der Figur des Poseidon herrührende Fragmente angefügt: seine linke die Zügel des Gespanns fassende Hand, um die sich ein Delphin windet, und darüber den Dreizack, den der Gott mit der Rechten in horizontaler Richtung schwang. Poseidon war demnach auf dem Wagen stehend, etwa in derselben Haltung wie Helios, mit vorgebeugtem Oberkörper dargestellt, so dass thatsächlich sein Kopf von der Ecke so weit, wie oben berechnet ist, entfernt sein musste. Die letzterwähnten Fragmente gehören zu der zweiten Platte, welche hauptsächlich die Fischleiber der Hippokampen und einen Theil des Wagens enthielt, während der Rest des Wagens mit der Figur des Poseidon die vollständig verlorene Eckplatte gefüllt hat. Um bei dem Beschauer des Frieses die Vorstellung zu bestärken, dass an dieser Stelle der Schauplatz des Kampfes im Meere liegt, ist unter den Hippokampen durch wellenförmige Linien Wasser angedeutet; ausserdem befindet sich vor denselben noch ein Stück vom Körper eines grossen Fisches und aller Wahrscheinlichkeit nach werden Bruchstücke von anderen Seewesen, die lose aufgefunden worden sind, namentlich der Kopf eines grossen Delphins und eines von einer Schlange gepackten Schwertfisches, ursprünglich ebenfalls in der Nähe der Hippokampen gesessen haben. Daraus geht aber unzweifelhaft hervor, dass in dem Fries die Scene dargestellt war, wie Poseidon den Giganten Polybotes, der, vom Blitz des Zeus getroffen, ins Wasser getaucht war, durch das Meer hin verfolgt. Bekanntlich berichtet die Sage weiter, dass Poseidon mit dem Dreizack nicht den

Giganten, sondern diesen verfehlend die Insel Kos trifft und erst mit dem in Folge dessen von Kos abgerissenen Stück den Giganten niederwirft.[1] Dieser letztere in der älteren Kunst besonders beliebte Zug ist in der pergamenischen Gigantomachie also nicht zur Darstellung gekommen;[2] andererseits musste ein Schwimmen des Polybotes vom Relief zweifellos ausgeschlossen sein: er stand vielmehr und streckte seinen linken, mit einem Thierfell bewehrten Arm den Hippokampen entgegen, so dass sie sich hoch aufbäumen.

Nach der Besprechung der Meeresgottheiten empfiehlt es sich unmittelbar die Inschrift der Klotho (und der gewiss dazu anzunehmenden Lachesis und Atropos) zu untersuchen, da bereits Mayer a. a. O. S. 379 drei Gottheiten, welche in die grosse Lücke des Nordfrieses zwischen der Nyx und dem Poseidon gehören, als die Moiren zu deuten vorgeschlagen hat. Allerdings haben jene drei neben einander kämpfenden Gestalten übereinstimmend auffällig stark gebildetes Haar, wodurch sie als Schwestern bezeichnet zu sein scheinen, und auch die Stelle, an der sie im Friese eingeordnet sind, würde mit der bekannten Genealogie der Moiren bei Hesiod th. 217, wonach sie nebst den Keren Töchter der Nacht sind,[3] in vollem Einklang stehen. Wenn ausserdem die Keren jener hesiodeischen Stelle von den Erinyen nicht verschieden sind, würde noch ein anderer Umstand dazu geeignet sein, die Deutung der Moiren zu stützen. Neben der östlichsten der drei in Frage kommenden Göttinnen ist nämlich Brust und Untergesicht einer sehr jugendlichen weiblichen Figur erhalten, die man unbedenklich Erinys benennen kann; sie ist mit einem Chiton bekleidet und hat darüber nach Art der Jägerin Artemis den leichten Mantel zusammengerafft um den Leib geschlungen und über die linke Schulter gezogen; auf dem Rücken trägt sie den Köcher, während sie den Bogen in den — jetzt abgebrochenen — Händen gehalten haben wird.[4] Da sie übrigens nicht selbstthätig am Kampfe betheiligt ist, sondern sich zu dem hinter ihr entstandenen Getümmel nach rechts zurück wendet, könnte sich unmittelbar vor ihr eine ihrer Schwestern befunden haben und zu dieser ein auf derselben Platte sichtbarer Lanzenschaft gehören. Möglicherweise

---

[1] S. besonders Mayer a. a. O. S. 194.

[2] Auch auf jüngeren Vasen kämpft Poseidon in der Regel mit dem Dreizack.

[3] Vergl. G. F. Schömann, Die Hesiodische Theogonie, Berlin 1868, S. 132 ff.

[4] Über das Wesen der Erinyen als Jägerinnen vergl. Dilthey in der Archäol. Zeitung XXXI, 1874 S. 81 ff. Eine bildliche Darstellung einer Erinys mit dem Köcher oder mit dem Bogen ist mir nicht bekannt; doch werden in dem von Dilthey a. a. O. S. 87 Anm. 17 angeführten Stellen (Aesch. Choeph. 286. Eur. Or. 274 und Mosch. 4,14) Pfeile der Erinyen erwähnt.

stammen von der dritten Erinys ausser zwei Füssen in Jagdstiefeln auch zwei Stücke kleiner Fackeln, von denen das eine von einer rechten weiblichen und einer rechten Gigantenhand, das andere von einer linken weiblichen Hand desselben Charakters gepackt wird. Für die richtige Deutung aller dieser Fragmente aus dem Inschriftrest ////Φ[illegible]//// eine weitere Stütze zu entnehmen, ist nicht durchaus zuverlässig, da ausser der von Hrn. Fränkel vorgeschlagenen Ergänzung Τισι]φό[νη auch noch andere Möglichkeiten (Φο[ίβη oder Περσε]φό[νη) vorliegen. Jedenfalls würde aber die Gruppirung der Erinyen neben der Nyx, die seit Aeschylos fast allgemein als ihre Mutter gilt,[1] dem oben dargelegten genealogischen Princip der Friescomposition entsprechen und einigermaassen die Erklärung ihrer Nachbarinnen als der Moiren begünstigen.

Aber letzterem beizustimmen hindert mich der Umstand, dass die Moiren nach der wahrscheinlichsten Herstellung des Textes bei Apollodor I, 6, 2 in der Gigantomachie mit ehernen Keulen kämpften,[2] die betreffenden Gottheiten des pergamenischen Frieses dagegen theils mit Lanzen, theils mit einem noch nicht erklärten Instrument[3] bewaffnet sind; die eine derselben wird auch von einem Löwen begleitet. Auf jene Angabe Apollodors möchte ich deswegen besonderes Gewicht legen, weil sich auch sonst einige merkwürdige Übereinstimmungen zwischen der von Apollodor geschilderten Gigantomachie und den Darstellungen des pergamenischen Frieses nachweisen lassen. Dass des Polybotes Verfolgung durch das Meer hin ausdrücklich von Apollodor angeführt wird, will allerdings nicht viel besagen. Aber entscheidend ist die Thatsache, dass nach der Sage bei Apollodor der Gott Apollon den Giganten Ephialtes ins linke Auge schiesst und im Friese wirklich der zu den Füssen des Apollon niedergesunkene schöne Gigant in dem Moment dargestellt ist, wo er sich mit der rechten Hand einen Pfeil aus dem linken Auge zieht. Wenn wir demnach jenen Giganten sicher Ephialtes nennen dürfen, erklärt sich auch, weshalb seine

---

[1] Aesch. Eum. 322. 394 u. ö. vergl. Schömann a. a. O. S. 133 Anm. 1.

[2] Μοῖραι δὲ Ἄγριον καὶ Θόωνα χαλκέοις ῥοπάλοις μαχόμεναι (sc. ἀπέκτειναν); überliefert ist μαχομένας und μαχομένους. Vergl. Mayer a. a. O. S. 203, wo Anm. 107a Belege für die Keule als Attribut von Schicksalsgöttinnen zusammengestellt sind; s. auch Kern im Archäol. Jahrbuch III, 1888. S. 234 ff. Mayer nimmt S. 186 an, dass bei Apollodor nach alterthümlicher Tradition nur zwei Moiren zu verstehen seien, da nur zwei Gegner genannt werden; aber es ist ebensowohl möglich, dass drei Gottheiten gemeinsam gegen zwei Giganten kämpfen, als auch dass in dem Auszuge Apollodor's der dritte Gigant ausgelassen ist.

[3] Diese Waffe hat die Form eines Scheites, das wie ein Schwert — z. B. des Giganten links vom Zeus — mit einer starken Mittelrippe und mehreren Rillen verziert, am oberen Ende aber, wo es von der Hand gefasst wird, abgerundet ist. Man könnte es darnach als eine Schwertklinge ohne Parirstange und ohne Knauf betrachten.

Formen weicher und jugendlicher als die seiner Brüder gebildet sind: denn wie in der Odyssee XI, 305 ff. erzählt wird, tödtet Apollon die himmelstürmenden Otos und Ephialtes, noch bevor sie das reifere Alter erreichten. Übrigens lässt sich hier der Unterschied der poetischen und der plastischen Schilderung deutlich beobachten: während der Bildhauer nur im Stande war, uns einen Moment des Kampfes vor Augen zu führen, erzählt Apollodor auch die Fortsetzung desselben, dass nämlich nach dem Apollon Herakles kommt und den Ephialtes durch einen Schuss in's rechte Auge vollends tödtet.

Von besonderer Wichtigkeit ist es ferner, den Bericht Apollodor's über den Antheil der Athena an dem Gigantenkampfe und ihre Darstellung im Friese mit einander zu vergleichen. Nach ersterem soll sie den Pallas geschunden und auf den fliehenden Enkelados die Insel Sicilien geworfen, ausserdem aber auch den Herakles im Kampfe gegen den Giganten Alkyoneus unterstützt haben. Da nämlich Alkyoneus, vom Pfeil des Herakles getroffen, auf der Stelle, wo ihn die Erde geboren hatte, von neuem zu Kräften kam, rieth Athena dem Herakles, ihn aus seinem Geburtslande Pallene fortzuschleppen. Und erst mit Hülfe dieser List gewann Herakles den Sieg.[1] In dem Friese, wo wir die Schindung des Pallas nicht erwarten werden, sehen wir, wie Athena einen kräftigen, durch doppelte Flügel ausgezeichneten Giganten, der bereits niedergefallen war, ohne irgend eine Angriffswaffe mit der rechten Hand bei den Haaren gepackt und emporgerissen hat und nun mächtig ausschreitend ihn fortzuschleppen versucht, trotzdem er sich mit dem weit ausgestreckten linken Fuss gegen den Boden stemmt, aus dem seine Mutter Ge, vergeblich um Erbarmen flehend, emporsteigt. So ist deutlich die eigenthümliche Todesart des Alkyoneus dargestellt. Wenn auch der Pfeil des Herakles im Relief nicht mehr zu bemerken ist oder schon ursprünglich gefehlt haben sollte, so empfängt doch der Beschauer die Gewissheit vom sicheren Tode des Alkyoneus deutlich genug durch die Schlange der Athena, welche ihn eben umringelt und in die Brust beisst. Dass der Bildhauer die Athena selbst ausführen lässt, was sie nach der Beschreibung des Dichters einem anderen zu thun räth, ist wiederum ein charakteristisches Zeugniss für den Unterschied poetischer und plastischer Darstellung ein und desselben Gegenstandes. Enkelados endlich darf man gewiss in dem gepanzerten Giganten wiedererkennen, der neben dem Alkyoneus rücklings zu Boden gestürzt ist; ob in dem Relief angedeutet war, wodurch er niedergerissen wurde, lässt sich leider nicht mehr

---

[1] Betreffs des Textes bei Apollodor vergl. MAYER a. a. O. S. 172 Anm. 35. Für ἀνεζάλπετο hat DILTHEY, wie ich von befreundeter Seite erfahre, ἀνεθάλλετο vermuthet.

entscheiden, da sein Oberkörper bis auf die Umrisslinien verschwunden ist.

Aus der Übereinstimmung Apollodor's und des Frieses in zwei so wesentlichen Punkten wie der Darstellung des Ephialtes und des Alkyoneus darf man nun wohl die Folgerung ziehen, dass Künstler und Schriftsteller die Gigantomachie nach ein und derselben Quelle geschildert haben und dass wir demnach berechtigt sind, die Angaben Apollodor's zur Ergänzung des Frieses zu verwerthen. Hat aber der pergamenische Künstler demnach wahrscheinlich ebenso wie Apollodor den Moiren als Waffen Keulen in die Hand gegeben, so ist Mayer's Deutung der drei mit Lanze und Schwert kämpfenden Göttinnen völlig unsicher geworden, und wir müssen, da sonst keine der erhaltenen Figuren ein derartiges Attribut führt, die Moiren als verloren betrachten. Ob sie sich ursprünglich ebenfalls an der Nordseite des Altars in der Nähe der Nyx, der Erinyen und jener drei unbenannten Göttinnen befunden haben, hängt von Erwägungen ab, die durch die noch unerklärten Inschriftreste bedingt werden.

Der einzige sicher zu ergänzende Name, welcher noch übrig bleibt, ist Enyo, eine Göttin, welche im Friese bisher nicht wiedererkannt ist. Um zu entscheiden, in welcher Umgebung sie gesucht werden könnte, kommen drei Möglichkeiten in Frage. Am nächsten würde es liegen, sie in der Nähe des Ares zu vermuthen. Aber abgesehen davon, dass derselbe auf seinem Platz zwischen Aphrodite und Athena, bez. Zeus, eine durch seine mythologischen Beziehungen bestimmte Stelle einnimmt, mit welchen Enyo schwer in Verbindung zu bringen wäre, scheint der vor dem Ares verfügbare Raum für sie zu eng zu sein. Denn wie ich in dem ersten Artikel S. 1248 Anm. 1 ausgerechnet habe, bleibt an der Ostseite des Altars zwischen der Ecke und der letzten Platte der Athenagruppe mit der Nike nur eine Strecke von 2ᵐ085 frei. Hier muss aber zweifellos eine an der Nordostecke gefundene Platte gesessen haben, auf welcher das sich bäumende Zweigespann eines Wagens dargestellt ist, auf dem ein Gott, also Ares, mit flatternder Chlamys, den Schild am linken vorgestreckten Arm, stand.[1] Dem entsprechend ist ähnlich wie bei dem Poseidon der Name des Ares auf dem Gesimsblock ЭΔ 0ᵐ82 von der Ecke entfernt eingemeisselt, woraus folgt, dass jene Platte die zweite ist und die erste — leider verlorene — den Wagen des Ares enthielt. Da nun die Platte mit dem Gespann 0ᵐ98 breit erhalten ist, ohne dass der Fugenschnitt links zu bemerken wäre, und somit fast die Hälfte des verfügbaren Raumes bedeckt, kann vor ihr nur eine einzige

[1] Zu Wagen kämpft Ares auch nach Claudian Gig. 75.

andererseits an die Nikeplatte stossende Platte fehlen, welche höchstens für die Darstellung des von den Pferden überrannten Gegners des Ares, nicht aber auch noch für Enyo ausreicht.

Aber man könnte die Enyo, wenn darunter die asiatische Kriegsgöttin von Komana (vergl. Strabo XIII, p. 535), die namentlich mit der römischen Bellona identificirte Ma,[1] verstanden sein sollte, im Friese auch bei einer anderen wesentlich kleinasiatischen Gottheit, der Kybele, vermuthen und sie dann in jener Begleiterin der Grossen Mutter erkennen, welche Mayer a. a. O. S. 375 auf Grund von Nonnos Dionys. 48, 238 ff. Aura genannt hat. Wenn nun freilich in späterer Zeit bisweilen diese kappadokische Enyo in Gesellschaft der Grossen Mutter erscheint,[2] so fehlt doch für die hellenistische Zeit irgend ein Zeugniss dafür, dass man in griechischen Landen die barbarische sonst meistens der Artemis gleichgesetzte Gottheit in die Cultgenossenschaft der Kybele aufgenommen und zugleich mit dieser in den Kreis der olympischen Götter eingeführt hätte. Darum glaube ich einstweilen völlig davon absehen zu müssen, dass die Inschrift der Enyo zu der bezeichneten Friesfigur gehören könnte, und das um so mehr, da für die letztere wenigstens mit einiger Wahrscheinlichkeit das Gebiet umschrieben werden kann, auf dem ihre anderweitige Erklärung zu suchen wäre. Diese Göttin bildet nämlich mit der auf einem Löwen reitenden Kybele und den zwei Göttern, welche gegen den stierköpfigen Giganten kämpfen, eine eng zusammengehörige Gruppe, welche einerseits durch die mit der Kybele ja sehr verwandte Titanin Rhea, andererseits, wie es scheint, durch die sogenannte Eos begrenzt wird. Die Situation jener beiden Götter erinnert lebhaft an die der Zwillinge (vergl. S. 1246): auch hier ist der eine, mit der Chlamys um den linken Arm, dem Unterliegen so nahe, dass ihm der andere, wahrscheinlich zugleich mit der sogenannten Eos, zu Hülfe kommen muss. Wenn nun den letzteren wegen des Hammers, dessen er sich als Waffe bedient, Hr. Conze richtig als Kabir gedeutet hat,[3] drängt sich unabweisbar die Vermuthung auf, dass auch sein Genosse ein Kabir sei, da die Mehrzahl, wenn auch nicht die genaue Anzahl der pergamenischen Kabiren feststeht. Über das Altersverhältniss, in dem die beiden Götter zu einander stehen, lässt sich wegen der ungünstigen Erhaltung leider nichts gewisses sagen. Der eine, ganz nackt, war sicherlich bärtig und bejahrt; dagegen könnte die Tracht der Chlamys bei dem anderen, dessen ganzer Oberkörper verloren ist, dar-

[1] Vergl. Preller-Jordan, Röm. Mythologie[3] II S. 386 und Roscher's Lexicon S. 776.

[2] Vergl. Orelli n. 1903.

[3] Sitzungsberichte d. Akademie d. Wiss. 1881. S. 275.

auf führen, dass er jugendlicher dargestellt war, etwa wie der Παῖς neben dem bärtigen Kabir auf den neuerdings in dem thebanischen Kabirion gefundenen Vasenmalereien.[1] Ein ähnliches Götterpaar kehrt nun aber gerade neben der Kybele auf gewissen attischen und kleinasiatischen Votivreliefs wieder, die Hr. Conze unlängst gesammelt und ausführlich besprochen hat.[2] Hier besteht es in der Regel aus dem jugendlichen von Hrn. Conze Hermes-Kadmilos genannten Mundschenk in der Chlamys und einem bisher ungedeuteten bärtigen, voll bekleideten Gott, welche beide als der Kybele untergeordnet erscheinen. Wie ferner andere Exemplare derselben Reliefgattung zeigen, ist mit dieser Trias noch eine vierte Gottheit vereinigt, welche, meistens eine Fackel tragend, bisweilen aber auch ganz im Costüm der Kybele, theils gemeinsam mit den beiden Göttern dargestellt ist, theils den bärtigen von ihnen verdrängt und, wenn man sich auf die Statistik der wenigen uns erhaltenen Reliefs verlassen kann, im Cultus eine hervorragendere Stellung eingenommen hat. Mögen nun auch derartige Reliefdarstellungen für jeden einzelnen Ort, an dem sie entstanden sind, eine modificirte Bedeutung gehabt haben und daher das Götterpersonal bald in dieser, bald in jener Zusammenstellung aufweisen, so scheint mir doch gegenwärtig kein Zweifel daran möglich zu sein, dass der ihnen allen zu Grunde liegende Verein von zwei weiblichen und zwei männlichen Gottheiten mit der Gruppe des pergamenischen Frieses, d. h. der beiden Kabiren, der Kybele und ihrer wahrscheinlich mit einem Schwert kämpfenden Begleiterin, ebenso aber auch mit den vier samothrakischen Mysteriengöttern[3] identisch ist. Und deswegen kann diese Begleiterin, bez. die Fackelträgerin der Votivreliefs, weder als Enyo noch als Aura erklärt werden. Vielmehr wird man für ihre Benennung folgendes in Erwägung ziehen müssen. Die pergamenischen Kabiren, Söhne des Uranos, also Titanen, waren nach der Localsage die ersten, welche das von der Rhea auf der Akropolis geborene Zeuskind gesehen hatten.[4] Da sich nun in dem Altarfriese die Rhea[5] unmittelbar neben

[1] Athenische Mittheilungen XIII, 1888. S. 420. Taf. IX.

[2] Archäol. Zeitung XXXVIII, 1880. S. 1 ff. Vergl. Athenische Mittheilungen XIII, 1888. S. 207 ff.

[3] Nach dem Scholion zu Apollon. Rh. I, 917 wurden die samothrakischen Grossen Götter von Mnaseas mit Demeter, Persephone, Hades und Hermes (Kadmilos) identificirt.

[4] Vergl. das Orakel C. I. Gr. 3538. Kaibel, epigr. gr. 1035, 7 ff. Welcker, Gr. Götterl. 3, 184 ff. E. Thraemer, Pergamos, S. 263 ff. Die Kabiren sind um den neugeborenen Zeus wohl in ähnlicher Weise wie die Kureten und Korybanten beschäftigt. Ein Altärchen der Korybanten ist in Pergamon neben der Basis einer Priesterin der Μήτηρ Βασίλεια gefunden worden; es wird von Fränkel (Alterthümer von Pergamon VIII, 1 Nr. 68) noch in die Königszeit gesetzt.

[5] Zu der Gestalt der Rhea scheint mir das Bruchstück eines mit Öllaub (oder mit

der Kybele befindet und als Mutter des Zeus durch einen in den Krallen einen Blitz tragenden Adler, der im Rücken der Kybele fliegt, bezeichnet zu werden scheint, so liegt es nahe, auch für die Begleiterin der Kybele[1] und der Kabiren eine Beziehung auf die Zeusgeburt vorauszusetzen. Dann bietet sich aber für sie der Name Adrasteia dar, welcher bekanntlich sowohl der Rhea Kybele selbst als einer der Ammen des Zeus zukommt.[2]

Als letzte Möglichkeit die Inschrift der Enyo zu erklären bleibt noch die Annahme übrig, dass sie als Graee aufzufassen sei. Und dass dies am meisten zutreffe, lässt sich im höchsten Grade dadurch wahrscheinlich machen, dass die Fragmente ///PY/// (d. i. PY) und ///A zu Namen von Gottheiten ergänzt werden können, welche der genealogischen Verwandtschaft und dem Mythos nach unzertrennlich mit der Enyo zusammenhängen. Fränkel hat sehr ansprechend für das eine Εὐ]ρυ[νόμη, die Mutter der Chariten (Hesiod th. 907), und für das andere Πασιϑ]έα vorgeschlagen, wie zwar nicht bei Hesiod, aber doch in dem homerischen, freilich athetirten Verse Il. 14, 269 der Name einer Charitin lautet. Sind diese Ergänzungen richtig, so müssten wir für den Fries die Darstellung von mindestens vier weiblichen Figuren annehmen. Aber das würde uns — falls man dieselben nicht zum Theil in den drei Göttinnen neben den Erinyen erkennen wollte — wegen des Platzmangels, der bald auch viel wichtigeren Gottheiten gegenüber zur Sprache kommen wird, in Verlegenheit bringen: es handelt sich jetzt vielmehr darum das an der Gigantomachie betheiligte Personal einzuschränken, als auf untergeordnete Wesen auszudehnen. Aus diesen Gründen kann ich auch einem anderen Vorschlage Fränkel's, statt Eurynome Ἐ]ρύ[ϑεια (eine Hesperide Apollodor II, 5, 11) und statt Pasithea Λευκοϑ]έα zu lesen, nicht beistimmen. Da man nun den Inschriftrest ///A ausser ///EA auch als ///ΣA auffassen kann, bietet sich um so passender die Ergänzung zu Μέδου]σα dar, als einerseits auch der Name einer von ihren Schwestern, der Euryale, mit dem zweiten Inschriftfragment ///PY/// vereinigt werden kann, andererseits erst hierdurch die oben vermuthete Anwesenheit der Enyo und

---

Lorbeer?) bekränzten Kopfes zu gehören, an dem Hr. Frères auch den Polos nach geringen Resten richtig erkannt hat.

[1] Als Kybele muss man vorläufig doch wohl die auf einem Löwen reitende Göttin mit dem Köcher und als Rhea diejenige mit dem Polos, welche hinter einem Löwen herschreitet, bezeichnen. Da der über letzterer stehende Inschriftrest EΛ oder EA sowohl zu der Ergänzung Rhea, als zu Kybele passt, könnte man auch die Namen der beiden vertauschen.

[2] Vergl. Preller-Robert, Gr. Myth. I. S. 137. Die Adrasteia mit über dem Haupte flatternden Gewand auf Münzen von Laodikeia (Arch. Jahrb. III, 1888, Taf. 9, 19; S. 289) und Apamea (Müller-Wieseler, D. d. a. K. II, 3, 33).

der neben ihr wohl kaum fehlenden Pephredo, der beiden hesiodeischen Graeen, als der Wächterinnen und Schwestern der drei Gorgonen[1], hinreichende Aufklärung findet.

Was nun die Stelle im Friese betrifft, welche jene fünf grausigen Wesen einnahmen, so führt der Fundort des Fragments der Enyo und der Medusa, an der Nordseite des Altars, gerade auf die Gegend, wo wir sie nach ihrer Abstammung von Phorkys und Keto, den Kindern des Pontos, und wegen der Verbindung des Poseidon mit der Medusa und der Euryale würden suchen müssen — in der Lücke zwischen dem Poseidon und der Nyx. Auf letztere ergeben sogar die Worte Hesiods (th. 274):

Γοργοῦς θ', αἳ ναίουσι πέρην κλυτοῦ Ὠκεανοῖο
ἐσχατιῇ πρὸς νυκτός

noch eine ganz bestimmte Beziehung.

In diese Lücke gehören aber, wie ich oben auseinandergesetzt habe, die drei Erinyen, von denen wenigstens eine erhalten ist, und jene drei von Mayer für die Moiren in Anspruch genommenen Göttinnen. Da sie ausserdem kaum für mehr als ein bis zwei Gottheiten und die etwa dazu gehörigen Giganten Raum bieten dürfte,[2] so müssen nach Maassgabe der von mir oben vorgeschlagenen Ergänzungen die drei erhaltenen noch ungedeuteten Figuren entweder Graeen oder Gorgonen sein. Angesichts des Frieses wird man sich sofort dafür entscheiden, dass die Graeen verloren und in den drei langlockigen jugendlichen Gestalten die »schönwangigen« allen grausigen Beiwerks entkleideten Gorgonen zu erkennen sind. Namentlich die Fülle des Haares, das bei der einen, kurz gehalten und mit einem Band umschnürt, über der Stirn hoch aufstrebt und vorragt, bei der zweiten — deren Kopf fehlt — in langen, losen Strähnen in den Nacken und auf die Schultern fällt, bei der dritten endlich, hinter die Ohren zurückgestrichen und über der Stirn vielleicht mit einer Schleife aufgebunden, hinten auf dem Rücken in anmuthiger Fülle sich ausbreitet, würde an den Gorgonen durchaus erklärlich sein: wenigstens wird der Medusa Haar, bevor es Athena in Schlangen ver-

---

[1] Nach Aeschylos, s. Eratosth. catast. ed. Robert p. 130, XXII. — Die beiden Graeen Enyo und Pephredo sind auf dem etruskischen Spiegel Mon. dell' Inst. IX, 56, 2 dargestellt.

[2] Des genaueren verhält es sich mit den Maassen so: die ganze Nordseite ist 28ᵐ53 lang; auf ihre östliche Hälfte entfallen 17 Platten von etwa 14ᵐ77 Länge, so dass für die westliche Hälfte 13ᵐ76 (mit ungefähr 15—16 Platten) übrig bleiben. Da hiervon 9 Platten = 8ᵐ80 erhalten sind, fehlen etwa 5ᵐ Fries, die zum Theil auf die beiden Platten des Poseidon und auf die beiden fehlenden Erinyen mit den Giganten zu vertheilen sind.

wandelte, als ausserordentlich schön gerühmt.[1] Und wie der Anblick der Gorgonen versteinerte, so scheint im Friese die eine derselben ihren Gegner mit erhobenem Kopfe anzuschauen, als wenn sie ihn mit dem Blicke bezwingen wollte: dementsprechend ist an ihren Augen wie bei einem scharf und angestrengt sehenden das Unterlid straff und in horizontaler Linie gebildet, während das Oberlid in starkem Bogen gewölbt ist. Ob ihr der Löwe, welcher sie begleitet, wegen des Brüllens, dessen auch die Gorgonen fähig sind, beigegeben ist, wage ich nicht zu entscheiden.[2]

Wenn der an der Nordseite des Altars noch verfügbare Platz nicht schon durch die Annahme von Erinyen, Gorgonen und Graeen vollständig gefüllt wäre, könnte man aus dem ebenfalls an der Nordseite gefundenen Fragment Ε\\/// auf ein weiteres eben so unheimliches Wesen aus dem Geschlecht des Phorkys und der Keto schliessen, dessen Auftreten in der Gigantomachie nicht Wunder nehmen würde. Hr. Fränkel hat den Rest als ΕΥ gelesen und zu Εὐνομία oder Εὐτέρπη oder Εὖρος zu ergänzen vorgeschlagen. Aber dass die Horen oder Musen im Friese dargestellt waren, ist wegen ihrer grossen Anzahl äusserst unwahrscheinlich; und die Stütze, welche bisher für die Annahme eines menschlich gebildeten Windgottes vorhanden war, wird sich unten als hinfällig erweisen. Höchstens scheint es mir zulässig zu sein in den vier geflügelten Pferden des Gespannes, das an die Ostseite des Altars in die Nähe des Zeus gehört, die Winde zu erkennen.[3] Man könnte den Inschriftrest aber auch zu Εὐμενίδες oder da die Lesung ΕΧ nicht ausgeschlossen ist, zu Ἔχιδνα ergänzen und in letzterem Falle annehmen, dass diese ἀθάνατος νύμφη καὶ ἀγήραος ἤματα πάντα (Hesiod th. 305), die Mutter aller sagenberühmten Ungeheuer, zwischen den vielleicht nicht kämpfenden und daher eng zusammengedrängten Graeen und Poseidon ihren Platz gehabt hätte. Wie dem aber auch sei, so geht aus dem obigen doch hervor, dass die Nordseite des Altars weder für die Eltern der Gorgonen und Graeen, Phorkys und Keto, noch auch für die Moiren, als Töchter der Nyx, Raum genug darbietet.

---

[1] Ovid, Metam. IV, 791 ff. Vergl. auch die Sage von der der Asterope überlassenen Locke der Medusa Apollod. II, 7,3. Paus. VIII, 47,4. Suidas s. v. πλόκιον Γοργόνος. Roscher, Die Gorgonen, Leipzig 1879, S. 81.

[2] Vergl. über das Gebrüll der den Perseus verfolgenden Gorgonen Roscher a. a. O., S. 91, Anm. 192.

[3] Vergl. Nonnos. Dionys. II, 423, wo Zeus auf dem von den Winden gezogenen Wagen in den Kampf gegen Typhon zieht. Auch bei Quintus Smyrn. XII, 191 ff. kehrt Zeus auf dem von Euros, Boreas, Zephyros und Notos gezogenen Wagen in den Himmel zurück. Über die Pferdegestalt der Winde vergl. sonst die bekannten Stellen Ilias 16, 150. 20, 224.

Eine andere Möglichkeit für den Platz der Moiren ergiebt sich aus ihrer zweiten hesiodeischen Genealogie, nach welcher wir sie neben der Themis erwarten könnten. Aber während sich im Fries links von derselben eine geflügelte, bisher Boreas genannte Gestalt befindet, welche in einen ganz anderen Kreis von Göttern zu gehören scheint, bleibt rechts von ihr neben der Asteria nur noch eine einzige Göttin zu benennen, welche gewiss nicht als Vertreterin der drei Moiren gelten kann. Denn auffälliger Weise mit der Stephane geschmückt und mit einem Gewand aus knitterigem Stoffe bekleidet, kämpft sie nicht, wie es nach Apollodor eine Moire sollte, mit der Keule, sondern in hoheitsvoller Ruhe mit der Fackel, mithin einer Waffe, um derenwillen sie offenbar der Sippe der Asteria und Leto zugesellt werden muss. In der That fehlt uns zur Vervollständigung der Verwandtschaft jener beiden ihre Mutter, die Titanin Phoibe (vergl. das an der Südseite des Altars gefundene, schon einmal erwähnte Inschriftfragment ////ΦΟ////). Und gewiss hat der Künstler gerade diese wegen ihres Namens durch das glänzende, seidene Obergewand und wegen ihres alten Beiwortes χρυσοστέφανος (Hesiod th. 136) durch das Diadem charakterisiren wollen. Da sie ferner die Schwester der Themis ist, wird durch ihre Deutung auch diese aus der sonst unverständlichen Isolirung erlöst.

Alle diese Umstände lassen mir die Phoibe so sicher erscheinen, dass ich auch die Deutung der mit der Fackel ihren Gegner angreifenden Göttin auf Demeter, die sonst in den erhaltenen Theilen des Frieses nicht nachzuweisen ist, für ausgeschlossen halte. Ihre Theilnahme an der Gigantomachie wird allerdings weder durch litterarische Quellen noch durch bildliche Darstellungen bezeugt, aber daraus ist für den pergamenischen Fries wohl nicht das Mindeste zu folgern. Es könnte sogar ein bestimmter Grund für ihre Anwesenheit geltend gemacht werden: unter den inschriftlichen Gigantennamen ist auch ein Erysichthon erhalten, und ebenso hiess der riesige Sohn des Triopas, der sich durch seinen Frevel an dem heiligen Haine der Demeter den Zorn der Göttin zugezogen hatte.[1] Dass eine solche Persönlichkeit von ihrem ursprünglichen Kreise gelöst und als Gegner der selben ihm feindseligen Gottheit mit den Giganten verschmolzen sei, entspricht durchaus dem Geiste der alten Dichtung von der Gigantomachie. Um nun im Anschluss hieran sogleich die Frage zu erledigen, an welcher Stelle des Frieses die mit Erysichthon kämpfende Demeter ihren Platz gehabt haben könnte, so wird

[1] Vergl. Mayer a. a. O. S. 42. Die Sage ist besonders durch des Kallimachos Hymnus auf die Demeter bekannt; vergl. dazu jetzt namentlich Roscher's Lexikon d. Myth. u. Erysichthon (Crusius).

dabei wesentlich zu berücksichtigen sein, dass aller Wahrscheinlichkeit nach sowohl ihre Tochter Persephone als auch Hades von der Darstellung am pergamenischen Altar ausgeschlossen war. Denn wie aus Apollodor hervorgeht, hatte Hades seine Tarnkappe für den Gigantenkampf dem Hermes übergeben und sich dadurch seiner sichersten Schutzwaffe beraubt — vermuthlich, weil ihm als dem Herrscher der Unterwelt kein besonderes Interesse an der Vertheidigung des Himmels zugeschrieben wurde. Wie Hades durfte aber auch Persephone dem Kampfe fern bleiben (vergl. das Inschriftfragment ΦO oben S. 327 und 335).[1] Wenn demnach aus diesem Kreise vermuthlich allein die Demeter im Friese anzusetzen ist, wüsste ich für sie nur die Ostseite des Altars vorzuschlagen, wo zwischen der Hera und dem Apollon noch ein Raum von etwa 4^{m} verfügbar ist. Dies ist endlich auch der einzige freilich äusserst beschränkte Platz, der den Moiren angewiesen werden könnte. Dass sie an so hervorragender Stelle, mitten unter den höchsten olympischen Göttern, im Friese erscheinen, wird vermuthlich ebenso wie ihre ausdrückliche Erwähnung bei Apollodor durch die poetische, von den Künstlern benutzte Quelle veranlasst sein.

Als letztes von den Inschriftfragmenten bleibt nunmehr noch die armselige Buchstabenhaste zu besprechen, welche, auf dem Eckblock ME erhalten, dem Namen einer Gottheit angehört, die auf der rechten Treppenwange zwischen Dionysos und den Nymphen dargestellt war. Das ist höchst wahrscheinlich Hermes gewesen. Denn abgesehen davon, dass für ihn am ganzen Altar kein anderer Platz mehr aufzufinden ist, erhalten wir so bei Annahme von drei Nymphen[2] an der rechten Treppenwange ebenso viele Figuren wie an der linken (Nereus, Doris, Okeanos, Tethys). Ausserdem treffen wir hier den Hermes in einer für ihn durchaus passenden Umgebung. Denn einerseits ist er mit dem Dionysos offenbar deswegen zusammengestellt, weil er gleich diesem von einer den Titanen und Olympiern nicht ebenbürtigen Mutter abstammt, andererseits ist uns von kleinen ihm geweihten Cultbildern keine Scene so sehr geläufig als die, dass er drei Nymphen führt. Um nicht zu erwähnen, dass er in Pergamon

---

[1] Bei Claudian Gig. 44 ff. nimmt dagegen sowohl Pluton als Proserpina an dem Kampfe theil; letztere auch nach der kyzikenischen Localsage, s. Stephan. Byz. s. v. Βέσβικος.

[2] Wie Hr. Possenti vermuthet, gehört zu einer dieser Nymphen der Torso einer kleinen vom Rücken gesehenen weiblichen Figur, deren Chiton sich auf der rechten Schulter gelöst hat; sie trägt über dem Chiton schräg auf dem Rücken, von der linken Seite nach der rechten Schulter, ein kleines zusammengerolltes Himation.

namentlich auch als Θυραῖος verehrt wurde,[1] haben wir durch eine metrische Inschrift erfahren, dass auf dem Markte das Bild des Διάκτορος den Nymphen geweiht war.[2] Nach Apollodor trug er in der Gigantomachie des Hades Helm (vergl. S. 336). Dieser Umstand dient vielleicht dazu uns zu erklären, welche Nymphen unter seinen Begleiterinnen zu verstehen sind und weshalb sie hier gegenüber dem Okeanos und Nereus ihren Platz erhalten haben. Es werden dieselben sein, welche in der Perseussage die Flügelschuhe und den Hades-Helm in Verwahrung haben und dem Herakles auf seiner Fahrt zu den Hesperiden verriethen, wo Nereus zu finden sei.[3]

Hiermit ist die Besprechung der Götterinschriften und der sich daraus ergebenden Möglichkeiten für die Deutung einzelner Figuren des Altarfrieses erschöpft. Wenn nunmehr von den sämmtlichen erhaltenen Göttergestalten allein vier an der Südseite des Altars dargestellte unbenannt bleiben, kann es nach einer in vielen Fällen so sicheren Vertheilung einzelner Götterclassen nicht zu viel gewagt erscheinen, wenn ich versuche, auch deren Namen ausfindig zu machen, zumal da sich aus den vorhandenen Resten der ganze Südfries auf Grund sehr zuverlässiger Combinationen der HH. Freres und Possenti mit nur vier Unterbrechungen von je einer Platte derart herstellen lässt, dass man die Anzahl und Reihenfolge der Götter genau bestimmen kann.[4] Dieselben sondern sich in vier Gruppen: an der Südwestecke sind zunächst die pergamenischen Mysteriengötter Kybele, Adrasteia, der Kabir und Kadmilos dargestellt, denen nahe der Südostecke die Titaninnen Asteria, Phoibe und Themis entsprechen; die ganze Mitte der Südseite nehmen dagegen namentlich die Tagesgestirne ein, Helios zu Wagen, ihm voraus die sogenannte Eos reitend, hinter ihm zu Fuss eine Göttin, von der nur der schlichte Kopf mit einfacher Binde im Haar und die Brust erhalten ist, endlich, wiederum zu Pferde (oder wie man will auf einem Maulthier), die sogenannte Selene. Zwischen dieser letzten und der Themis bleibt nun die vierte noch zu deutende Gruppe von drei Gottheiten übrig: eine geflügelte, höchst wahrscheinlich weibliche Figur, ferner der nach Tracht und Formen so auffällige jugendliche Gott, der, mit einer schurzartig um die Hüften geschlungenen Chlamys bekleidet, den löwenköpfigen Giganten Leon würgt, endlich der sogenannte Boreas.

---

[1] Vergl. A. Conze, Erster vorläufiger Bericht S. 78.

[2] Sitzungsber. d. Akad. d. W. 1884 S. 10. Alterthümer von Pergamon VIII, 1 Nr. 183.

[3] Apollodor II, 5, 11. Vergl. Preller, Griech. Myth.[3] II, S. 66 f. Apollon. Rh. IV, 1414: Νύμφαι — ἱερὸν γένος Ὠκεανοῖο.

[4] Die 26 erhaltenen Platten der Südseite messen insgesammt etwa 24^{m}35, so dass von der ganzen Länge 28^{m}53 für die vier fehlenden 4^{m}18 bleiben.

Am leichtesten von diesen vier Gottheiten ist offenbar die weibliche Figur inmitten der drei grossen Himmelslichter zu benennen; um diese Gruppe genealogisch abzurunden, fehlt eben nur die Mutter der drei Geschwister Helios, Eos und Selene, die Titanin Theia. Wie nun aber an der Nordseite des Altars an die Spitze der Sternbilder Nyx gestellt war, so müssen wir doch auch ihr Gegenbild an der Südseite in der Nähe der Tagesgestirne nothwendig voraussetzen: es wird also die geflügelte Göttin hinter der sogenannten Selene die λευκόπτερος Ἡμέρα[1] sein, die gleich der Nyx nicht unter, sondern neben den Gestirnen einen Platz erhalten hat. Ist diese Deutung richtig, so wird es auffallen, dass nach den bisherigen Benennungen Selene sowohl unmittelbar neben der Hemera als andererseits östlich hinter dem Helios, die Eos aber westlich vor demselben erscheint. Dieser Anstoss ist leicht zu beseitigen, wenn man die Namen der beiden schönen Reiterinnen vertauscht und die westlichere, welche vermuthlich mit einer Fackel dem Kadmilos zu Hülfe eilt, Selene, die Nachbarin der Hemera aber Eos nennt.[2]

Neben den Kindern der Theia hat die Hemera so zu sagen nur wegen ihres physikalischen Wesens eine Stelle. Dass ausserdem aber auch ihre genealogischen Beziehungen berücksichtigt sein mögen, wird uns durch das nun so oft erprobte Compositionsprincip der pergamenischen Künstler verbürgt. Sie ist nach Hesiod th. 124 die Tochter der Nacht und des Erebos und Schwester des Aither; von diesem soll sie auch einen Sohn, den Brotos, gehabt haben.[3] Liegt es daher nicht äusserst nahe, diesen Bruder und Gemahl der Hemera in ihrem jugendlichen Nachbar, dem langlockigen, mit einem Schurz bekleideten Gott von sehr zarten, weichen Formen, zu erkennen?

---

[1] Eurip. Troad. 848. Vergl. *volucris dies* Horat. carm. III, 28, 6 und IV, 13, 16.

[2] Bereits Furtwängler hat Samml. Saburoff zu Taf. 63 Anm. 19 die vor dem Helios reitende Selene genannt, indem er zweifelte, dass Eos zu Pferde dargestellt sein könnte. Vergl. dazu Stephani, Compte rendu 1860 S. 46 ff. — Ein sonderbarer Zufall, den ich erst nach der oben vorgeschlagenen Namensvertauschung bemerkt habe, mag hier noch erwähnt werden. Die jetzt von mir Eos genannte Figur (etwa 11ᵐ5 von der Südostecke entfernt) hat am Altar nach Bohn's Vermessungen der Gesimsblöcke etwa unter dem (nicht erhaltenen) Block, der die Marke ΝΔ trug, ihren Platz gehabt. ΝΔ ist aber auch die Marke des von uns an die Nordseite versetzten Blockes mit dem noch unerklärten Namensrest, den Fränkel anfänglich zu ΗΩΣ ergänzt hatte. Unter solchen Umständen lag die Vermuthung nahe, dass der letztere Block aus der nördlichen Δ-Reihe auszuscheiden und in die südliche zu versetzen wäre. Aber nachdem ich im Museum die beiden Blöcke ΝΔ und ΞΔ (Dione) habe an einander passen lassen, ist nach allen technischen Merkmalen, wie den Klammern und den Aufschnürungen für die Stufe der Säulenhalle, kaum ein Zweifel daran zulässig, dass sie wirklich zusammengehören, also der Namensrest von ΝΔ auf den einen Zwilling bezogen werden muss (vergl. oben 1888 S. 1246).

[3] Nach Hesiod, s. Etym. Magn. 215, 36.

Jedenfalls ist seine Theilnahme am Gigantenkampfe durch das Claudianische Gedicht bezeugt, in dem er gleichsam als Herold den Göttern das Zeichen zum Angriff giebt.[1]

Die letzte der noch zu erklärenden Figuren ist jener bärtige und geflügelte Gott, den man bisher für Boreas zu halten geneigt war — ein Deutungsversuch, der nunmehr in Folge der Bestimmung der Nachbargötter, nämlich einerseits des Aither und der Hemera, andererseits der Themis und Phoibe, als Wesen, die den ältesten Generationen der Göttergenealogie angehören, alle Wahrscheinlichkeit verliert. Abgesehen davon, würde für den rauhen und struppigen Windgott weder der Kopftypus dieser Figur — das hagere Antlitz eines bejahrteren Mannes mit sehr feinen Zügen und mildem Ausdruck — noch ein eigenthümliches Detail seiner Darstellung im Friese besonders charakteristisch sein. Es ist nämlich mitten auf die Federn seines linken Flügels ein ovales Auge gesetzt, das, ursprünglich vom (jetzt fehlenden) rechten Arm der Themis verdeckt, nur am unteren Rande voll ausgearbeitet, sonst mehr skizzenhaft angedeutet ist; die entsprechende Partie des rechten Flügels, wo das Auge vollständig wiederholt sein musste, ist leider abgebrochen.[2]

Alle diese Eigenschaften des fraglichen Gottes, sein Platz, seine Formen, die Augen auf den Flügeln, führen mit grösster Wahrscheinlichkeit darauf, dass es der *ἡλιωπός*, bez. *ἀστερωπός* Uranos[3] sei, freilich nicht der Sohn von Aither und Hemera,[4] sondern der

---

[1] Den Gegner des vermeintlichen Aither, den löwenköpfigen Giganten Leon, identificirt Mayer a. a. O. S. 188 f. mit Leos, dem Herold der Pallantiden in dem Kampfe zwischen Hagnus und Pallene.

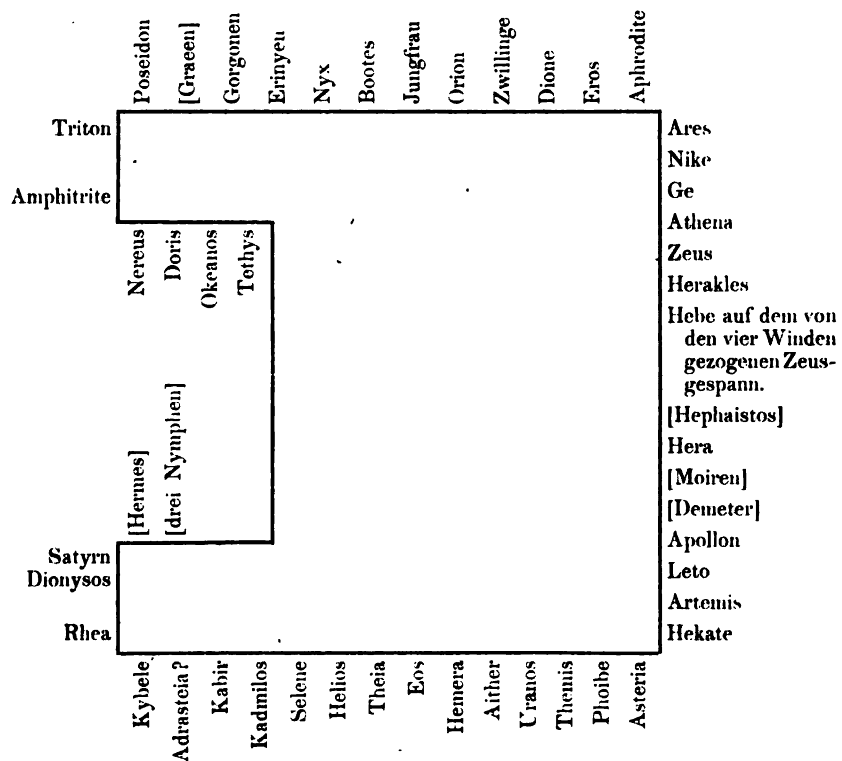
[2] Das Auge besteht eigentlich aus zwei von einem einzigen grossen Lide umschnürten Augäpfeln, zwischen denen auch die Brauen angedeutet zu sein scheinen. Ein solches vollkommen deutlich erhaltenes Doppelauge befindet sich auch auf einem Flügelbruchstück, das wegen der mehr flossen- als federartigen Bildung einem Giganten angehört — etwa dem *γηγενής* Argos Panoptes (vergl. Aesch. Prom. 568. 676. Suppl. 301. Apollodor II, 1, 4. Wieseler, Giganten S. 171. Preller-Robert, Gr. Myth. I, S. 396)? Das Bruchstück ist südlich vom Altar gefunden worden; wenn es von der Südseite selbst herrührte, könnte es nur einem verlorenen zweiten Gegner der Theia angehören; wahrscheinlich ist jedoch, dass Hermes mit dem Argos kämpfte. Je ein einfaches Auge ist übrigens bisweilen auf den Flügeln gewisser etruskischer Dämonen (z. B. Brunn, Rel. d. urn. etr. XIV, 30 = Jahn, Arch. Beitr. Taf. 9 bez. 13, 2, S. 343 und Clarac 214bis, 204bis = Micali, Storia Taf. 105. Vergl. Brunn in Annali dell' inst. XL, 1868, S. 356 ff.) dargestellt.

[3] *Οὐρανὸς ἡλιωπός* Eur. b. Philodem *π. εὐσ.* p. 22. Bei Aristoph. nub. 285 heisst es von der Sonne: *ὄμμα γὰρ αἰθέρος ἀκάματον σελαγεῖται μαρμαρέαις ἐν αὐγαῖς*, wozu die Scholien anführen, dass von den Tragikern die Sonne auch *ὀφθαλμὸς αἰθέρος* und von Philosophen *ὀφθαλμὸς τοῦ οὐρανοῦ* genannt sei. Über *οὐρανὸς ἀστερωπός*, wie *αἰθὴρ ἀστερωπός* Eur. Jon 1078, siehe Hense, Poet. Personification S. 28.

[4] Vergl. Eumelos, Titanom. fr. 2 (Kinkel). Cramer, Anecd. Ox. I, p. 75. Cicero de nat. d. 3, 17. Hygin. fab. praef.

Vater von Themis und Phoibe und all der anderen von den erdgeborenen Giganten bedrohten Titanen und Olympier, der als Pendant der Ge auf Seiten der Götter um so weniger fehlen kann, als ihm besonders der Angriff der übermüthigen Erdensöhne gilt.[1]

Das schliessliche Resultat der obigen Untersuchungen zeigt die folgende Vertheilung der Götter um die vier Seiten des pergamenischen Altars:



Nur in wenigen Fällen hat sich oben die Veranlassung geboten, auf die Namen der im Fries erhaltenen Giganten einzugehen. Da aber diese am Altar ebenso wie die Götter durch Inschriften, welche zusammen mit den Künstlernamen auf dem Sockelglied der Reliefplatten standen, einzeln benannt waren, mag im Anschluss an die noch vorhandenen Inschriften hier kurz dargelegt werden, inwiefern es möglich ist, über die Auswahl der pergamenischen Giganten ein Urtheil zu fällen.

---

[1] Man erinnere sich, dass Homer Od. XI, 315 von Otos und Ephialtes sagt:
Ὄσσαν ἐπ' Οὐλύμπῳ μέμασαν θέμεν, αὐτὰρ ἐπ' Ὄσσῃ
Πήλιον εἰνοσίφυλλον, ἵν' οὐρανὸς ἀμβατὸς εἴη.

Wie die einzelnen Gesimsblöcke trugen auch die Platten, aus denen der Reliefsockel gebildet ist, ähnliche Versatzmarken, aber sie sind so spärlich erhalten, dass man die ursprüngliche Reihenfolge derselben nicht mehr ermitteln kann. Nur folgende Bruchstücke mit Gigantennamen und Marken sind im Ausgrabungsgebiet zerstreut gefunden worden:[1]

70a. Δ mit Πελ]ωρεύς.
121. IB mit Στύ]φελο[ς.
118. NB mit Οὔδαῖος.
126. ΓΓ oder ΣΓ (oder etwa ΓΕ bez. ΣΕ?) mit -- ων.
123. ΔΓ mit Τα --.
74b. ΥΓ mit --- ος.

Dazu kommen noch einige Reste von Künstlernamen:

70c. Ε mit ἐπόησαν.
75. ΓΓ oder ΕΓ oder ΣΓ mit 'Ο]ρέστης 'Ορ[έ]στο[υ.
74c. ΧΓ mit - ναῖος ἐπόη[σεν.

Beim Vergleich dieser Versatzmarken mit denen des grossen Gesimses ist vor allem zu bemerken, dass hier zwei dort fehlende Serien, die eine mit einfachen Buchstaben, die andere mit dem Nennbuchstaben Β, neu erscheinen. Es würde daher gänzlich unzuverlässig sein, wenn man die Versatzmarken des Gesimses mit denen des Sockels in Beziehung setzen und beispielsweise für beide Theile eine Γ-Reihe an derselben Altarseite annehmen wollte. Ausserdem ist bei dem Sockel die Anordnung auch noch insofern verschieden, als die Marken regelmässig neben den Kanten der Platten eingemeisselt sind; Hr. Fabricius hat daraus geschlossen, dass sich jedesmal dieselbe Marke auf zwei an einander stossenden Platten neben der Fuge befand, also jede Platte zwei Marken enthielt (z. B. ΑΒ | ΑΒ ΒΒ | ΒΒ ΓΒ | ΓΒ u. s. w.). Während nun eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden ist, dass die Bruchstücke Δ und Ε in der Reihenfolge Δ|Ε neben einander lagen, haben Fabricius und Fränkel bei ΧΓ und ΥΓ es auch für möglich gehalten, die entgegengesetzte Reihenfolge, also ΥΓ | ΧΓ, anzunehmen. Da ferner auch die oben unter 126 und 75 aufgeführten, auf geringfügigen Bruchstücken stehenden Marken wegen der Vieldeutigkeit der Buchstabenreste eine sichere Zusammenordnung mit ΔΓ nicht zulassen, muss überhaupt die Reihenfolge der erhaltenen Sockelplatten unentschieden bleiben.

Bei den Gesimsinschriften hatte uns der Umstand zur Ermittelung des Zählsystems verholfen, dass gewisse Namen auf Figuren

[1] Ich gebe die Gigantennamen mit den von Hrn. Fränkel vorgeschlagenen oder angenommenen Ergänzungen.

des Frieses bezogen werden konnten. Aber ein ähnliches Experiment ist bei den drei vollständigen oder doch einigermaassen sicher zu ergänzenden Gigantennamen gänzlich ausgeschlossen, da ihre Träger zu wenig individualisirt, noch auch die göttlichen Gegner derselben bekannt sind. Udaios ist einer der fünf geretteten Sparten; vermuthlich ist auch Peloreus von dem Sparten Pelor nicht verschieden; ausserdem scheint als dritter Χθόν[ιος] und vielleicht auch Ἐχί]ων (vergl. oben Nr. 126) vorhanden zu sein, der nach Claudian Gig. 104 vom Gorgoneion der Minerva versteinert wird. Sollten nun diese Giganten der Sage nach unter einander ebenso eng verbunden sein wie die gleichnamigen Sparten, so könnte man vermuthen, dass sie im Friese gleich den Göttersippen nahe bei einander, vielleicht gegen eine bestimmte Göttergruppe kämpften. Das scheint jedoch keineswegs der Fall gewesen zu sein, da die zu den Namen Peloreus und Udaios gehörigen Marken Δ und NB ihrem vermuthlichen Zählwerth nach zu weit von einander abliegen. Man wird sich also hüten müssen, der Namensübereinstimmung bei Giganten und Sparten zu viel Werth beizumessen. Ähnlich ist auch wohl zu beurtheilen, dass der Name Styphelos, wie Fränkel bemerkt hat, bei einem Kentauren (Ovid, Metam. 12, 459) wiederkehrt; auch Mimas, der vielfältig bezeugte Gegner des Ares, ist ein Kentaurenname,[1] desgleichen Agrios[2] und Eurytos,[3] die wir für die pergamenische Gigantomachie durch Apollodor als Gegner der Moiren, bez. des Dionysos, kennen lernen.

Über die sonstigen inschriftlich erhaltenen Gigantennamen Μόλοδρος, Ἄλληκτος, Εὐρυβίας, Ὄβριμος, Ὀλύκτωρ, Ὀχθαῖος, Χθονόφυλος, Πα]λαμνεύς, Παλλη]νεύς (oder Ἀλκυο]νεύς), Χαρ]αδρεύς, Σθέ]ναρος, Φαρ]αγγεύς, -υξ-, -μησ-, -ης, -ς weiss ich in Bezug auf die Darstellung nichts zu sagen. Βρο-- ist dem schönen Giganten an der rechten Treppenwange beigeschrieben; über Ἐρυσίχθων vergl. oben S. 335.

Wie man aber schon früher litterarische Quellen zur Benennung einzelner Giganten herangezogen hat, namentlich für Leon, den Gegner des Aither, und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit für Typhon,[4] den Gegner der beiden Kabiren und der Selene (vergl. auch oben S. 1246 Idas und Lynkeus), so scheint mir jetzt Apollodor's Bericht über die Gigantomachie noch mehr, als es oben bei der Deutung von Ephialtes, Alkyoneus, Enkelados und Polybotes gezeigt worden ist, in Bezug auf Gigantennamen ergiebig zu sein. Denn, wie theilweise

[1] Hesiod sc. Herc. 186.
[2] Apollodor II, 5. 4.
[3] Wieseler in der Halle'schen Encyclop. u. Giganten S. 177. Vergl. S. 150 und Mayer a. a. O. S. 200.
[4] Mayer S. 375.

schon erwähnt, müssen wir wegen der Apollodor und dem Fries gemeinsam zu Grunde liegenden Quelle annehmen, dass auch in letzterem die Gegner der Moiren Agrios und Thoon, der des Hermes Hippolytos,[1] der des Dionysos Eurytos hiessen. Leider ist kein einziger der genannten im Fries erhalten. Dagegen besitzen wir noch den schönen bärtigen Giganten, der von der dreigestaltigen Hekate mit Fackel, Schwert und Lanze angegriffen wird: nach Apollodor ist er Klytios zu nennen; wenn unsere Überlieferungen über den Gigantenkampf ausführlicher wären, würden wir höchst wahrscheinlich besser verstehen, weshalb er vom Künstler in seiner besonderen Gestalt gebildet worden ist.[2] Auch für den Gegner der Artemis hat Apollodor einen Namen, »Gration«, wie er nach der handschriftlichen offenbar verderbten Lesung lautet. Bevor wir uns über diese entscheiden, muss vorausgeschickt werden, dass im pergamenischen Friese Artemis mit zwei Gegnern kämpft, mit einem bärtigen, schlangenbeinigen, der von ihrem Hunde in's Genick gepackt wird, und mit jenem sehr jugendlichen mit Helm, Schild und Schwert bewaffneten, gegen den die Göttin ihren Bogen spannt. Bei der letzteren Gruppe hat man sich seit ihrer Zusammensetzung an die Schiller'sche Scene zwischen Johanna und Montgomery erinnern lassen. Wenn durch diesen Vergleich der vom Künstler beabsichtigte Eindruck richtig erklärt wird, ist man gewiss auch berechtigt in dem Giganten den zweiten Aloaden, Otos, zu erkennen', der nach der Sage um Artemis freite und in Folge dessen zugleich mit seinem Bruder Ephialtes, den es nach der Hera gelüstet haben soll, durch eine List der Göttin umkam. Beide Brüder sind im Friese gleich jugendlich gebildet und ähnlich bewaffnet (vergl. S. 328). Heisst demnach der eine Gegner der Artemis allem Anscheine nach Otos,[3] so kann der von Apollodor genannte Gration nur mit dem älteren schlangenbeinigen Giganten identisch sein. Von allen Vorschlägen nun, die man zur Verbesserung der Lesung Γρατίων gemacht hat, dürfte keiner das richtige so wahrscheinlich treffen als der, Αἰγαίων, d. h. den Namen eines der berühm-

---

[1] Nach der oben S. 339, 2 ausgesprochenen Vermuthung hat Hermes im Fries noch gegen einen zweiten Giganten, den Argos Panoptes, gekämpft.

[2] Vergl. über Klytios Mayer a. a. O. S. 185, wegen seiner Zusammenstellung mit Hekate S. 203. Den Kopf dieses Giganten hat man bekanntlich mit dem des Laokoon zusammengestellt. — Über die sehr wahrscheinliche Verbesserung der Apollodorstelle Κλύτιον δὲ, φασίν, Ἑκάτη, μᾶλλον δὲ Ἥφαιστος βαλὼν μύδροις (ἔκτεινε) in Κλύτιον δὲ δᾳσὶν Ἑκάτη, Μίμαντα δὲ Ἥφαιστος κ. τ. λ. s. Mayer S. 204 f. Dass jedoch der Aresgegner mit Hephaistos gruppirt sei, passt nicht zu dem Charakter der Apollodorischen Quelle.

[3] Auf die Deutung des Otos bin ich hauptsächlich durch eine Besprechung mit Hrn. Robert geführt worden.

testen Giganten, der auch auf der Vase des Erginos und Aristophanes gegen die Artemis kämpft,[1] wiederherzustellen. Gerade jene Vase erweist sich durch Gruppirungen wie Poseidon-Polybotes, Zeus-Porphyrion, Athena-Enkelados, Apollon-Ephialtes, Ares-Mimas (oder Mimon) als sehr sorgfältig in der Benennung der Giganten; ihr Künstler wird daher aus einer Quelle geschöpft haben, die hierin von derjenigen Apollodor's und des pergamenischen Frieses nicht abwich. Ein anderer, ebenfalls von Artemis und Apollon getödteter Sohn der Erde ist in der pergamenischen Gigantomachie der Leto gegenübergestellt, Tityos, der sich an der hehren Gemahlin des Zeus zu vergreifen gewagt hatte. Der Künstler hat diesen Überfall der Göttin mitten in das Kampfgewühl verlegt und den Tityos dargestellt, wie er auf einer niedrigen Felserhöhung sitzend, die Linke auf den Boden gestützt, mit der Rechten nach der Leto griff, um sie auf seinen Schoss zu ziehen[2] — aber empört stösst ihm die Göttin die hoch auflodernde Fackel in's Gesicht, so dass er, hintenüber fallend, mit der Rechten die ihn bedrohende Waffe abwehren muss und nur die Füsse zum Angriff frei behält. Was den Künstler veranlasst hat, dem Tityos Flügel und statt der Hände Vogelkrallen zu geben und aus seinem Rücken eine Schlange hervorwachsen zu lassen, kann ich einstweilen nicht erklären.

Was endlich den besonders kraftvollen Hauptgegner des Zeus betrifft, so darf man denselben, wie mir scheint, zuversichtlich Porphyrion nennen; er wendet im Friese wie auf der Vase des Erginos und Aristophanes dem Beschauer den Rücken zu. Auch an seiner Darstellung kann man den durch die künstlerischen Mittel

---

[1] Berlin 2531. Abgebildet u. a. bei Gerhard, Trinkschalen II, III. Von dem Namen des Gegners der Artemis ist nur ΓΑΙΩΝ erhalten, das Furtwängler noch einmal freundlichst nachgeprüft hat. Seine Lesung *Γαίων* hat theilweise die Billigung Robert's (bei Preller, Griech. Myth.4 S. 71, 5) erfahren. Aus Apollodor muss man jedoch wohl schliessen, dass der Name länger war. Auf der Schale ist zwar für das fehlende ΑΙ genügender Raum vorhanden, aber keine Spur davon erhalten. *Αἰγαίων* hatte man übrigens bisher allgemein ergänzt, vergl. Wieseler a. a. O. S. 142.

[2] Vergl. Odyssee XI, 580:

Λητὼ γὰρ ἥλκησε, Διὸς κυδρὴν παράκοιτιν,
Πυθώδ' ἐρχομένην διὰ καλλιχόρου Πανοπῆος

und Apollodor I, 4. 1: (Τιτυὸς) *ἐρχόμενος εἰς Πυθώ, Λητὼ θεωρήσας πόθῳ κατασχεθεὶς ἐπισπᾶται, ἡ δὲ τοὺς παῖδας ἐπικαλεῖται, καὶ κατατοξεύουσιν αὐτόν.* —

Wenn Figuren von so ausgebildeter Individualität wie Tityos, Otos, Alkyoneus, Argos, Erysichthon unter den Giganten angetroffen werden, wird man es auch für möglich halten, dass mit dem zweiten schlangenbeinigen Gegner des Apollon Python gemeint sei und dass die beiden mit den Zwillingen kämpfenden Giganten wirklich Idas und Lynkeus sein sollen (vergl. S. 342). Demnach ist es, wie auch der Inschriftrest auf dem Block ΝΔ zu deuten sein mag, immerhin das wahrscheinlichste, dass die Zwillinge mit den Dioskuren identisch sind.

bedingten Unterschied zwischen poetischer und plastischer Schilderung beobachten. Während Zeus im Fries gegen Porphyrion einfach den Blitz schleudert, erzählt uns Apollodor, dass der König der Giganten, bevor er vom Blitz des Zeus getroffen wurde, auch den Herakles angegriffen und der Hera, in der Absicht sie zu vergewaltigen, das Gewand zerrissen hatte.[1] Diese letztere Scene konnte demnach im pergamenischen Friese nicht dargestellt sein. Hera wird hier vielmehr, wie auf der oben genannten Vase, dem Phoitos gegenüber-gestanden haben.

[1] Um dieses Zuges willen scheint Porphyrion mit dem homerischen Gigantenkönig Eurymedon identisch zu sein, vergl. Wieseler a. a. O. S. 169.

Ausgegeben am 18. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.

XXII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

25. April. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen (i. V.)

1. Hr. Kronecker las: Über symmetrische Probleme.

Die Mittheilung folgt umstehend.

2. Hr. General-Secretär Dr. Conze überreichte das 3. Heft des 1. Bandes der vom Kaiserlich Deutschen Archäologischen Institut herausgegebenen »Antiken Denkmäler«.

Das älteste der correspondirenden Mitglieder der physikalisch-mathematischen Classe der Königlichen Akademie, Hr. Michel-Eugène Chevreul ist am 9. April in Paris gestorben.

Über symmetrische Systeme.

Von L. Kronecker.

Als ich in meinen Untersuchungen über die Charakteristik von Functionensystemen, welche ich in den Monatsberichten der Akademie vom 14. und 21. Februar 1878 auszugsweise mitgetheilt habe, die Veränderungen betrachtete, welche die Charakteristik bei Variation der Functionen erfährt, wurde ich auf die Frage geführt, ob es möglich sei, von jedem System zu jedem anderen, welches dieselbe Charakteristik hat, durch allmähliche Variation der Functionen so überzugehen, dass dabei die Charakteristik immer ihren Werth beibehält. Nimmt man wie a. a. O. die Functionen von ν Parametern $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ abhängig an und definirt also jedes einzelne Functionensystem durch einen einzelnen Punkt der νfachen Mannigfaltigkeit (x), so erfüllen die Functionensysteme, welche dieselbe Charakteristik haben, gewisse νfach ausgedehnte Gebiete der νfachen Mannigfaltigkeit (x), und jene Frage kann alsdann dahin formulirt werden, ob jedes dieser Gebiete zusammenhängend ist.

Ich habe die bezeichnete Frage, welche meines Wissens früher noch nicht erörtert worden ist, für die Charakteristik eines Systems zweier Functionen einer Variabeln in meiner erwähnten Mittheilung im Monatsbericht von 1878 und schon vorher in meinen Universitätsvorlesungen behandelt, namentlich in dem Falle, wo die eine der Functionen die Ableitung der anderen ist, und die Charakteristik also durch die Anzahl der reellen Linearfactoren der letzteren Function bestimmt wird. Aber in den Universitätsvorlesungen, welche ich in dem vorigen Wintersemester über die Theorie der algebraischen Gleichungen gehalten habe, bin ich, bei Behandlung der Charakteristik von Systemen zweier beliebigen ganzen Functionen einer Variabeln mittels der Jacobi-Bézout'schen Eliminationsmethode darauf geführt worden, die Gebiete zu untersuchen, in welche eine durch die $\frac{1}{2}n(n+1)$ variabeln Elemente eines symmetrischen Systems:

$$(z_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ z_{ik} = z_{ki})$$

repraesentirte $\frac{1}{2}n\,(n+1)$-fache Mannigfaltigkeit zerlegt wird, wenn die

Determinante $|z_{ik}|$ gleich Null gesetzt und also die hierdurch dargestellte $(\frac{1}{2}n(n+1)-1)$-fache Mannigfaltigkeit gebildet wird.

Um die Ergebnisse dieser Untersuchung hier einfach auseinanderzusetzen, schicke ich einige vorbereitende Entwickelungen voraus.

I. Aus der Composition von Systemen:

$$(a_{ik})\,(z_{ik})\,(b_{ik}) \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

resultirt, wenn das eine der Systeme (a_{ik}), (b_{ik}) das transponirte des anderen, also:

$$b_{ik}=a_{ki} \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

ist, ein symmetrisches System:

$$(z'_{ik}) \qquad (i,k=1,2,\ldots n).$$

Denn aus der wirklichen Darstellung des Resultats der Composition:

$$\sum_{h,i} a_{gh}z_{hi}b_{ik}=\sum_{h,i} a_{gh}z_{hi}a_{ki}=z'_{gk} \qquad (g,h,i,k=1,2,\ldots n)$$

ersieht man unmittelbar, dass aus der Gleichung:

$$z_{hi}=z_{ih} \qquad (h,i=1,2,\ldots n)$$

die Relation:

$$z'_{gk}=z'_{kg} \qquad (g,k=1,2,\ldots n)$$

folgt.

II. Wählt man für das System (a_{gh}) ein solches:

$$(a^{(t)}_{g,h}) \qquad (g,h=1,2,\ldots n),$$

für welches:

$$a^{(t)}_{11}=a^{(t)}_{22}=a^{(t)}_{33}=\ldots=a^{(t)}_{nn}=1,$$

ferner für einen einzigen Index r:

$$a^{(t)}_{1r}=t$$

und jedes der übrigen Elemente a_{gh} gleich Null wird, so ist:

$$z'_{11}=z_{11}+2tz_{1r}+t^2z_{rr}$$

$$z'_{1k}=z'_{k1}=z_{1k}+tz_{rk} \qquad (k=2,3,\ldots n)$$

$$z'_{gk}=z'_{kg}=z_{gk} \qquad (g,k=2,3,\ldots n).$$

Das componirte System z'_{gk} enthält also nur in der ersten Horizontalreihe und in der ersten Verticalreihe Elemente, die von den bezüglichen Elementen z_{gk} verschieden sind.

III. Bedeutet (b_{gh}), wie oben, das transponirte des Systems (a_{gh}), so ist:

$$b^{(t)}_{11}=b^{(t)}_{22}=b^{(t)}_{33}=\ldots=b^{(t)}_{nn}=1,\; b^{(t)}_{r1}=t,$$

und jedes der übrigen Elemente b_{gh} wird gleich Null. Bezeichnet man nun das System, welches aus der Composition:

$$(b_{ik}^{(t)})(z_{ik})(a_{ik}^{(t)}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

resultirt, mit:

$$(z''_{gk}) \qquad (g, k = 1, 2, \ldots n),$$

so ist:

$$z''_{rr} = z_{rr} + 2tz_{1r} + t^2 z_{11},$$

$$z''_{rk} = z''_{kr} = z_{kr} + tz_{k1} \qquad (k = 1, 2, \ldots r-1, r+1, \ldots n)$$

$$z''_{gk} = z''_{kg} = z_{gk} \qquad (g, k = 1, 2, \ldots r-1, r+1, \ldots n).$$

Das componirte System z''_{gk} enthält also nur in der $r$ten Horizontalreihe und in der $r$ten Verticalreihe Elemente, die von den bezüglichen Elementen z_{gk} verschieden sind.

IV. Aus der Composition von Systemen:

$$(a_{ik}^{(-1)})(b_{ik}^{(1)})(a_{ik}^{(-1)})(z_{ik})(b_{ik}^{(-1)})(a_{ik}^{(1)})(b_{ik}^{(-1)})$$

resultirt ein System $(z_{ik}^{(r)})$, für welches:

$$z_{11}^{(r)} = z_{rr}, \; z_{rk}^{(r)} = z_{1k}, \; z_{1k}^{(r)} = - z_{rk} \qquad (k=2, 3, \ldots r-1, r+1, \ldots n),$$

$$z_{ik}^{(r)} = z_{ik} \qquad (i, k=2, 3, \ldots r-1, r+1, \ldots n)$$

ist. Das componirte System $(z_{ik}^{(r)})$ entsteht also aus dem ursprünglichen System (z_{ik}), indem darin die erste und $r$te Horizontalreihe, sowie die erste und $r$te Verticalreihe miteinander vertauscht, und nach jeder Vertauschung die Zeichen sämmtlicher Elemente der ersten Reihe verändert werden.

V. Ist, wie von jetzt ab vorausgesetzt werden soll, die Determinante des Systems (z_{ik}) von Null verschieden, so können nicht alle Elemente der ersten Horizontalreihe gleich Null sein. Wenn nun z_{1r} das erste von Null verschiedene Element ist, so kann t so gewählt werden, dass:

$$z_{11} + 2tz_{1r} + t^2 z_{rr} \gtrless 0$$

wird. Man kann also von einem beliebigen symmetrischen Systeme (z_{ik}) ausgehend, gemäss (II) stets zu einem componirten gelangen, in welchem das neue Element z_{11} von Null verschieden ist.

Ist nun in diesem System, unter den auf z_{11} folgenden Elementen der ersten Horizontalreihe, z_{1r} das erste von Null verschiedene, so kann man gemäss (III) ein System (z''_{ik}) erhalten, in welchem:

$$z''_{1r} = z_{1r} + tz_{11},$$

also, wenn man:

$$t = -\frac{z_{1r}}{z_{11}}$$

setzt, $z''_{1r} = 0$ wird, während die Elemente $z''_{12}, z''_{13}, \ldots z''_{1,r-1}$ ebenfalls gleich Null sind, da deren Werthe mit den gleich Null vorausgesetzten Werthen $z_{12}, z_{13}, \ldots z_{1,r-1}$ übereinstimmen.

Durch wiederholte Anwendung der hier auseinandergesetzten Methode kann offenbar ein System erlangt werden, in welchem alle Elemente der ersten Horizontal- und Vertical-Reihe mit Ausnahme von z_{11} gleich Null sind. Ein solches System geht ferner, wenn man die in Nr. IV angegebene Composition benutzt, indem man dort $r = n$ nimmt, in ein symmetrisches System über, dessen letzte Horizontal- und Vertical-Reihe, mit einziger Ausnahme des Elementes z_{nn}, lauter Nullen enthält.

VI. Setzt man das in Nr. V entwickelte Verfahren fort, so gelangt man schliesslich zu einem Systeme (d_{ik}), dessen sämmtliche Elemente, mit Ausnahme der in der Diagonale stehenden, gleich Null sind, in welchem also für $i \gtrless k$ stets $d_{ik} = 0$ ist. Ein solches System ergiebt sich demnach aus der Composition einer Reihe von Systemen, in welcher zu beiden Seiten des ursprünglichen Systems (z_{ik}) lauter Systeme $(a_{ik}^{(t)})$, $(b_{ik}^{(t)})$ stehen, und zwar in solcher Aufeinanderfolge, dass je eines der beiden gleich weit von dem mittleren Systeme (z_{ik}) abstehenden das transponirte des anderen ist. Dies kann durch die (symbolische) Compositions-Gleichung:

$$(b_{ik}^{(t')}) \ldots (a_{ik}^{(t)}) \ldots (z_{ik}) \ldots (b_{ik}^{(t)}) \ldots (a_{ik}^{(t')}) = (d_{ik})$$

angedeutet werden.

VII. Je zwei Systeme $(a_{ik}^{(t)}), (a_{ik}^{(-t)})$ und auch je zwei Systeme $(b_{ik}^{(t)}), (b_{ik}^{(-t)})$ sind zu einander reciprok, d. h. sowohl aus der Composition:

$$(a_{ik}^{(t)})\,(a_{ik}^{(-t)})$$

als auch aus der Composition:

$$(b_{ik}^{(t)})\,(b_{ik}^{(-t)})$$

geht das »Einheitssystem«:

$$(\delta_{ik})$$

hervor, in welchem $\delta_{ik} = 0$ oder $\delta_{ik} = 1$ ist, je nachdem die beiden Indices von einander verschieden oder einander gleich sind.[1] Es bestehen also die (symbolischen) Compositions-Gleichungen:

$$(a_{ik}^{(t)})(a_{ik}^{(-t)}) = (\delta_{ik}), \quad (b_{ik}^{(t)})(b_{ik}^{(-t)}) = (\delta_{ik}),$$

---

[1] Vergl. meine Notiz »die Subdeterminanten symmetrischer Systeme« im Sitzungsbericht 1882, XXXVIII, wo ich die oben angewandten Bezeichnungen »reciprok« und »Einheitssystem« eingeführt habe.

und aus der oben in Nr. VI aufgestellten Compositions-Gleichung resultirt daher die folgende:

$$\ldots (a_{ik}^{(t)}) \ldots (z_{ik}) \ldots (b_{ik}^{(t)}) \ldots = (b_{ik}^{(-t')}) (d_{ik}) (a_{ik}^{(-t')}),$$

deren linke Seite sich von derjenigen der Gleichung in Nr. VI nur dadurch unterscheidet, dass hier die zwei Systeme fehlen, die dort auf der linken Seite am Anfang und am Ende stehen.

Man kann nun wiederum in derselben Weise die Reihe der Systeme auf der linken Seite dieser neuen Compositions-Gleichung von den beiden am Anfang und am Ende stehenden Systemen befreien, und, indem man so fortfährt, gelangt man schliesslich zu einer Gleichung:

$$(z_{ik}) = \ldots (a_{ik}^{(-t)}) \ldots (b_{ik}^{(-t')}) (d_{ik}) (a_{ik}^{(-t')}) \ldots (b_{ik}^{(-t)}) \ldots,$$

welche zeigt:

> dass das ursprüngliche System (z_{ik}) selbst, d. h. also jedes beliebige symmetrische System sich als Resultat der Composition einer Reihe von Systemen darstellen lässt, von denen das mittlere ein System (d_{ik}) ist, während die übrigen, zu beiden Seiten des mittleren, lauter Systeme $(a_{ik}^{(t)})$, $(b_{ik}^{(t)})$ sind, und zwar in solcher Aufeinanderfolge, dass je eines der beiden von dem mittleren Systeme gleich weit abstehenden das transponirte des andern ist.

Hierbei kann sogar angenommen werden, dass die Diagonalelemente d_{kk} des mittleren Systems ihrer Grösse nach auf einander folgen, d. h. also, dass darin für $i < k$ stets $d_{ii} \leq d_{kk}$ ist; denn die zu solcher Anordnung etwa erforderliche Vertauschung der Diagonalelemente kann durch Composition mit Systemen $(a_{ik}^{(1)})$, $(a_{ik}^{(-1)})$, $(b_{ik}^{(1)})$, $(b_{ik}^{(-1)})$, wie in Nr. IV angegeben, Weise bewirkt werden.

VIII. Bezeichnet man zur Abkürzung die Determinante des Systems (z_{ik}) mit Z_1 und in analoger die Hauptsubdeterminante:

$$|z_{gh}| \qquad (g, h = m, m+1, \ldots n)$$

mit Z_m, so ist:

$$Z_2 = \frac{\partial Z_1}{\partial z_{11}}, \; Z_3 = \frac{\partial Z_2}{\partial z_{22}} = \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z_{11}\, \partial z_{22}}, \ldots Z_n = z_{nn}.$$

Bildet man nun aus dem Systeme (z_{ik}) ein neues: (z'_{ik}), indem man die zweite Horizontalreihe mit Z_3 multiplicirt und zu derselben die dritte, mit $\frac{\partial Z_2}{\partial z_{32}}$ multiplicirt, die vierte, mit $\frac{\partial Z_2}{\partial z_{42}}$ multiplicirt u. s. f. addirt, d. h. also, indem man:

$$z'_{1k} = z_{1k}, \; z'_{2k} = \sum_{g=2}^{g=n} z_{gk} \frac{\partial Z_2}{\partial z_{g2}}, \; z'_{3k} = z_{3k}, \ldots z'_{nk} = z_{nk}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

setzt, so sind die sämmtlichen Elemente z'_{2k} durch Z_2 theilbar. Bildet man ferner aus dem Systeme (z'_{ik}) wiederum ein neues: (z''_{ik}), indem man die zweite Verticalreihe mit Z_3 multiplicirt und zu derselben die dritte, mit $\frac{\partial Z_2}{\partial z_{32}}$ multiplicirt, die vierte, mit $\frac{\partial Z_2}{\partial z_{42}}$ multiplicirt, u. s. f. addirt, d. h. indem man:

$$z''_{i1} = z'_{i1}\,,\; z''_{i2} = \sum_{k=2}^{k=n} z'_{ik}\frac{\partial Z_2}{\partial z_{2k}}\,,\; z''_{i3} = z'_{i3}\,,\;\ldots\; z''_{in} = z'_{in} \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

setzt, so ist das System (z''_{ik}) ein symmetrisches, und es sind darin alle Elemente, für welche einer der beiden Indices gleich 2 ist, durch Z_2 theilbar. Überdies ist:

$$z''_{ef} = z_{ef} \qquad (e,f=3,4,\ldots n),$$

und also:

$$|z''_{ik}| \equiv -(z''_{12})^2\,|z_{ef}|\;(\mathrm{mod}\;Z_2) \qquad \begin{pmatrix} i,k=1,2,\ldots n \\ e,f=3,4,\ldots n \end{pmatrix}.$$

Da nun andererseits offenbar:

$$|z''_{ik}| = Z_3^2\,Z_1 \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

ist, so resultirt die Congruenz:

$$Z_1 Z_3 \equiv -(z''_{12})^2\;(\mathrm{mod}\;Z_2),$$

deren Inhalt allgemeiner dahin formulirt werden kann:

> dass *modulo* irgend einer Hauptsubdeterminante eines symmetrischen Systems das Product der beiden benachbarten, für welche die Ordnung der einen um eine Einheit kleiner, die der anderen um eine Einheit grösser ist, stets einem negativen Quadrat congruent wird.

Man kann dasselbe Resultat offenbar aus dem Jacobi'schen Hauptsatz über die Subdeterminanten[1] erschliessen, und zwar speciell aus der daraus folgenden Determinantenformel:

$$Z_1 Z_3 = -\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_{12}}\right)^2 + Z_1\frac{\partial Z_1}{\partial z_{22}},$$

aber ich habe hier die obige Herleitung vorgezogen, um die dabei gebrauchte Methode darzulegen.

Nach diesen Vorbereitungen soll nun gezeigt werden,

> dass die $(\frac{1}{2}n(n+1)-1)$-fache Determinanten-Mannigfaltigkeit $Z_1 = 0$ die gesammte $\frac{1}{2}n(n+1)$-fache Mannigfaltigkeit (z_{ik}) in $n+1$ zusammenhängende Gebiete scheidet, deren jedes durch einen darin liegenden »Hauptpunkt« charakterisirt

[1] Vergl. meine schon oben citirte Notiz im Sitzungsbericht 1882, XXXVIII.

werden kann, nämlich durch einen solchen, für welchen die ersten ν Diagonalelemente z_{kk} gleich -1, die folgenden gleich $+1$ und alle übrigen Elemente z_{ik} gleich Null sind. Die Anzahl der Hauptpunkte, welche sich ja nur durch die verschiedenen Werthe $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$ von einander unterscheiden, ist gleich $n+1$, also ebenso gross wie die Anzahl der zu charakterisirenden Gebiete.

§. 1.

Es ist in Nr. VII dargethan worden, dass jedes symmetrische System als Resultat der Composition von Systemen $(a_{ik}^{(r)})$, $(b_{ik}^{(r)})$ mit einem Diagonalsystem (d_{ik}) dargestellt werden kann, in welchem für $i<k$ stets $d_{ii} \leqq d_{kk}$ ist. Sind nun für ein bestimmtes symmetrisches System (ζ_{ik}) die Werthe der Elemente t in den verschiedenen Componenten-Systemen der Reihe nach:

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots,$$

so resultirt, wenn an deren Stelle variable Grössen:

$$t_1, t_2, t_3, \ldots$$

gesetzt werden, ein symmetrisches System mit variabelen Elementen (z_{ik}). Lässt man jetzt t_1 von τ_1 bis 0, ferner t_2 von τ_2 bis 0 u. s. f. variiren, so geht das System (ζ_{ik}) in das System (d_{ik}) continuirlich über, und zwar ohne dass die Determinante ihren Werth ändert.

In dem Systeme (d_{ik}) kann ferner jedes der negativen Diagonalelemente in -1 und jedes der positiven Diagonalelemente in $+1$ continuirlich übergeführt werden, ohne dass dabei die Determinante gleich Null wird.

Man kann also von jedem Punkte (ζ_{ik}) der $\frac{1}{2}n(n+1)$-fachen Mannigfaltigkeit (z_{ik}), ohne die Determinanten-Mannigfaltigkeit zu passiren, zu einem »Hauptpunkte« gelangen, d. h. zu einem solchen, für den:

$$z_{11} = z_{22} = \ldots = z_{\nu\nu} = -1\,; \quad z_{\nu+1,\nu+1} = \ldots = z_{nn} = +1$$

ist und alle übrigen Elemente z_{ik} gleich Null sind.

In jedem der Gebiete, welche durch die Determinanten-Mannigfaltigkeit $Z_1 = 0$ von einander geschieden werden, muss daher wenigstens einer der Hauptpunkte liegen, und es soll nun im folgenden Paragraphen gezeigt werden, dass in der That nur einer darin liegt.

§. 2.

Um den angekündigten Nachweis führen zu können, muss zuvörderst die Veränderung untersucht werden, welche der Werth der Summe:

(S) $\quad \operatorname{sgn.} Z_1 Z_2 + \operatorname{sgn.} Z_2 Z_3 + \ldots + \operatorname{sgn.} Z_{n-1} Z_n + \operatorname{sgn.} Z_n$

bei Variirung des symmetrischen Systems (z_{ik}) erleidet.[1] Dabei möge der Werth dieser Summe, als Function des symmetrischen Systems (z_{ik}), oder des »Punktes« (z_{ik}), zur Abkürzung mit:

$$S\big((z_{ik})\big)$$

bezeichnet werden.

Geht man von einem bestimmten Punkte (ζ_{ik}) zu einem benachbarten (ζ'_{ik}) über, d. h. lässt man das System (z_{ik}) von einem bestimmten Systeme (ζ_{ik}) bis zu einem benachbarten (ζ'_{ik}) stetig variiren, so bleibt der Werth der Summe sicher ungeändert, wenn sich dabei keines der Zeichen:

$$\operatorname{sgn.} Z_m \qquad (m = 1, 2, \ldots n)$$

ändert. Der Werth der Summe kann sich also nur dann ändern, wenn man eine der $(\frac{1}{2}n(n+1)-1)$-fachen Mannigfaltigkeiten:

$$Z_m = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots n)$$

passirt, und zwar an einer Stelle, wo Z_m aus dem Positiven ins Negative oder umgekehrt übergeht. Es ist daher bloss zu untersuchen, ob ein solcher Durchgang durch eine dieser Mannigfaltigkeiten eine Änderung des Werthes der Summe (S) bewirkt.

Demgemäss sei sgn. Z_m im Punkte (ζ_{ik}) negativ und im Punkte (ζ'_{ik}) positiv; ferner sei (ζ^0_{ik}) der auf dem Wege von (ζ_{ik}) zu (ζ'_{ik}) passirte Punkt der Mannigfaltigkeit $Z_m = 0$. Sollte nun der Punkt (ζ^0_{ik}) zugleich auf einer oder mehreren der anderen Mannigfaltigkeiten:

$$\ldots Z_{m-2} = 0\,,\; Z_{m-1} = 0\,,\; Z_{m+1} = 0\,,\; Z_{m+2} = 0\,,\; \ldots$$

liegen, so kann man zu einem auf der Mannigfaltigkeit $Z_m = 0$ liegenden benachbarten Punkte $(\bar{\zeta}^0_{ik})$ übergehen, für welchen jeder der anderen Werthe $\ldots Z_{m-1}, Z_{m+1}, \ldots$ von Null verschieden ist. Bezeichnet man diese Werthe beziehungsweise mit $\ldots W_{m-1}, W_{m+1}, \ldots,$ so liegt der Punkt $(\bar{\zeta}^0_{ik})$ der Mannigfaltigkeit $Z_m = 0$ zugleich auf den Mannigfaltigkeiten:

$$\ldots Z_{m-1} = W_{m-1}\,,\; Z_{m+1} = W_{m+1} \ldots,$$

und man kann weiter, auf diesen Mannigfaltigkeiten bleibend, einerseits zu einem benachbarten Punkte $(\bar{\zeta}_{ik})$ übergehen, für welchen $Z_m < 0$ ist, und andererseits zu einem benachbarten Punkte $(\bar{\zeta}'_{ik})$, für welchen

[1] Vergl. Harzidakis: Über eine Eigenschaft der Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante. Journal f. Math. Bd. 91.

$Z_m > 0$ ist. Endlich kann man einerseits vom Punkte $(\bar{\zeta}_{ik})$ zu (ζ_{ik}) und andererseits vom Punkte $(\bar{\zeta}'_{ik})$ zu (ζ'_{ik}) so gelangen, dass Z_m in dem einen Falle durchweg negativ, in dem anderen durchweg positiv bleibt. Anstatt des Übergangs auf dem Wege:

$$(\zeta_{ik}), (\zeta^0_{ik}), (\zeta'_{ik})$$

kann also der Übergang auf dem Wege:

$$(\zeta_{ik}), (\bar{\zeta}_{ik}), (\bar{\zeta}^0_{ik}), (\bar{\zeta}'_{ik}), (\zeta'_{ik})$$

geschehen, bei welchem die Mannigfaltigkeit $Z_m = 0$ an einer Stelle überschritten wird, wo jeder der anderen Werthe $\ldots Z_{m-1}, Z_{m+1}, \ldots$ von Null verschieden ist.

Die vorstehende Deduction gilt, natürlich mit Weglassung von Z_{m-1}, auch für den Fall $m = 1$, und man sieht daher, dass nur zu untersuchen ist,

> ob der Durchgang durch eine der Mannigfaltigkeiten $Z_m = 0$ an einer Stelle, wo eine Determinante Z_m ihr Zeichen wechselt, und alle übrigen Determinanten von Null verschiedene Werthe haben, eine Änderung des Werthes der Summe (S) bewirkt.

Es ist nun klar, dass bei einem derartigen Durchgang durch die Determinanten-Mannigfaltigkeit $Z_1 = 0$ der Werth der Summe (S) sich um 2 Einheiten ändert, da das erste Glied:

$$\text{sgn.}\, Z_1 Z_2$$

eine solche Änderung erfährt, alle übrigen Glieder aber ihren Werth beibehalten.

Aber beim Durchgang durch eine der Subdeterminanten-Mannigfaltigkeiten $Z_2 = 0, Z_3 = 0, \ldots, Z_n = 0$ erfolgt keine Änderung des Werthes der Summe (S). Denn für jeden der Werthe

$$m = 2, 3, \ldots n-1$$

wird, wie oben in Nr. VIII gezeigt worden ist:

$$Z_{m-1} Z_{m+1} \quad \textit{modulo}\ Z_m$$

einem negativen Quadrate congruent; für $Z_m = 0$ ist daher, wenn, wie es bei dem Durchgang durch $Z_m = 0$ der Fall ist, die Werthe von Z_{m-1} und Z_{m+1} von Null verschieden sind:

$$\text{sgn.}\, Z_{m-1} = -\,\text{sgn.}\, Z_{m+1},$$

und, da dieselbe Relation für die beiden dem Durchgangspunkt benachbarten Punkte (ζ_{ik}), (ζ'_{ik}) besteht, während Z_m für (ζ_{ik}) positiv, für (ζ'_{ik}) negativ ist, so ist für beide Punkte, so wie für alle diejenigen, welche auf dem Wege von (ζ_{ik}) zu (ζ'_{ik}) passirt werden:

$$\text{sgn.}\, Z_{m-1} Z_m + \text{sgn.}\, Z_m Z_{m+1} = 0.$$

Das Aggregat dieser beiden Glieder erfährt also bei jenem Durchgang durch $Z_m = 0$ keinerlei Werthänderung, und die übrigen Glieder der Summe bleiben dabei ebenfalls ungeändert, da alle anderen Subdeterminanten ihre Zeichen beibehalten.

Alles dies gilt auch für $m = n$, wenn man $Z_{n+1} = 1$ setzt, da alsdann die Congruenz:

$$Z_{n-1} Z_{n+1} \equiv -(z_{n-1,n})^2 \pmod{Z_n}$$

besteht, an welche dann die obigen Schlussfolgerungen geknüpft werden können.

Das Resultat der vorstehenden Auseinandersetzung kann dahin formulirt werden:

> Der Werth von $S\big((z_{ik})\big)$ ändert sich nur dann, wenn der Punkt durch die Determinanten-Mannigfaltigkeit $Z_1 = 0$ hindurchgeht, und zwar genau um 2 Einheiten, wenn der Durchgang an einer nicht singulären Stelle erfolgt.

Nun wird für einen Hauptpunkt (z_{ik}), für welchen:

$$z_{11} = z_{22} = \ldots = z_{\nu\nu} = -1\,;\; z_{\nu+1,\nu+1} = \ldots = z_{nn} = +1$$

ist:

$$Z_1 = (-1)^\nu,\; Z_2 = (-1)^{\nu-1}, \ldots Z_\nu = -1\,;\; Z_{\nu+1} = \ldots = Z_n = 1\,,$$

und also:

$$S\big((z_{ik})\big) = n - 2\nu\,.$$

Für jeden der $n+1$ Hauptpunkte, welchen die $n+1$ verschiedenen Werthe $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$ entsprechen, hat daher $S\big((z_{ik})\big)$ einen andern Werth, und es folgt hieraus,

> dass es nicht möglich ist, von einem Hauptpunkte zu einem andern zu kommen, ohne die Determinanten-Mannigfaltigkeit $Z_1 = 0$ zu passiren, d. h., dass die verschiedenen Hauptpunkte in verschiedenen Gebieten liegen und diese also vollständig charakterisiren.

Hiermit ist der am Schlusse des §. 1 angekündigte Nachweis geführt, und die Angaben, welche über die Gebietstheilung durch die Determinanten-Mannigfaltigkeit unmittelbar vor §. 1 gemacht worden sind, haben nunmehr sämmtlich ihre Bestätigung gefunden.

§. 3.

Für ein nicht symmetrisches aus n^2 unabhängigen Veränderlichen bestehendes System (y_{ik}) kann die Frage der Gebietstheilung der n^2-fachen Mannigfaltigkeit:

$$y_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

durch die $(n^2 - 1)$-fache Mannigfaltigkeit:

$$|y_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

in ähnlicher, aber einfacherer Weise erledigt werden.

Zu diesem Zwecke soll zuvörderst gezeigt werden, wie sich ein solches System (y_{ik}) als Resultat der Composition gewisser einfacher Systeme darstellen lässt.

Erstens resultirt aus der Composition:

$$(a_{ik}^{(t)})\,(y_{ik})$$

ein System (y_{ik}^0), in welchem:

$$y_{1k}^0 = y_{1k} + ty_{rk}\,,\; y_{ik}^0 = y_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots n \\ k = 1, 2, 3, \ldots n \end{pmatrix}$$

ist, während aus der Composition:

$$(y_{ik})\,(a_{ik}^{(t)})$$

ein System (y'_{ik}) hervorgeht, in welchem:

$$y'_{ir} = ty_{i1} + y_{ir}\,,\; y'_{ik} = y_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots r-1, r+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

ist.

Zweitens entsteht aus der Composition der Systeme:

$$(a_{ik}^{(-1)})\,(b_{ik}^{(1)})\,(a_{ik}^{(-1)})\,(y_{ik})$$

ein System $y_{ik}^{(h)}$, für welches:

$$y_{1k}^{(h)} = -y_{rk}\,,\; y_{rk}^{(h)} = y_{1k}\,,\; y_{ik}^{(h)} = y_{ik} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots n \\ i = 2, 3, \ldots r-1, r+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

ist, so dass in dem componirten System die erste und $r$te Horizontalreihe des ursprünglichen Systems mit einander vertauscht und überdies die Zeichen der neuen ersten Horizontalreihe verändert sind.

Drittens resultirt aus der Composition der Systeme:

$$(y_{ik})\,(a_{ik}^{(-1)})\,(b_{ik}^{(1)})\,(a_{ik}^{(-1)})$$

ein System $(y_{ik}^{(v)})$, für welches:

$$y_{i1}^{(v)} = y_{ir}\,,\; y_{ir}^{(v)} = -y_{i1}$$

ist, so dass in dem componirten Systeme die erste und $r$te Verticalreihe des ursprünglichen Systems mit einander vertauscht und überdies die Zeichen der neuen $r$ten Verticalreihe verändert sind.

Viertens gelangt man bei nochmaliger Anwendung der zuletzt angegebenen Composition zu einem Systeme, welches sich von dem ursprünglichen nur dadurch unterscheidet, dass die Vorzeichen der ersten und der $r$ten Verticalreihe verändert sind.

Geht man nun von irgend einem bestimmten System (η_{ik}) aus, so kann man, falls $\eta_{11} = 0$ ist, durch Vertauschung von Verticalreihen ein System $(\eta_{ik}^{(r)})$ erhalten, in welchem dies nicht der Fall ist. Alsdann kann man durch Zusammensetzung mit einem System $(a_{ik}^{(r)})$, in welchem:

$$t = -\frac{\eta_{ir}}{\eta_{11}}$$

anzunehmen ist, zu einem System gelangen, in dessen erster Horizontalreihe das $r$te Element gleich Null ist. Hat man, so fortfahrend, alle Elemente der ersten Horizontalreihe, mit Ausnahme des ersten zum Verschwinden gebracht, so kann man durch Vertauschung der Horizontalreihen die erste an die letzte Stelle bringen und alsdann die angegebene Operation mit derjenigen Horizontalreihe, welche nunmehr die erste ist, wieder beginnen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich zu einem System (d_{ik}), welches nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente enthält.

Componirt man dieses System mit einem anderen $(\mathfrak{d}_{ik})$, dessen Elemente ausserhalb der Diagonale sämmtlich gleich Null und in der Diagonale, mit Ausnahme von $\mathfrak{d}_{11}$, sämmtlich gleich Eins sind, so entsteht ein »Diagonalsystem«, welches sich von (d_{ik}) nur dadurch unterscheidet, dass das erste Element gleich dem Produkt $d_{11}\mathfrak{d}_{11}$ ist. Das erste Element dieses componirten Systems wird also gleich ± 1, wenn $\mathfrak{d}_{11}$ gleich dem reciproken Werthe des absoluten von d_{11} genommen wird. Bringt man dann durch Vertauschung von Horizontal- und Vertical-Reihen, welche nach Nr. IV durch Composition mit Systemen (a_{ik}), (b_{ik}) zu bewirken ist, jenes erste Element ± 1 an die zweite und d_{22} an die erste Stelle, so kann man nunmehr durch Composition mit einem Systeme $(\mathfrak{d}_{ik})$ zu einem Diagonalsysteme gelangen, in welchem das erste und zweite Element gleich ± 1 ist, und die Fortsetzung dieses Verfahrens führt offenbar zu einem Systeme, in welchem sämmtliche Elemente in der Diagonale gleich ± 1 und alle übrigen gleich Null sind.

Ein solches System kann, wenn ein Element -1 darin vorkommt, durch Vertauschung der Horizontal- und Vertical-Reihen so eingerichtet werden, dass das erste Element gleich -1 ist. Dann kann man, wenn noch ein Element -1 vorhanden ist, durch Composition mit Systemen (a_{ik}), (b_{ik}) in der oben (bei »*viertens*«) angegebenen Weise ein anderes System erhalten, in welchem die beiden Elemente -1 durch $+1$ ersetzt sind. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich entweder zu dem Einheitssysteme (δ_{ik}) oder aber zu einem Diagonalsysteme (d_{ik}), in welchem:

$$d_{11} = -1\,,\ d_{22} = d_{33} = \ldots = d_{nn} = 1$$

ist, und der eine oder der andere Fall tritt ein, je nachdem die

Determinante des Systems (η_{ik}), von dem ausgegangen wurde, positiv oder negativ ist.

Aus der vorstehenden Entwickelung folgt,

dass jedes beliebige System (η_{ik}), dessen Determinante positiv ist, sich als Resultat der Composition von Systemen:

$$(a_{ik}^{(r)}),\ (b_{ik}^{(r)}),\ (\mathfrak{d}_{ik})$$

darstellen lässt, während, wenn die Determinante negativ ist, noch am Anfange oder am Ende der Reihe der Componenten-Systeme eines hinzuzufügen ist, welches aus dem Einheitssysteme entsteht, indem für das erste Element an Stelle der positiven die negative *Eins* gesetzt wird.

Dabei möge die Bedeutung der Systeme $(a_{ik}^{(r)})$, $(b_{ik}^{(r)})$, $(\mathfrak{d}_{ik})$ hier nochmals dahin praecisirt werden,

dass erstens jedes System $(a_{ik}^{(r)})$ in der Diagonale lauter Elemente $+1$, ferner als $r$tes Element der ersten Horizontalreihe die Grösse t und im Übrigen nur Nullen enthält, dass zweitens das System $(b_{ik}^{(r)})$ in der Diagonale lauter Elemente $+1$, ferner als $r$tes Element der ersten Verticalreihe $+1$ und im Übrigen nur Nullen enthält, dass drittens in jedem Systeme $(\mathfrak{d}_{ik})$ das erste Element $\mathfrak{d}_{11}$ eine positive Grösse ist, die folgenden Diagonal-Elemente aber gleich $+1$ und alle übrigen Elemente gleich Null sind.

Sind bei der angegebenen Darstellung des Systems (η_{ik}) die Werthe der Elemente t in den verschiedenen Componenten-Systemen (a_{ik}): $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$, und die positiven Werthe der Elemente $\mathfrak{d}_{11}$ in den Systemen $(\mathfrak{d}_{ik})$: $\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'', \mathfrak{d}''', \ldots$, so resultirt, wenn man $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ durch variable Grössen $t_1, t_2, t_3, \ldots$, ferner die ausserhalb der Diagonale in den Systemen $(b_{ik}^{(r)})$ vorkommenden Elemente 1 durch variable Elemente: $t_1', t_2', t_3' \ldots$ und endlich auch jene positiven Elemente $\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'', \mathfrak{d}''', \ldots$ durch variable Elemente $d', d'', d''', \ldots$ ersetzt, ein System (y_{ik}) mit variabeln Elementen. Lässt man jetzt t_1 von τ_1 bis 0, ebenso t_2 von τ_2 bis $0, \ldots$, ferner jede der Variabeln t' von 1 bis 0 und endlich d' von $\mathfrak{d}'$ bis 1, d'' von $\mathfrak{d}''$ bis 1 u. s. f. variiren, so geht das System (η_{ik}) in das Einheitssystem (δ_{ik}) oder in das System:

$$\begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & \ldots \\ 0, & 1, & 0, & \ldots \\ 0, & 0, & 1, & \ldots \\ . & . & . & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{pmatrix}$$

über, je nachdem die Determinante des Systems (η_{ik}) einen positiven

oder negativen Werth hat. Da nun bei jenem Übergange offenbar kein System (y_{ik}) passirt wird, dessen Determinante gleich Null ist, so ergiebt sich,

dass die n^2-fache Mannigfaltigkeit (y_{ik}) durch die (n^2-1)-fache Mannigfaltigkeit:

$$|y_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n$$

in nur zwei zusammenhängende Gebiete geschieden wird.

Dabei ist natürlich in dem einen Gebiete der Werth der Determinante positiv, in dem anderen negativ.

(Fortsetzung folgt.)

Ausgegeben am 2. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1889.
XXIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

2. Mai. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

1. Hr. Hirschfeld las: Die ritterlichen Provinzialstatthalter.

Die Mittheilung erscheint in einem der nächsten Berichte.

2. Der Vorsitzende legte die umstehend folgende Mittheilung des Hrn. Dr. Conrad Cichorius in Leipzig vor: Inschriften aus Kleinasien.

Inschriften aus Kleinasien.

Von Dr. Conrad Cichorius
in Leipzig.

(Vorgelegt von Hrn. Mommsen.)

1. Apollonia am Rhyndakos. Basis aus gelblichem Kalkstein im Hause des Dimitri Philadarlo, hoch 0.m66, breit 0.m575, Buchst. 0.039. Zeile 1 Rasur. Cf. Lebas-Waddington 1069.

[illegible]ΝΚΑΙΣΑ
ΡΑΤΟΝΤΟΥΣΕΒΑΣΤΟΥ
ΥΙΟΝ
ΟΔΗΜΟΣ
ΕΝΤΩΓΝΡΕΤΕΙΕΚΤΩΝ
[illegible]ΙΣΕΝΕΧΘΕΝΤΩΝΠΕ
[illegible]ΙΣΣΩΝΥΠΟΔΑΜΟΣ
ΤΡΑΤΟΥΟΛΥΝΠΑΑΡΧΟΝΤΟΣ
ΧΡΗΜΑΤΩΝΕΠΙΜΕΛΗΘΕΝ
ΤΩΝΤΩΝΠΕΡΙΔΑΜΟΣΤΡΑ
ΤΟΝΟΛΥΝΠΑΑΡΧΟΝΤ

[Δομιτιανὸ]ν Καίσα-
ρα τὸν τοῦ Σεβαστοῦ
ὑιὸν
ὁ δῆμος
ἐν τῷ γνρ ἔτει ἐκ τῶν
ε]ἰςενεχθέντων πε-
ρ]ισσῶν ὑπὸ Δαμοσ-
τράτου Ὀλυνπᾶ ἄρχοντος
χρημάτων, ἐπιμεληθέν-
των τῶν περὶ Δαμόστρα-
τον Ὀλυνπᾶ ἀρχόντ[ων

Die Bedeutung dieser Inschrift ist, wie es scheint, noch von Niemand erkannt. Lebas hat sie in der Revue de philologie I (1845) p. 41 auf den Caesar L. Aelius bezogen und in's Jahr 135 n. Chr. gesetzt; dies bedarf kaum einer Widerlegung, denn der Name des Verus ist nie auf den Denkmälern getilgt. Der einzig mögliche Caesar, der hier gemeint sein kann, ist Domitian und an ihn denkt auch Waddington a. a. O.; die Buchstabenzahl passt genau für den rasirten Raum. Es fragt sich dann nur, nach welcher Aera hier

gerechnet wird und in welches Jahr die Inschrift zu setzen ist. MARQUARDT, Staatsverwalt. I 337 Anm. 5 nimmt als sicher die sullanische an, allein dem steht zunächst eine grosse Schwierigkeit entgegen. WADDINGTON (zu Nr. 980) hat den Anfang der sullanischen Aera auf kurz vor den 1. September[1] des Jahres 85 v. Chr. berechnet, dann reicht Jahr 1 etwa vom 1. September 85 bis Ende August 84, und das auf der Inschrift genannte 153. Jahr würde sich erstrecken etwa vom 1. September 68 bis Ende August 69 n. Chr. Aus dieser Zeit aber kann unsere Inschrift keinesfalls stammen. Vespasian ist erst am 1. Juli 69 von den aegyptischen Legionen als Kaiser ausgerufen worden, seine Anerkennung durch den Senat erfolgte erst im December des Jahres nach der Eroberung Roms durch Antonius Primus. Domitian selbst hat den Caesartitel gleichfalls erst nach Vitellius' Tode (December 69) erhalten, Tac. hist. 3, 86 u. 4, 2, Dio 61, 1; es ist also ganz unmöglich, dass ihm, dem achtzehnjährigen unbekannten Jüngling, schon im Sommer vorher in dem entlegenen Apollonia eine Statue mit der Aufschrift Caesar gesetzt sei. Wir müssen also eine andere Zeitrechnung zu finden suchen.

Eine in Betracht zu ziehende Möglichkeit wäre da die, dass auf der Inschrift nach bithynischer Provinzialaera gerechnet wäre, denn Apollonia liegt im Grenzgebiet zwischen Bithynien und Mysien und hat in späterer Zeit sicher zu Bithynien gehört, KUHN, Verfass. d. röm. Reiches II, 262. Diese Aera beginnt mit dem Jahre 74 v. Chr. (MARQUARDT I, 349 ff.), das 153. Jahr wäre demnach das Jahr 79 n. Chr. Vespasian starb am 23. Juni dieses Jahres, die Inschrift müsste also in die erste Hälfte des Jahres fallen. Allein gerade aus der Regierungszeit des Vespasian haben wir ein unbedingt sicheres Zeugniss für die damals noch bestehende Zugehörigkeit von Apollonia zur Provinz Asien. Plinius n. h. 5, 123 sagt ausdrücklich *deportant Adramytteum negotia Apolloniatae a Rhyndaco amne*. Es ist also anzunehmen, dass die Stadt damals auch nach einer in Asien üblichen Aera gerechnet habe.

Meiner Ansicht nach löst sich die Schwierigkeit sehr einfach, wenn wir zu der früheren Ansetzung vom Beginn der sullanischen Aera zurückkehren. FRANZ, der diese Aera zuerst nachgewiesen hat (C. I. Gr. III, p. 1104), setzte ihren Anfang in das Jahr 84 v. Chr., und WADDINGTON selbst hat darauf aufmerksam gemacht, dass hierfür auch die Notiz bei Cassiodor zu 84 v. Chr. spricht: *his consulibus Asiam in XLIV regiones Sulla distribuit.* Sulla war Anfang 84 nach Asien

[1] Dies ist vermuthlich ein Schreibfehler WADDINGTONS. Die beiden in der Provinz Asia gebräuchlichen Kalender, der sogenannte asiatische wie der sogenannte ephesische, setzen Neujahr bekanntlich auf die Herbstnachtgleiche und zwar, wie USENER (Bull. dell' Instituto 1874, 73 fg.) gezeigt hat, auf den 23. September. TH. M.

hinübergegangen, hatte dort die Zusammenkunft mit Mithradates, schloss den Friedensvertrag mit ihm ab, wandte sich nachher gegen Fimbria und konnte erst dann an die doch sicher eine längere Zeit erfordernde Organisation der Provinz gehen. Vor dem Herbst kann diese kaum abgeschlossen sein. Da ist es aber doch viel natürlicher, dass das gerade im Herbst 84 beginnende neue Jahr als erstes der Provinz angesehen wurde, denn von dem vorhergehenden wären im günstigsten Falle nur wenige Wochen in Betracht gekommen. Das 1. Jahr der sullanischen Aera reichte dann vom 23. September 84 bis 22. September 83 und unser 153. vom 23. September 69 bis 22. September 70 n. Chr. Während dieses Zeitraumes aber würde die Errichtung einer Statue für Domitian durchaus nichts auffälliges haben. In Bezug auf die späte Inschrift bei Lebas 980 — angeblich vom Jahre 508 —, auf Grund deren Waddington seine Hypothese aufbaut, ist zu bemerken, dass wir ja überhaupt gar nicht sicher sagen können, ob dort wirklich die sullanische Aera vorliegt.

2. Ulubad am Apolloniasee. Grosser Marmorblock bei der griechischen Kirche. Im Frühjahr 1888 beim Abreissen der byzantinischen Mauer gefunden; hoch 0m585, breit 0m79, Buchst. 0m017. Gute regelmässige Schrift des zweiten vorchristlichen Jahrhunderts. Rechts und unten gebrochen; links fehlen meist nur wenige Buchstaben.

ΞΕΝΤΗΙΒΟΥΛΗΙΚΑΙΤΩΙΔΗΜΩΕΠΕΙΜΑΧΑΩΝΑΣΚΛΗ ΙΑ
Α ΩΝΚΑΙΑΓΑΘΟΣΕΝΑΡΧΗΤΕΠΟΛΛΑΣΚΑΙΜΕΓΑΛΑΣΠΑΡ
ΟΑΕΙΧΡΕΙΑΣΕΝΔΟΞΩΣΚΑΙΚΑΛΩΣΑΝΑΣΤΡΕΦΟΜΕΝ
ΤΕΤΑΙΣΑΡΧΑΙΣΚΑΙΤΑΙΣΠΡΕΣΒΕΙΑΙΣΚΑΙΜΕΤΑΤΑΥΤΑΠΕΡΙ
ΝΤΟΣΠΟΛΕΜΟΥΤΟΥΣΠΟΛΙΤΑΣΟΥΤΩΣΕΑΥΤΩΙΒΟΥΛΟΜΕΝ
ΟΛΟΥΘΩΣ ΝΕΣΘΑΙΤΗΝΤΕΠΡΟΣΤΟΠΛΗΘΟΣΕΥΝΟΙΑΝ
ΛΑΣΧΕΚΑΙΤΗΣΠΟΛΕΩΣΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΗΣΟΥΔΕΙ///ΑΛΟΓΟΝΠΟΙΗ
ΝΟΣΤΩΙ/// ΩΝΕΙΣΤΑΚΟΙΝΗΙΣΥΜΦΕΡΟΝΤΑΑΥΘΑΙΡΕΤΩΣΕ
ΚΕΝ ΑΥ ΠΡΕΣΒΕΥΣΑΣΤΕΠΡΟΣΜΑΡΚΟΝΚΟΣΚΩΝΙΟ
ΝΕΜΜΑΚΕΔΟΝΙΑΤΟΤΕΣΤΡΑΤΗΓΟΝΠΑΝΤΑΤΑΣΥΜΦ
ΤΗΙΠΟΛΕΙΔΙΕΠΡΑΞΑΤΟΧΡΕΙΑΝΔΕΠΟΗΣΑΜΕΝΟΥΤΟΥ
ΥΤΩΝΠΡΕΣΒΕΥΣΟΝΤΩΝΠΡΟΣΤΗΝΣΥΓΚΛΗΤΟΝΤΗΝΡΩΜΑΙΩΝ
ΤΟΥΣΠΕΡΙΕΣΤΩΤΑΣΚΙΝΔΥΝΟΥΣΟΥΤΟΣΟΜΟΙΩΣΟΥΤΕΚΑΚΟΠ
ΝΟΥΤΕΚΙΝΔΥΝΟΝΕΚΚΑΙΝΩΝΟΥΤΕΤΩΝΚΑΤΑΤΟΝΒΙΟΝΕΛΑΣΣΩΜΑΤ
ΟΓΟΝΠΟΙΗΣΑΜΕΝΟΣΠΡΟΘΥΜΩΣΕΠΕΔΩΚΕΝΕΠΙΤΗΝΠΡΕΣΒΕΙΑΝΕΑΥΤ
ΑΙΕΜΦΑΝΙΣΑΣΤΗΝΠΕΡΙΤΗΝΠΟΛΙΝΚΑΤΑΣΣΤΑΣΙΝΕΛΑΒΕΝΑΠΟΚΡΙΣΙ
ΙΛΑΝΘΡΩΠΟΝΚΑΙΑΚΟΛΟΥΘΟΝΤΗΙΤΕΤΩΝΠΟΛΙΤΩΝΠΡΟΣΤΟΝΔΗΜ
ΩΝΡΩΜΑΙΩΝΕΥΝΟΙΑΙΚΑΙΤΗΙΕΑΥΤΟΥΠΕΡΙΤΑΚΟΙΝΑΦΙΛΟΤΙΜΙΑΔΙΑΒ/
ΩΝΔΕ ΩΝΡΩΜΑΙΩΝΕΙΣΤΗΝΑΣΙΑΝΠΡΟΣΠΑΝΤΑΣΠΡΕΣΒΕΥΩΝΔΙΕΤΙ
ΠΕΡΙΤΗΣΠΟΛΕΩΣΕΜΦΑΝΙΞΩΝΔΙΚΑΙΑΚΑΙΣΥΣΤΡΑΤΕΥΟΜΕΝΟΣΑ
ΛΕΙΠΕΝΟΥΣΠΑΡΙΣΤΑΜΕΝΟΣΠΡΟΣΤΗΝΕΥΝΟΙΑΝΤ ΜΟΥΛΙ
ΡΑΦΟΝΚΑΙΤΩΝΠΡΑΓΜΑΤΩΝΓΝΗΣΙΩΣΠΡΟΣΤΟΠΑ
ΕΚΑΤΟΕΞΞΗΣΤΑΓΕΙΣΣΤΡΑΤΗΓΟΣΕΠΙΤΗΣ
ΣΕΠΙΤΡΟΧΑΙΞΩΝΤΩΝΔΙΗΓΩΝΙΤ
ΝΔΥΝΟΝΚΑΙΚΑΚΟΠΑΘΙΑΝ/
ΠΟΛΙΤΑΙΣΚΑΙΜΕ
ΒΕΥΣΟΝΤ

Der Stein ist, besonders in seinem unteren Theile, stark verwaschen und die Lesungen sind daher an einzelnen Stellen nicht ganz sicher. So ist Z. 5 wohl zu lesen ΟΥΤΟΣ statt ΟΥΤΩΣ und Z. 7 wohl ΛΑΣΣΕ statt ΛΑΣΧΕ, wie mir Wachsmuth vorschlägt.

Ἔδο]ξεν τῇ βουλῇ καὶ τῷ δήμῳ· Ἐπεὶ Μαχάων Ἀσκλη[π]ιά[δου ἀνὴρ
κ]α[λὸς] ὢν καὶ ἀγαθὸς ἐν ἀρχῇ τε πολλὰς καὶ μεγάλας παρ[έσχε
τ]ο ἀεὶ χρείας, ἐνδόξως καὶ καλῶς ἀναστρεφόμεν[ος ἔν
τε ταῖς ἀρχαῖς καὶ ταῖς πρεσβείαις, καὶ μετὰ ταῦτα περισ[τά
ντος πολέμου τοὺς πολίτας οὗτ(ο)ς ἑαυτῷ βουλόμεν[ος ἀκ
ολούθως [γε]νέσθαι, τήν τε πρὸς τὸ πλῆθος εὔνοιαν [καὶ προθυμίαν ἐφύ
λασ(σ)ε καὶ τῆς πόλεως περιεχομένης οὐδένα λόγον ποιη[σάμε
νος τῶν [κινδύν]ων εἰς τὰ κοινῇ συμφέροντα αὐθαιρέτως ἐ[πέδω
κεν [ἑ]αυ[τὸν]· πρεσβεύσας τε πρὸς Μάρκον Κοσκώνιο[ν τὸ
ν ἐμ Μακεδονίᾳ τότε στρατηγὸν πάντα τὰ συμφ[έροντα
τῇ πόλει διεπράξατο, χρείαν δὲ ποησαμένου τού[του ἀ
υτῶν πρεσβευσόντων πρὸς τὴν σύγκλητον τὴν Ῥωμαίων [οὔτε
τοὺς περιεστῶτας κινδύνους οὗτος ὁμοίως οὔτε κακοπ[αθία
ν, οὔτε κίνδυνον ἐκ καινῶν, οὔτε τῶν κατὰ τὸν βίον ἐλασσωμάτ[ων λ
όγον ποιησάμενος, προθύμως ἐπέδωκεν ἐπὶ τὴν πρεσβείαν ἑαυτ[ὸν κ
αὶ ἐμφανίσας τὴν περὶ τὴν πόλιν κατάσ⟨σ⟩τασιν, ἔλαβεν ἀπόκρισι[ν φ
ιλάνθρωπον καὶ ἀκόλουθον τῇ τε τῶν πολιτῶν πρὸς τὸν δῆμ[ον τ
ῶν Ῥωμαίων εὐνοίᾳ καὶ τῇ ἑαυτοῦ περὶ τὰ κοινὰ φιλοτιμίᾳ· διαβά[ντ
ων δὲ [τ]ῶν Ῥωμαίων εἰς τὴν Ἀσίαν πρὸς πάντας πρεσβεύων διετ[έλει
περὶ τῆς πόλεως ἐμφανίζων δίκαια καὶ συστρατευόμενος α[ὐτοῖς οὐκ ἀπέ
λειπεν, οὓς παριστάμενος πρὸς τὴν εὔνοιαν τ[οῦ δή]μου ......
γραφον καὶ τῶν πραγμάτων γνησίως πρὸς τὸ πα ....
[ἠν]έ[γ]κατο. Ἑξξῆς ταγεὶς[1] στρατηγὸς ἐπὶ τῆς
ς ἐπιτροχάζων τῶν ΔΙΗΓΩΝΙΤ⌐⌐ [κί]
νδυνον καὶ κακοπαθίαν [τοῖς]
πολίταις καὶ με[τὰ ταῦτα? πρεσ]
βεύσοντο[ς

Ulubad, wo sich die Inschrift befindet, ist ein hauptsächlich von Tscherkessen bewohntes Dorf am Ausfluss des Rhyndakos aus dem Apolloniasee. Im Alterthum befand sich hier keine Ortschaft, erst Alexius I Komnenos (1081—1118) legte zum Schutze des Sees und der Schiffahrt auf dem Rhyndakos gegen die Seldschucken die Festung Λουπάδιον an (Texier Asie min. p. 142 ed. min.). Das Baumaterial wurde von anderwärts herbeigeschafft und besteht zum grossen Theil aus antiken Baustücken, Säulen, Inschriftblöcken, die jetzt beim Niederreissen

[1] Wohl ἑξξῆς ταγεὶς statt ταχθείς. Th. M.

der byzantinischen Mauern durch die Eingeborenen wieder zu Tage treten. Texier nahm an, dieselben stammten aus dem 1½ Stunden entfernten Mohalitsch, dem alten Miletopolis, allein dieses war das ganze Mittelalter hindurch ein blühender Ort, die dortigen Reste aus dem Alterthum sind an Ort und Stelle verbaut und endlich können sich die in Ulubad gefundenen Inschriften nicht auf die unbedeutende Binnenstadt Miletopolis beziehen, sondern weisen vielmehr auf einen mächtigen Seestaat hin. Den wahren Ursprungsort jener Inschriften verräth uns eine andere dortige, auch von mir verglichene, im Bulletin XII p. 188 publicirte Weihinschrift einer Anzahl von Männern, die in einer Seeschlacht ἐν τοῖς καταφράκτοις gekämpft haben; dieses Seegefecht selbst ist in einem über der Inschrift angebrachten Relief dargestellt. Es handelt sich also um eine Stadt, die eine eigene Kriegsflotte hat, das kann aber natürlich nicht Miletopolis sein; die Inschrift ist dadirt ἱππαρχέ[οντος] und damit ist sie als kyzikenisch erwiesen. Also kyzikenische Seesoldaten setzten am Ende eines Krieges jene Inschrift, aber natürlich nicht im Innern des Landes, sondern in Kyzikos selbst. Sie muss demnach, als das Kastell von Ulubad erbaut wurde, aus den Ruinen von Kyzikos dorthin geschafft sein, mit ihr aber auch das übrige in den Mauern befindliche antike Material. Kyzikos ist zwar etwa 9 Stunden von Ulubad entfernt, dennoch darf das Vorkommen kyzikenischer Inschriften in solcher Entfernung nicht befremden. Noch heute fahren die Lastschiffe vom Marmarameer den Rhyndakos hinauf in den Apolloniasee, die Byzantiner brauchten also nur an dem umfangreichen Trümmerfelde von Kyzikos die Steine auf Schiffe zu verladen und konnten sie dann direct bis zum Bauplatz am See transportiren; es war dies sogar einfacher als ein etwaiger Landtransport von Mohalitsch her. Wir dürfen also getrost alle in den Mauern von Ulubad befindlichen Inschriften, von denen hoffentlich im Laufe der Zeit noch eine recht stattliche Anzahl freigelegt werden wird, auf Kyzikos beziehen. Die oben abgedruckte Inschrift passt in der That von allen Städten der Gegend nur auf Kyzikos und der Name Asklepiades, der Z. 1 erscheint, ist gerade in Kyzikos überaus häufig.

Die Zeit der Inschrift lässt sich annähernd bestimmen. Macedonien ist bereits römische Provinz Z. 10 (seit 608); der dortige Statthalter M. Cosconius (Z. 9) wird bei Livius (epit. 56) unter 619 erwähnt: »*M. Cosconius praetor in Thracia cum Scordiscis prospere pugnavit.*« Dann kann die διάβασις der Römer εἰς τὴν Ἀσίαν (Z. 18 und 19) nur der Zug des P. Licinius Crassus Mucianus vom Jahre 623 sein und die in der Inschrift erwähnten kriegerischen Zeiten und Ereignisse sind die des Aristonikoskrieges. Die Inschrift selbst muss

dann einige Jahre nach Beendigung dieses Krieges angesetzt werden. Da wir für die Ereignisse nach dem Tode des letzten Attaliden und für die Erhebung des Aristonikos nur wenige kurze Notizen bei den Schriftstellern besitzen, ist jede neu hinzutretende Quelle von Wichtigkeit, besonders wenn sie uns, wie die vorliegende Inschrift, mitten in die Ereignisse hinein versetzt.

Die Urkunde ist ein Psephisma — wie wir sahen von Kyzikos — zu Ehren eines Bürgers, Machaon, Sohnes des Asklepiades,[1] der sich in schwerer Zeit um sein Vaterland verdient gemacht hat. Durch seine nahen Beziehungen zum pergamenischen Hofe war Kyzikos schon früh in freundschaftliche Verbindung mit Rom getreten. Als daher im Jahre 621[2] Attalos III. gestorben war und sein Reich den Römern vermacht hatte, hielt die Stadt an Rom fest und weigerte sich, ebenso wie Ephesos, Sestos und zahlreiche andere Griechenstädte, den Praetendenten Aristonikos anzuerkennen. Dieser wendet sich nun zuerst gegen jene Städte und erringt anfangs eine Reihe von Vortheilen, Just. XXX 4. Auch Kyzikos wird in den Krieg verwickelt (Z. 4 und 5) und geräth in schwere Gefahr; der Ausdruck *τῆς πόλεως περιεχομένης* (Z. 7) lässt sogar an eine Belagerung denken. In dieser Noth wendet sich die Stadt an den nächsten römischen Befehlshaber, den Statthalter von Makedonien M. Cosconius, der also 621 noch in seiner Provinz war. Cosconius konnte natürlich nicht selbst eingreifen, der Stadt auch keine römischen Truppen zu Hülfe schicken, zumal gerade in Folge des Aristonikoskrieges in seiner eigenen Provinz eine Erhebung der Thraker im Chersones stattgefunden zu haben scheint (s. Dittenberger Sylloge 246, 18); wenn dennoch die Gesandtschaft, an der Machaon Theil nahm, als erfolgreich bezeichnet wird (Z. 10 und 11 *διεπράξατο πάντα τὰ συμφ[έροντα] τῇ πόλει*), so erklärt sich dies vielleicht so, dass Cosconius den König Nikomedes II. von Bithynien anwies, mit seinem Heere Kyzikos zu entsetzen. Wenigstens sagt Strabo XIV, 646 *καὶ Νικομήδης ὁ Βιθυνὸς ἐπεκούρησε*; Nikomedes aber war der Grenznachbar von Kyzikos, diese Stadt hätte also in erster Linie seines Schutzes bedurft. Im übrigen hatte Cosconius die Kyzikener an den Senat gewiesen; es wird also nach Rückkehr der ersten Gesandtschaft eine neue nach Rom abgeordnet, an der wiederum Machaon freiwillig theilnimmt. Als Wortführer führt er die Verhandlungen mit dem Senat, legt die asiatischen Verhältnisse dar (Z. 16) und erwirkt einen günstigen Bescheid für die Stadt. Wir

---

[1] Wenn ein Mann Namens Asklepiades seinen Sohn Machaon nennt, so liegt es nahe ihn für einen Arzt zu halten.

[2] Dass Attalos erst 621, nicht wie Borghesi annahm 620 gestorben ist, hat Waddington fastes p. 661 erwiesen.

werden dies beziehen dürfen auf die Anfang 622 erfolgte Absendung von 5 Gesandten unter dem pontifex maximus P. Scipio Nasica Serapio (s. Borghesi oeuvr. II p. 444 ff. und Waddington fastes p. 662), die offenbar auf Grund vieler solcher Hülfsgesuche wie des kyzikenischen geschah. Scipio starb zu Pergamon im Jahre 622, der Bericht der anderen Gesandten aber veranlasste den Senat, im Jahre 623 ein Heer unter dem Consul P. Crassus Mucianus nach Asien abzusenden; hierauf beziehen sich die Worte *διαβάντων δὲ [τ]ῶν Ῥωμαίων εἰς τὴν Ἀσίαν* (Z. 18 u. 19). Machaon ging als Gesandter seiner Vaterstadt in das Lager des Consuls und führte ihm ein Contingent städtischer Hülfstruppen zu (*συστρατευόμενος α[ὐτοῖς]*), mit denen er während des Feldzuges auf Seiten der Römer focht; er blieb auch den Nachfolgern des Crassus, dem M. Perperna (624—25) und M'Aquillius (625—28) attachirt (*πρὸς πάντας* Z. 19) und wird auch bei der Ordnung der asiatischen Verhältnisse durch die 10 römischen Gesandten und den Consul Aquillius das Interesse von Kyzikos vertreten haben. Die günstige Stellung der Stadt auch schon vor dem mithradatischen Kriege wird das Resultat seiner Bemühungen sein.

Soviel etwa lässt sich aus unserer Inschrift gewinnen; in den arg verstümmelten unteren Zeilen war von weiteren Verdiensten des Machaon die Rede, so Z. 25—27 von einer nochmaligen Gesandtschaft; den Schluss des Psephisma bildete wohl eine Aufzählung von Ehren für Machaon.

3. Sardes. Weisser Marmorblock, im Felde zwischen den Ruinen und dem türkischen Caffeehaus. Hoch 1.16, Buchstaben 0.037. Ausser meiner eigenen Copie konnte ich noch eine zweite, von Dr. Carl Buresch mir freundlich zur Verfügung gestellte benutzen, der ich den von mir nicht erkannten Buchstabenrest am Ende von Z. 5 entnehme.

ΤΗΣΑΨ ΙΌ
ΡΑΣΤΩΝΘ
ΛΟΣ-ΚΑΙΜΙ
ΗΣΑΣΙΑΣ-Κ
ΠΑΣΗΣ-ΚΑΙΔΙ_
ΤΩΝΣΕΒΑΣΤΩΝΙ
ΔΟΓΜΑΤΑΤΗΣΙΕ
ΚΛΗΤΟΥ-ΦΙΛΗΣΙ
ΜΑΧΟΥΡΩΜΑΙΩΝ-Ι
ΑΣΤΟΥΚΥΡΙΟΥΗΜ
ΚΡΑΤΟΡΟΣΣΑΡΔΙΑ
ΛΕΩΣ
ΑΙΛ-ΘΕΟΔΩΡΟ
ΛΝΟΣΟΕΡΓΕΠΙΣ
ΤΗΣΤΕΟΙΚΟΔΟΜΗΣ
ΣΚΟΥΤΛΩΣΕΩΣΤΟΥ
ΣΙΛΙΚΟΥ-ΤΟΝΤΗΣΠ
ΔΟΣΚΑΙΕΑΥΤΟΥΕΝ
ΕΥΕΡΓΕΤΗΝ

[πρώ oder μεγίσ
της ἀφ[ο]ρο[λογήτου, καὶ ἱε
ρᾶς τῶν θ[εῶν, (πρώτης Ἑλλά (?)
δος, καὶ μ[ητροπόλεως πρώ
τ]ης Ἀσίας κ[αὶ Ἑλλάδος
πάσης, καὶ δὶ[ς νεωκόρου
τῶν Σεβαστῶν κ[ατὰ τὰ
δόγματα τῆς ἱε[ρᾶς συγ
κλήτου, φίλης κ[αὶ συμ
μάχου Ῥωμαίων, κ[αὶ ἰδί[1]
ας τοῦ κυρίου ἡμ[ῶν Αὐτο
κράτορος, Σαρδιαν[ῶν πό
λεως
Ποπλ.] Αἰλ. Θεόδωρο[ς . . . .
. . . . ανός, ὁ ἐργεπισ[τάτης
τῆς τε οἰκοδομήσ[εως καὶ
σκουτλώσεως τοῦ [(ἔξω?)βα
σιλικοῦ, τὸν τῆς π[ατρί
δος καὶ ἑαυτοῦ ἐν [πᾶσιν
εὐεργέτην.

Der fehlende obere Theil der Inschrift enthielt den Namen des Geehrten und mehrere Attribute dazu, von deren letztem dann die Reihe der zu Σαρδιανῶν πόλεως gesetzten Genitive abhängt.

Die Zeit der Inschrift lässt sich ziemlich genau bestimmen; sie muss nach den Regierungsantritt des Septimius Severus fallen, unter dem Sardes die zweite Neokorie erhielt (Büchner de neocor. p. 86), denn Z. 5 und 6 heisst die Stadt bereits δὶ[ς νεωκόρου] τῶν Σεβαστῶν. Andererseits muss sie vor 217, das Todesjahr des Antoninus fallen, da die seit diesem Kaiser nachweisbare dritte Neokorie noch nicht erwähnt ist, auf einer Inschrift aber nicht hätte fehlen dürfen (Büchner p. 76 f.). Nun lesen wir aber Z. 10 und 11 τοῦ κυρίου ἡμ[ῶν Αὐτο]κράτορος, es fallen also von dem Zeitraum 193—217 die Jahre 198—212 fort, während derer Antoninus erst mit seinem Vater Severus, dann mit seinem Bruder Geta regierte, es also zwei κύριοι Αὐτοκράτορες gab. So bleiben die Jahre 193—198 und 212—217, von denen aber die letzteren passender erscheinen, einmal der politischen Verhältnisse im Osten wegen, dann auch deshalb, weil Sardes den Titel μ[ητροπόλεως πρώ]της Ἀσίας κ[αὶ Ἑλλάδος] πάσης, den ich Z. 3—5 ergänzt habe, erst seit Antoninus, dem Sohne des Severus, auf den Münzen führt, s. Marquardt, Staatsverw. I, 343, Anm. 5. Natürlich muss die In-

[1] So ergänze ich nach einem Vorschlage Theodor Mommsen's.

schrift dann sehr bald nach 212 fallen, da ja die bereits unter Antoninus vorkommende dritte Neokorie noch fehlt.

Auch sonst bietet die Inschrift manches Interessante. So erfahren wir erst durch sie, dass Sardes zu den wenigen urbes foederatae im Osten gehört; dies zeigen die Worte φίλης κ[αὶ συμ]μάχου Ῥωμαίων Z. 8; s. Marquardt I, S. 75.

Die Ergänzungen der ersten Zeilen sind natürlich problematisch; es handelt sich, wie es scheint, um das von Hadrian constituirte κοινὸν der Πανέλληνες, dem ja eine ganze Reihe kleinasiatischer Städte angehörten, vergl. Marquardt I, 345, Anm. 5.

Z. 6. κ[ατὰ τὰ] δόγματα τῆς ἱε[ρᾶς συγ]κλήτου, hierzu ist zu vergleichen Büchner, S. 74 f.

Z. 10. τοῦ κυρίου ἡμ[ῶν Αὐτο]κράτορος ist Übersetzung des seit Septimius Severus gebräuchlichen Titels dominus noster, Mommsen, Staatsr. II, 739. Gemeint ist natürlich Antoninus, des Severus Sohn.

Z. 13. Der hier genannte Aelius Theodorus ist vielleicht identisch mit dem auf einer Münze von Sardes (Mionnet, suppl. VII, n. 436) vorkommenden Manne dieses Namens.

Z. 14—17. Zu den Worten ὁ ἐργεπισ[τάτης] τῆς τε οἰκοδομήσ[εως καὶ] σκουτλώσεως τοῦ [.... βα]σιλικοῦ ist zunächst die Bedeutung von βασιλικὸς festzustellen. Auf einer Inschrift aus Aphrodisias C. I. Gr. 2782 (vergl. dazu die Bemerkungen Boeckhs) erscheint er als ein Theil des Gymnasiums, und in diesem Sinne wird das Wort auch hier gebraucht sein. In jener Inschrift lesen wir Z. 25 τὸν ἐν[τὸς β]ασιλικόν, es war also dementsprechend auch ein ἔξω βασιλικὸς vorhanden. Nun füllen oben in Z. 16 die Buchstaben βα nicht den ganzen fehlenden Raum, vielleicht ist auch hier eines der beiden Worte einzusetzen, und zwar würde des Platzes wegen nur ἔξω stehen können.

Das Wort σκούτλωσις (Z. 16) kommt nur noch einmal bei dem Mathematiker Heron vor, bei dem es Verzierungen am Saume des Gewandes bezeichnet. Auf unserer Inschrift steht es allgemein gebraucht für »Verzierung, Ausschmückung«.

4. Mytilene. Grosser blauer Marmorblock in der Schule. Hoch 0^{m}.64, breit 0^{m}.52, d. 0^{m}.56, oben profilirt. Nach einer ganz ungenügenden Copie des Dr. Bernardakis in der archaeologischen Zeitung 1885 S. 150 von Fränkel publicirt.

ΟΜΠΗΙΟΝΜΑΚΡΕΙ
ΝΝΕΟΝΘΕΟΦΑΝΗΝ
ΚΟΥΑΤΤΟΡΟΥΙΡΟΝΤΑ
ΜΙΑΝΚΑΙΑΝΤΙΣΤΡΑΤΗ
ΓΟΝΠΟΝΤΟΥΚΑΙΒΕΙΘΥ
ΝΙΑΣΔΗΜΑΡΧΟΝΣΤΡΑ
ΗΓΟΝΔΗΜΟΥΡΩΜΑΙ
ΝΕΠΙΜΕΛΗΤΗΝΟΔΟΥ
ΝΗΣΠΡΓΣΒΕ

M. Π]ομπήιον Μακρεῖ-
νο]ν Νέον Θεοφάνην
κουαττόρουιρον τα-
μίαν καὶ ἀντιστράτη-
γον Πόντου καὶ Βειθυ-
νίας δήμαρχον στρα-
τ]ηγὸν δήμου Ῥωμαί-
ω]ν ἐπιμελητὴν ὁδοῦ
Λατί]νης πρεσβε[υτὴν

In Zeile 1 sind sicher nur 2 Buchstaben ausgefallen, es kann also von den beiden in der Familie des Theophanes gebräuchlichen praenomina Cneus und Marcus nur das Letztere gestanden haben.

Die Untersuchung über die Persönlichkeit des hier geehrten Macrinus und über seine verwandtschaftlichen Beziehungen zu den übrigen bekannten Nachkommen des Theophanes würde hier zu weit führen und soll an anderer Stelle gegeben werden; ich begnüge mich zu bemerken, dass Νέος Θεοφάνης in Z. 2 nicht in dem Sinne etwa von νέος Διόνυσος gebraucht ist, wie Fränkel meint. Theophanes ist, wie der Vergleich mit der Inschrift eph. epigr. II p. 19 lehrt, wirkliches Cognomen und Νέος hat die Bestimmung wie auch sonst bei Eigennamen, den Betreffenden von einem gleichnamigen älteren Manne zu unterscheiden, in unserem Falle den M. Pompeius Macrinus Theophanes von einem älteren M. Pompeius Macrinus, offenbar seinem Vater.

Z. 4. ταμίαν καὶ ἀντιστράτηγον ist quaestorem pro praetore, ebenso C. I. L. XII 3164 qu. propr. provinc. Ponti et Bithyniae. Da die Provinz noch senatorische zu sein scheint, müsste die Inschrift in das erste nachchristliche Jahrhundert gehören.

Z. 9. Da nur 4 Buchstaben ausgefallen sind, ist die einzig mögliche Ergänzung Λατί]νης. Die Verwaltung des Macrinus muss in die Zeit fallen, bevor eine via Latina vetus und nova unterschieden wurden, Mommsen St. R. II 1030 Anm. 1. Diese Scheidung aber muss in das letzte Jahrzehnt des 2. Jahrhunderts gesetzt werden, denn Marius Maximus war in den letzten Jahren des Commodus noch cur. viae Latinae (C. I. L. VI 1450) dagegen Octavius Sabinus cos. 214 bereits curat. viae Latinae n[ovae] (C. I. L. X 5398, cf. Mommsen in der eph. epigr. I p. 133) und zwar um 205 n. Chr., wie aus dem cursus honorum zu schliessen ist.

Z. 9. Nach πρεσβευ[τὴν ist der Name einer Provinz ausgefallen und zwar natürlich einer praetorischen. Über denselben ist wenigstens eine Vermuthung möglich. Wir kennen nämlich durch die Inschrift C. I. L. III 125 (= C. I. Gr. 4566) einen legatus pro praetore Theo-

phanes von Galatia, aus unbestimmter Zeit; s. Liebenam Forsch. z. Verwaltungsgesch. I S. 182. Nun ist aber Theophanes als cognomen eines Römers überhaupt nur noch bei dem Macrinus unserer Inschrift nachweisbar;[1] da aber gerade dieser gleichfalls leg. pro praet. ist, werden wir beide identificiren dürfen. Für die Zeitbestimmung der Inschrift gewinnen wir hierdurch wenigstens soviel, dass diejenigen Jahre für die Verwaltung des Theophanes ausgeschlossen sind, während welcher Galatien consularische Statthalter hatte. Marquardt St. Verw. I 361 ff.

5. Eresos. Marmorblock in der Hauptkirche, neben der Schule; aus den Ruinen der alten Stadt stammend, hoch 0^m65, breit 0^m31, dick 0^m16, Buchst. 0.008. Der Stein ist sehr verwaschen, ausserdem ist durch Ungeschicklichkeit eines Popen das Öl einer heiligen Lampe darüber geschüttet und so ist die Lesung eine überaus schwierige. Der im folgenden gegebene Text beruht auf meiner in zwölfstündiger Arbeit angefertigten Copie und auf einer zweimaligen, mit der Lupe vorgenommenen Prüfung der Abklatsche. Für die Gestaltung des Textes und die dialektischen Formen verdanke ich meinem früheren Lehrer Hrn. Dr. Rich. Meister zahlreiche werthvolle Rathschläge.

Die Inschrift wird etwa in die zweite Hälfte des dritten Jahrhunderts fallen; die Erwähnung des βασίλευς Πτολέμαιος Z. 26 lässt vermuthen, dass sie aus der Zeit stammt, als Lesbos — wenn auch vielleicht nur die West- und Nordwestküste — unter aegyptischer Herrschaft standen. Pottier und Hauvette-Besnault haben gezeigt (Bull. IV p. 435), dass dies unter Ptolemaeus III Euergetes und Ptolemaeus IV Philopator der Fall war; ich möchte glauben, dass, wenigstens Eresos, auch schon unter Ptolemaeus II den Aegyptern unterworfen war, denn C. I. Gr. 2168c werden Arsinoe und Philadelphos auf einer eresischen Inschrift genannt.

Auch sprachlich passt jene Zeit am besten; wir haben nämlich eine Übergangsperiode zu erkennen, in der hellenistische Formen einzudringen beginnen. Offenbar steht aber die Inschrift noch ganz im Anfang dieser Periode, wie das häufige Schwanken zwischen aeolischer und hellenistischer Form desselben Wortes zeigt. So lesen wir Z. 27 und 45 μῆννος, aber Z. 44 μῆνος, Z. 28 ἔφειχε und Z. 36 ἔπειχε, Z. 4 u. ö. πόλιος, aber Z. 8 πόλει u. s. w. Diese hellenistischen Formen beginnen aber gerade im dritten Jahrhundert immer mehr sich zu verbreiten.

Es kann hier natürlich nicht auf alle Einzelheiten der Inschrift, besonders die sprachlichen, eingegangen werden und ich begnüge mich, nur das wichtigste hervorzuheben.

---

[1] Nur ein griechischer Freigelassener L. Spurius Thiophanes erscheint noch einmal auf einer Inschrift aus Ostia C. I. L. XIV 420.

. ʅ ΨΙΔΙΑΙ
ΟΥΤΕΚ ΠΑΘΙΑΝΟΥΤΕΔΑΠΑΝΑΝΥ
ΟΣΔΙΑΤΑΝΙΔΙΑΝΦΙΛΟΤΙΜΙΑΝΤΑΤΕΣΕ
ΔΥΝΑΤΟΤΟΤΕΚΑΤΑΤΑΣΠΟΛΙΟΣΕΝ ΟΝΑΡ ΟΛ
ΙΠΕΠΡΕΣΒΕΥΚΩΝΔΕΚΑΙ ΛΛΙΣΠΡΕ
ΜΟΝΠΡΕΣΒΕΙΑΤΑΠΕΡΙΕΠΙΣΤΑΤ Α ΓΕΝΟΜΕ
ΑΜΕΝΟΣΚΡΙΣΙΟΣΤΕ ΣΙ ΣΙ ¯ΤΑΙ ΚΕΚΑΙ ΙΔΕ
ΔΙΣ ΕΡΕΤΑΠΟΛΕΙΕΠΙΠ ΕΩΝΠΕΡΙ
ΜΕΝ ΤΟΙΣΝΙΚΑΣΑΝΤΑΣΕΙΔΕΣ /
ΕΤΙΝ ΩΝΙ ΙΔ ΟΙ Τ
Τ ΔΙΑΤΕΙ ΟΥΜΕΝΑ
ΤΩΣΥΝΑΝΤΕ Λ ΑΝΤ
ΜΝΕΚΑΙΤΑΣΥΜΦΕΡΟΝΤΑΤΩ
Α ΕΟΥΚΟΛΙΓΑΥΠΟΤΩΔΑΜΩΤΑ
ΩΝΕΑΥΤΟΝΕΜΠΑΝΤΕΣΣΙ ΕΥ
ΣΓΡΑΦΩΝΤΑΚΡΑΤΙΣΤΑΤΑΙ Σ
ΑΜΕΝΟΣΥΠΕΡΤΩΝΚΟΙΝΑΣΥΜΦ ΟΝΤ Ν
ΙΟΣ ΤΑΤΑΝΙΔΙΑΝΔΥΝΑΜΙΝ ΤΑΝ
ΘΕ ΚΑΙΣΤΕΦΑΝΩ ΤΟΥΤΟΙ
ΕΤΩΔΑΜΩ——ΕΠΕΙ ΑΠ ΚΤΟΡΟ
ΑΝΤΟΥΤΩΜΑ ΔΕΔΟΚ
ΩΝΑΠΟΛΥΑΡΧ ΑΝΔΡΑ ΤΑ
ΟΝΤΑΤΑΣΥΜΦΕΡΟΝΤΑΤ ΛΛ
ΠΡΑΤΟΝΕΝΤΕΤΟΙΣΔΙΟΝΥΣΙΟΙΣ
ΝΤΟΙΣΓΥΜΝΙΚΟΙΣΙΑΓΩΝΕΣΣΙΟΙΥΣΤ
ΣΙΛΕΙΠΤΟΛΕΜΑΙΩ Σ ΑΝΟ
ΗΡΙΝΤΩΑΓΕΡΡΑΝΙΩΜΗΝΝΟΣΤΑΤ
ΔΑΙΣΕΦΕΙΚΕΜΕΛΛΙ Σ ΝΑΓΑΛ Ω
ΕΝΤΑΣΑΝΑΝΓΓΕΛΛΕΤΩΤΑΓ ΩΝΤΩΝΑ
ΤΙΟΔΑΜΟΣΣΤΕΦΑΝΟΙΔΑΜΩΝΑΠΟΛΥΑΡ
ΙΑΙΑΣΤΑΣΕΙΣΑΥΤΟΝΚΑΙΕΥΣΕΒΕΙΑΣΤΑΣΠΡΟ
ΤΩΙΕΝΝΟΜΩΚΑΙΕΙΚΟΝΙΧΑΛΚΙΑΤΑΣΔΕΔΟΝ
ΕΝΤΟΙΣΔΙΟΝΥΣΙΟΙΣΙΤΟΓΧΟΡΟΣΤΑΤΑΟΝΕ
ΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΝΑΙΤΟΝΕΝΕΣΤΑΚΟΝΤΑΚΑ
Ν ΕΝΤΟΙΣΑΓΩΝΕΣΣΙΠΑΝΤΕΣΣΙΟ Κ
ΚΕΕΠΕΙΚΕΚΑΙΤΟΙΣΑΛΛΟΙΣΕΥΕΡΓΕ
ΔΙΑ ΕΙΣΤΟΠΡΟΤΑΝΗΙΟΝΕΠΙΤΑΙΣΘΥΣΙΑ
ΑΤΤΑΠΡΟΤΕΡΟΝΑΥΤΩΓΕΓΟΝΟΝΤΑΠ ΡΠ
ΕΩ ΑΙΝΕΣΘΑΙΤΟΝΔΑΜΟΝΑΞΙΑΙΣΑΠΟΝΕΝ
ΕΥΕΡΓΕΤΕΝΤΕΣΣΙ —— ΔΙΔΩΣΘΑΙΔΑΜΩ
ΙΣΤΟΝΕΝΙΑΥΤΟΝΥΠΟΤΩΤΑΜΙΑΚΑΙΤΩΝ
ΟΝ_ ΟΥΗΝΥΠΕΡΣΩΤΗΡΙΑΣΤΑΣΠΟΛΙΟ
ΟΛΙΤΑΝΚΑΙΓΥΝΑΙΚΩΝΚΑΙΤΕΚΝΩΝΤΑΤ
ΝΗΙΩΤΩΜΗΝΟΣΤΩΟΜΟΛΟΙΩΤΑΕΡΔΟΝ
ΤΟΣΙΡΗΤΕΥΕΙΤΩΑΓΕΡΡΑΝΙΩΜΗΝΝΟ
ΑΚΑΙΤΟΙΣΓΙΝΟΜΕΝΟΙΣΚΑΤΕΝΙΑΥΤΟ
ΓΟΤΑΣΣΗΝΑΙΕΚΤΑΝΠΡΟΣΟΔΩΝΚΑΙΕΚΤΩ
\ ΔΥΟΣΤΑΤΗΡΕΣ -—— ΕΝΔΕΤΑ
ΤΑΜΙΑΝΑΠΟΤΑΝΠΡΟΣΟΔΩΝ ΞΠ/
\ΛΚΙΑΝΕΝΤΟΠΩΤΑΣΑΓΟΡΑΣΤΩΕΠΙΦ/
ΔΑΜΟΣΔΑΜΩΝΑΠΟΛΥΑΡΧΩΠΟΛΙΤΑΙ
Α ΥΚΑΚΑΙΕΥΧΟΡΑΣΤΑΣ ΑΜ
ΟΙΣΘΕΟΙΣΤΟΔΕΤΑ Ν ΑΤΑΣ Σ
ΕΚΑΣΤΟΝΕΝΙΑΥΤΟΝ
ΣΑΠΟΤΑΝΠΡΟΣΟΔΩΝΕ ΤΑ
ΕΝΙ[illegible]ΕΤΑΣΤΑΙΣΝ
ΑΔΕΣΠ ΝΑ
ΣΤΑΛΛΑΣ \
Σ ΝΟΜΕ
ΤΑΣ

οὔτε κ[ακ]οπαθίαν οὔτε δαπάναν ὑ[πὲρ
διὰ τὰν ἰδίαν φιλοτιμίαν τά τε σε...
ἐ]δύνατο, τό τε κατὰ τᾶς πόλιος ἐν ... ον ἀρ....
πεπρεσβεύκων δὲ καὶ [ἄλλαις] πρε[σβείαις.. καὶ τᾷ
πρὸς τὸν ......δᾶ]μον πρεσβείᾳ τᾷ περὶ ἐπιστατ[εί]α[ς] γενομέ[νᾳ
....άμενος κρίσιος
ἔφ]ερε τᾷ πόλει ἐπὶ περὶ
τοὺς νικάσαντας

καὶ τὰ συμφέροντα τῷ [δάμῳ
οὐκ ὀλίγα ὑπὸ τῶ δάμω
.ἑαυτον ἐμ πάντεσσι
γράφων τὰ κράτιστα
..άμενος ὑπὲρ τῶν κοίνᾳ συμφ[ερ]όντ[ω]ν
ὁ δᾶ]μος [κα]τὰ τὰν ἰδίαν δύναμιν [καὶ] τὰν
καὶ στεφάνῳ
ἔδοξ]ε τῷ δάμῳ· ἐπεὶ
τούτῳ δέδοκ[ται
Δάμ]ωνα Πολυάρχ[ω ....] ἄνδρα
... οντα τὰ συμφέροντα τ[ῷ δάμῳ
πρᾶτον ἔν τε τοῖς Διονυσίοισ[ι
ἐ]ν τοῖς γυμνίκοισι ἀγώνεσσι οἱ ὑστ....
βα]σίλει Πτολεμαίῳ
τῶ Ἀγερρανίω μῆννος τᾷ τ[ρίτᾳ ἀμέρᾳ?
....δαις ἔφεικε ἀγαλ[μάτ]ω[ν
..εντας ἀνανγγελλέτω τὰγ
ὅ]τι ὁ δᾶμος στεφάνοι Δάμωνα Πολυάρ[χω
...αίας τᾶς εἰς αὔτον καὶ εὐσεβείας τᾶς πρὸ[ς
στεφάνῳ] τῷ ἐννόμῳ καὶ εἴκονι χαλκίᾳ τᾶς δεδομ
ἐν τοῖς Διονυσίοισι τὸγ χοροστάτα [ν? καὶ
τὸγ γ]υμνασίαρχον αἴ τὸν ἐνεστάκοντα κα[τ' ἐνίαυτον
.ἐν τοῖς ἀγώνεσσι πάντεσσι
ἔπεικε καὶ τοὶς ἄλλοις εὐεργε[τέντας
εἰς τὸ προτανήιον ἐπὶ ταὶς θυσία[ις
κ]αττὰ πρότερον αὔτῳ γεγόνοντα π...
...αίνεσθαι τὸν δᾶμον ἀξίαις ἀπονέμ[εσθαι
τίμαις ....]εὐεργετέντεσσι. — Δίδωσθαι Δάμω[νι Πολυάρχω
κατ' ἕκα]στον ἐνίαυτον ὑπὸ τῶ ταμία καὶ τῶν [ἐξετάσταν?
ὑπὲρ σωτηρίας τᾶς πόλιο[ς
π]ολίταν καὶ γυναίκων καὶ τέκνων τατ..

ἐν τῷ προτα]νηίῳ τῶ μῆνος τῶ Ὀμολοΐω τὰ ἐρδόμ[ενα
45 ? ὄστις κατ' ἔ]τος ἰρητεύει τῶ Ἀγερρανίω μῆννο[ς
καὶ τοῖς γινομένοις κατ' ἐνίαυτο[ν
ποτάσσην, ἄι ἐκ τᾶν προσόδων καὶ ἐκ τῶ[ν
δύο στάτηρες. — Ἐν δὲ τῷ
ταμίαν ἀπὸ τᾶν προσόδων
50 εἴκονα χ]αλκίαν ἐν τόπῳ τᾶς ἀγόρας τῷ ἐπιφ[ανεστάτῳ
51 ὀ] δᾶμος Δάμωνα Πολυάρχω πολίταν
52 κάρ]υκα καὶ εὐχοράστας

58 ἐπὶ] στάλλας [λ]ι[θίνας

Die Inschrift ist ein Psephisma zu Ehren des Damon, Sohnes des Polyarchos, der als Gesandter, Beamter und Wohlthäter seiner Vaterstadt sich verdient gemacht hat und nun durch Kränze, Statue, Bewirthung im Prytaneion u. s. w. geehrt wird. Der Hauptgewinn, den sie uns bietet, dürfte in dem Nachweis zweier neuer lesbischer Monatsnamen bestehen. Z. 44 erscheint nämlich ein Monat Ὀμολόϊος, der bei verschiedenen aeolischen Völkerschaften nachweisbare Ὁμολώιος vergl. Bischoff, Leipz. Stud. VII S. 410. Ferner kommt zweimal (Z. 27 und 45) ein Monat Ἀγερράνιος vor, der bisher noch nirgend erwähnt war;[1] Meister leitet sehr ansprechend den Namen von ἀγείρω ab, also »der Erntemonat«, dann würde er etwa mit unserem Mai oder Juni zusammenfallen, in denen auf Lesbos die Ernte stattfindet. Wenn die Inschrift C. I. G. 6850A wirklich lesbischen Ursprungs ist, kennen wir also jetzt zehn lesbische Monatsnamen; sieben sind bei Bischoff S. 349 zusammengestellt, der achte ist der Φράτριος auf einer von mir publicirten mytilenaeischen Inschrift (Ath. Mitth. XIII S. 57), der neunte und zehnte die beiden obigen.

An neuen dialektischen Formen hebe ich hervor προτανήιον (Z. 37) γεγόνοντα (Z. 38), Ὀμολοΐω (Z. 44) mit Verkürzung des ω (cf. Meister, Griech. Dial. I S. 100), ferner Ἀγερρανίω (Z. 27 und 45) mit doppeltem ρ und endlich vor Allem das interessante ἐρδόμ[ενα] in Z. 44.

[1] Einen Monat Ἀγριάνιος gab es auf Kos, vit. Hippocr. 1, 1.

Ausgegeben am 9. Mai.

1889.

XXIV.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

2. Mai. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Virchow las über ostafrikanische Schädel.

Die Mittheilung folgt umstehend.

2. Hr. Schwendener legte eine Mittheilung des Custos am botanischen Museum, Hrn. Dr. Schumann vor: Beiträge zur Kenntniss der Monochasien.

3. Hr. Kundt legte eine Mittheilung des Hrn. Prof. E. Cohn zu Strassburg i. E. vor über die Dielektricitätsconstante des Wassers.

Die Mittheilungen 2 und 3 werden in späteren Berichten erscheinen.

Über ostafrikanische Schädel.

Von Rud. Virchow.

Hr. Dr. F. Stuhlmann, der seit längerer Zeit mit Unterstützung der Akademie zoologische Untersuchungen in Zanzibar und dem benachbarten Festlande anstellt, hat Gelegenheit gehabt, auch eine Anzahl von Schädeln Eingeborener daselbst zu erlangen. Ein Theil derselben ist vor Kurzem über Hamburg hier eingetroffen. Obwohl nur einer davon einen Unterkiefer besitzt und auch der Erhaltungszustand der meisten zu wünschen übrig lässt, so bieten diese Schädel doch ein besonderes Interesse dar, da sie sämmtlich auf dem deutschen Schutzgebiet in Ostafrika gefunden sind und Stämmen angehörten, über deren physische Beschaffenheit verhältnissmässig wenige brauchbare Beobachtungen vorliegen. Zu bemerken ist, dass sie vor Ausbruch des Aufstandes gesammelt worden sind.

In einem Briefe vom 1. November 1888 giebt Hr. Stuhlmann über die erste Gruppe von 5 Schädeln und einem Becken folgende Auskunft:

»Nr. 1. Usegua-Schädel, aus dem Dorfe Gombesi bei Mbusini (Petershöhe) dicht am Rukagura. Juli 1888 von Hrn. Gärtner Bachmann bekommen. Herkunft sicher verbürgt. Ein Mann, der von einem Beamten der Deutsch-Ostafrikanischen Gesellschaft erschossen wurde. Ohne Kiefer, etwas Hyänenfrass. 2 Löcher von 11^{mm} Kaliber.

»Nr. 2. Unguru-Schädel, von mir in Ost-Unguru, dicht am Kilindi-Berge, am 13. September 1888 in halb verbranntem Grase gefunden, selbst angebrannt. Herkunft ziemlich sicher. Eingeborene von Usegua und Unguru werfen ihre Todten in's Dickicht, wo sie von Hyänen und Grasbränden zerstört werden. Sie verrathen den Ort nicht, so dass Schädel sehr schwer zu bekommen sind.

»Nr. 3. Uniamwesi-Schädel, ziemlich frisch. Halb verfaulter Leichnam, am Strande in Bagamoyo gefunden am 15. August 1888. Ebenso, wie bei Nr. 4 und 5, Herkunft nicht ganz sicher, aber die grösste Wahrscheinlichkeit, dass es Uniamwesi sind, da sich in Bagamoyo sehr viele aufhalten und diese ihre Todten nicht begraben, was die Bewohner der Küste thun. Ohne Kiefer.

»Nr. 4. Uniamwesi-Schädel, im Busch nördlich der Stadt Bagamoyo gefunden. Ohne Kiefer. Vergl. Bemerkung zu Nr. 3. 14. August 1888.

»Nr. 5. Uniamwesi-Schädel, im Busch nördlich von Bagamoyo gefunden am 14. August 1888. Mit Kiefer und Atlas.

»Nr. 6. Becken zu Schädel Nr. 5.

»Endlich lege ich noch eine, mit Nr. 7 bezeichnete Topfscherbe bei, die ebensogut unseren Grabstätten in Deutschland entstammen könnte. Derartige Töpfe, »tschungu« genannt, werden heute noch massenhaft im Inneren und hier fabricirt, gewöhnlich von Kesselform und unverziert, hier jedoch in allen erdenklichen Modificationen und mit Zeichnungen. Die schwarze Farbe rührt meistens nur vom Feuer her. In M-Konda (Süd-Unguru) ward mir jedoch ein Stück Graphit gezeigt, mit dem Töpfe geschwärzt wurden. Er wird dort selten in Bachthälern als erdige Masse gefunden und zu Klumpen geballt. Endlich noch werden hier die Töpfe nach dem Brennen mit einem Pflanzensaft bestrichen (hauptsächlich für Zeichnungen) und nochmals dem Feuer ausgesetzt«.

In einem zweiten Briefe, vom 18. November, berichtet Hr. STUHLMANN ferner:

»Ich habe die Freude Ihnen mitzutheilen, dass ich kurz vor Abgang meiner Sammlungen noch drei Massaï-Schädel[1] erhielt, leider in nicht guter Erhaltung. Die Provenienz derselben ist so gut wie sicher verbürgt. Bei einem Ort, den man von Saadani in 3 starken Märschen erreichen kann, waren vor einiger Zeit auf einem Raubzuge 11 Massaïmänner erschlagen worden. Von diesen bekam mein Führer im Inneren drei Exemplare, und jetzt habe ich ihn ausgeschickt, noch die übrigen 8 zu holen«.

Es ergiebt sich aus diesen Mittheilungen, dass, genau genommen, nur die beiden ersten Schädel, der eines Usegua und der eines Unguru, von Leuten stammen dürften, welche anhaltende Bewohner des Schutzgebietes, und zwar des westlichen Theils desselben, waren. Die Uniamwesi wohnen weit jenseits der Grenzen desselben in dem Gebiete südlich vom Ukerewe (Victoria Nyanza) und östlich vom Tanganjika-See. Sie haben seit langer Zeit die Träger und Diener für die Reisenden hergegeben, welche durch ihr Land ziehen, um in Centralafrika Entdeckungen zu machen. In den letzten Decennien haben auch in ihrem Lande die Sclavenjagden zugenommen. Wahrscheinlich sind auch die früheren Besitzer der Schädel als Sclaven an die Küste gebracht und in Bagamoyo gestorben. Auch die Massaï haben

[1] Nr. 8, 9 u. 10.

ihre Hauptsitze jenseits des Kilima Ndjaro, sowohl im Norden, als im Westen desselben; sie sind von jeher wegen ihrer Wildheit und ihrer räuberischen Einfälle in das Gebiet der friedlicheren Stämme des Ostens gefürchtet gewesen. Einer unserer früheren Reisenden, JOH. MARIA HILDEBRANDT hat seiner Zeit über diese Verhältnisse berichtet.[1] Seiner Auffassung nach stellen die Massaï-Wakwafi die am weitesten nach Süden vorgeschobene Abtheilung der sonst hauptsächlich in Nordostafrika vertretenen Bedjah-Völker dar,[2] während die Hauptmasse der im deutschen Schutzgebiet wohnenden Stämme, und mit ihnen auch die Uniamwesi, nach der gewöhnlichen Annahme[3] schon den Bantu-Stämmen zugerechnet werden.

Verhältnissmässig die meisten Nachrichten besitzen wir von den Uniamwesi, von denen auch Abbildungen vorliegen.[4] Danach unterscheiden sie sich von den eigentlichen Negern sowohl durch ihre, weit mehr der mittelländischen genäherte Gesichtsbildung, als auch durch ihr langes, wenngleich etwas gekräuseltes Kopfhaar. Nur WOOD[5] schreibt ihnen wolliges Kopfhaar zu. Schädeluntersuchungen hat Hr. DUTRIEUX[6] angestellt, und zwar in ihrem Lande selbst unter recht schwierigen Verhältnissen, welche die Zuverlässigkeit seiner Ergebnisse einigermaassen beeinträchtigen. Danach wäre der Schädel-Index im Mittel (74.0) dolichocephal. Unter 10 Schädeln fand sich nur ein brachycephaler (Index 81.2), dagegen auch ein hyperdolichocephaler (Index 66.0). Nicht selten beobachtete er einen sehr ausgeprägten Prognathismus, der jedoch manchmal gänzlich fehlte.

Sehr viel weniger ist über die Einzelheiten der Körperbildung der Massaï bekannt geworden. Obwohl wir eine Monographie von Jos. THOMSON[7] über ihr Land besitzen und ein besonderes Capitel darin, das zehnte, ausdrücklich über Land und Volk handelt, so fehlte es dem Reisenden doch zu sehr an einer anthropologischen Vorbereitung, um auch nur den oberflächlichsten Anforderungen zu entsprechen. Selbst seine Photographien[8] sind so undeutlich, dass es kaum mög-

---

[1] Zeitschrift für Ethnologie 1878. Bd. X. S. 347.

[2] Ebendaselbst. Verhandlungen der Berliner anthropol. Gesellschaft S. 406.

[3] TH. WAITZ, Anthropologie der Naturvölker. Leipzig 1860. II. 361.

[4] J. M. HILDEBRANDT, Zeitschrift für Ethnologie 1879. Bd. XI. Verhandl. der anthrop. Ges. S. 98. Taf. XII. Fig. 7—8. R. HARTMANN, Die Nigritier. Berlin 1876. I. Taf. XXX. Fig. 3 (nach einer Photographie von O. KERSTEN). HENRY M. STANLEY, Durch den dunklen Welttheil. Aus dem Engl. von BÖTTGER. Leipzig 1878. I. S. 153. H. WISSMANN, Unter deutscher Flagge quer durch Afrika. Berlin 1889. S. 262.

[5] J. G. WOOD, The natural history of man. Africa. London 1868. p. 431.

[6] Zeitschrift für Ethnol. 1880. Bd. XII. Verhandl. S. 12.

[7] Durch Massaï-Land. Aus dem Engl. von FREEDEN. Leipzig 1885.

[8] A. a. O. S. 270. 317. 367.

lich wäre, zu entscheiden, ob die Massaï wolliges Haar haben oder nicht, wenn nicht wenigstens einzelne Köpfe deutlich mit langem Haar bekleidet wären. Die Aussage[1]: »das Haar befindet sich auf einer Mittelstufe zwischen dem europäischen und dem Negerhaar, ist im Ganzen dünn, aber gleichmässig über den Kopf vertheilt«, zeigt leider, dass die ersten Ziele der Haarbetrachtung Hrn. THOMSON fremd geblieben waren. Was er sonst sagt, ist nicht ohne Werth, jedoch nicht ausreichend für eine wissenschaftliche Besprechung. Erwähnenswerth ist vor Allem, dass bei den vornehmen Massaï die Männer eine Höhe von $1^{m}85$ erreichen, dabei aber weiche Formen und Umrisse von fast weiblicher Beschaffenheit bewahren. THOMSON sagt daher, sie glichen im Körperbau dem Apollo. Die Nase sei meist hoch und gerade und häufig so wohlgeformt, wie die eines Europäers. Die Lippen seien bald dünn und wohlgeformt, bald dick und schwülstig. Die Augen meist schmal geschlitzt und, wie bei Mongolen, aufwärts gerichtet. Die Kinnbacken stünden selten vor, dagegen träten die Backenknochen überall deutlich vor und der Kopf sei oben und unten gleich schmal. An einer anderen Stelle[2] erkennt THOMSON, in Übereinstimmung mit HILDEBRANDT, dass die Massaï »durchaus keine Neger oder mit den Bantu-Stämmen verwandt sind«. »In dem Bau ihres Schädels sowohl, wie in ihrer Sprache unterscheiden sie sich himmelweit von den Eingeborenen von Central- oder Süd-Afrika und nehmen in dieser Beziehung eine weit höhere Stelle in der Stufenfolge der Menschenrassen ein.«

Die von Hrn. STUHLMANN eingesendeten 3 Massaï-Schädel widersprechen diesen Angaben nicht. Leider sind sie in so hohem Maasse defect, dass es nur möglich ist, einige positive Angaben zu machen. Am meisten bemerkenswerth ist der Umstand, dass die Schädel, nach den Kriterien europäischer Rassen, den Eindruck weiblicher machen. Freilich ist nur an dem einen (Nr. 10) die Capacität zu bestimmen: sie beträgt 1200^{ccm}. Aber der andere, dessen Kapsel noch einigermaassen erhalten ist, hat offenbar ganz ähnliche Verhältnisse. Dabei sind die Knochen zart, ohne stärkere Muskel- oder Sehnensätze, die Stirn gerade und niedrig, die Scheitelcurve flach und lang, — kurz, wir würden, wenn wir nur europäische Vergleichsobjecte wählten, kaum umhin können, die Schädel für weibliche zu erklären. Aber ich war wiederholt in der Lage, bei Naturvölkern Schädel, die ich für weibliche gehalten hatte, gegenüber den bestimmten Beweisen der Reisenden als männliche annehmen zu müssen, und speciell für Centralafrika

[1] A. a. O. S. 381.
[2] A. a. O. S. 366.

fand ich bei dem Studium von Baluba-Schädeln aus der Gegend zwischen dem Kassai und dem Sankuru[1], dass die Schädel männlicher Personen vielfach an weibliche Formen erinnerten. So wird auch hier wohl gegenüber der bestimmten Angabe des Hrn. Stuhlmann nichts übrig bleiben, als anzunehmen, dass diese feinen, scheinbar weiblichen Schädel wilden Kriegern der Massaï angehört haben, wie sie von Hrn. Thomson geschildert wurden. Nicht einmal das ist sicher, dass es noch junge Männer waren, denn bei Nr. 8 zeigt sich am hinteren Theil des linken Parietale eine grosse Stelle mit seniler Atrophie, obwohl die sonst starke Prominenz der Tubera parietalia für ein mehr jugendliches Alter zu sprechen scheint.

Der Längenbreiten-Index, soweit er sich aus zwei Schädeln bestimmen lässt, ist ausgemacht dolichocephal; der Höhen-Index des einen, Nr. 10, ist orthocephal (72.2), der des anderen, Nr. 9, bei welchem die Knochen am Foramen magnum etwas verletzt sind, dürfte wohl als chamaecephal bezeichnet werden dürfen. Jedenfalls sind es niedrige Formen. Die Länge ist nicht vorzugsweise durch die Entwickelung des Hinterhauptes bestimmt, denn die gerade Länge des letzteren beträgt bei Nr. 8 nur 27.9, bei Nr. 10 sogar nur 23.8 Procent der Gesammtlänge. Bei Nr. 8 besteht jederseits ein Processus frontalis squamae temporalis.

Nur bei Nr. 9, wo leider die Basis ganz, die Hinterhauptsschuppe zum grössten Theil fehlen, ist das Gesicht bis auf den Unterkiefer erhalten. Die Knochen sind dick und haben ein mehr grobes Aussehen. Alle Verhältnisse sprechen für eine leptoprosope Bildung: der Mittelgesichts-Index beträgt 75.7, der Orbital-Index (92.3) ist hyperhypsikonch. Die Nase ergiebt ein platyrrhines Maass (54.9) und zeigt eine Neigung zur Bildung von Pränasalfurchen. Dagegen entspricht dem stark ausgebildeten Prognathismus ein leptostaphylines Maass (64.5) für den Gaumen. Auffällig ist ausserdem an der Innenseite des Stirnbeines eine lange, weit vortretende Crista interna, welche von der Crista galli durch eine längere Einsenkung getrennt ist. —

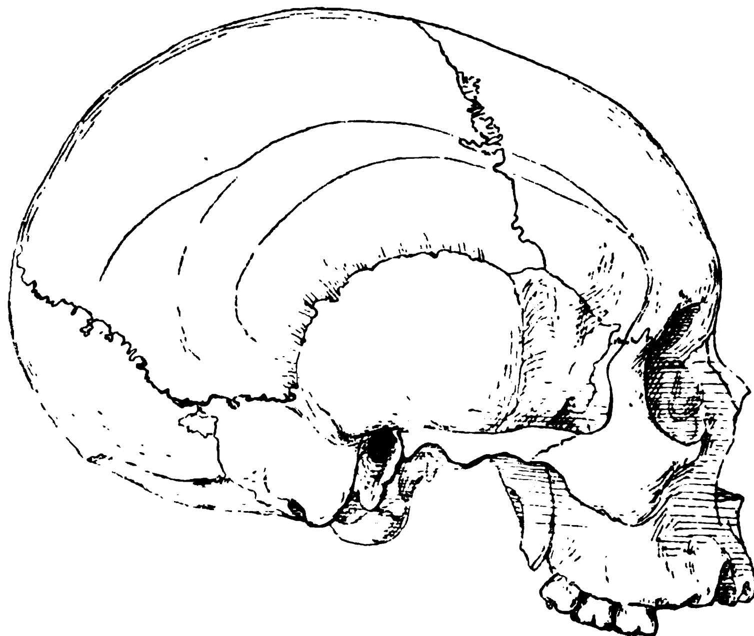
Betrachten wir nunmehr die Schädel der Uniamwesi, so wird das Urtheil etwas erschwert durch die Verschiedenheit dieser Schädel unter sich. Insbesondere hat Nr. 3 sehr abweichende Verhältnisse. Dieser, im Küstensande vorzüglich gebleichte Schädel dürfte einem jungen, noch nicht ganz entwickelten Weibe angehört haben. Die Weisheitszähne sind noch nicht ausgebrochen, die Kronen der Molaren noch nicht abgenutzt, die Synchondrosis sphenooccipitalis noch nicht

[1] Zeitschr. f. Ethnologie 1886. Bd. XVIII. Verhandl. der anthropol. Gesellschaft. S. 756.

ganz geschlossen, die Processus condyloides am Hinterhauptsloche durch je eine Querfurche getheilt. Dieser Schädel, der 1270^{ccm} Capacität besitzt, ist mesocephal, obwohl sein Breiten-Index (75.5) hart an der Grenze der Dolichocephalie steht; ebenso wird er durch seinen niedrigen Höhen-Index (70.0) der Chamaecephalie genähert. Wegen der Schmalheit der Alae sphenoideales ist ein leichter Grad von Stenokrotaphie vorhanden. Das Gesicht ist chamaeprosop (Mittelgesichts-Index 69.4), die sehr tiefen Orbitae mesokonch (Index 82.5), die Nase hyperplatyrrhin (Index 58.6). An letzterer sind die Knochen breit und so flach, dass eigentlich gar kein Rücken besteht. Die Interorbital-Distanz ist gross. Sehr tiefe Fossae caninae, stark ausgeprägter Prognathismus, leptostaphyliner Gaumen (Index 71.4). Also Alles in Allem etwas niedrige Entwickelung.

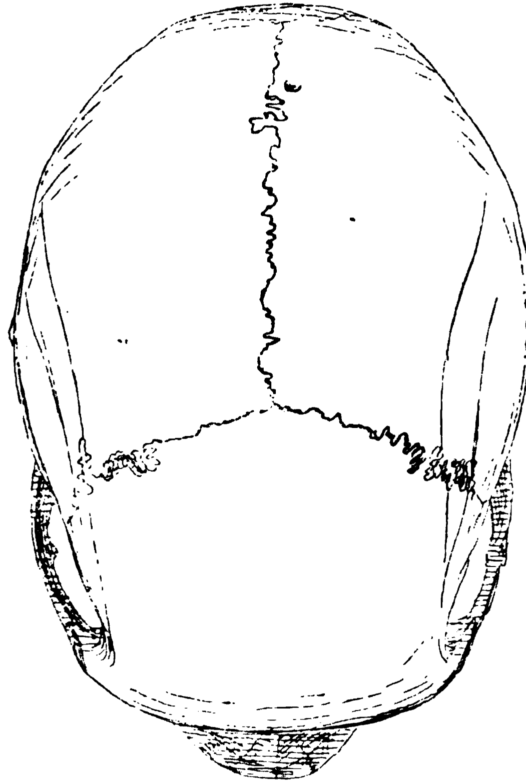
Die beiden anderen Schädel halte ich für männliche. Nr. 4 hat eine Capacität von 1370, Nr. 5 freilich nur eine solche von 1230^{ccm}. Beide haben unter einander viel Ähnlichkeit, jedoch will ich sie kurz, jeden für sich, beschreiben.

Fig. 1.



Sämmtliche Figuren sind in halber natürlicher Grösse von Hrn. Eyrich in geometrischer Weise gezeichnet.

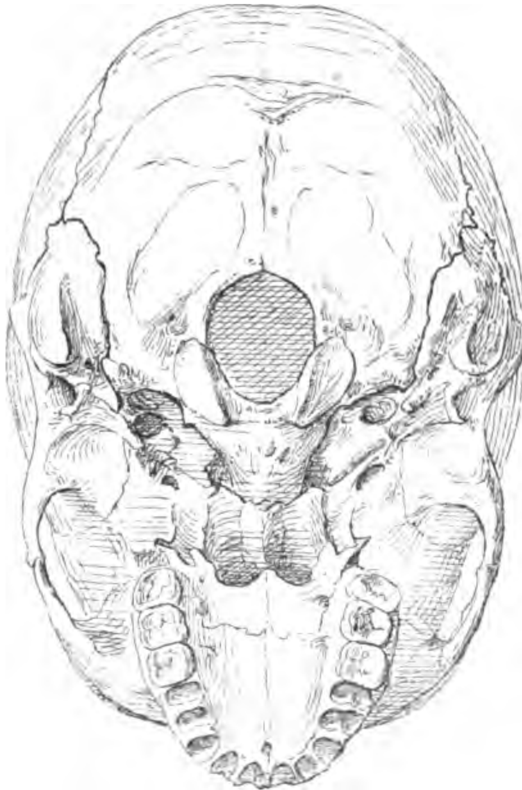
Fig. 2.



Nr. 4 (Fig. 1—3) gehörte einem jugendlichen Individuum. Freilich sind die Weisheitszähne ausgebrochen, aber sie sehen noch ganz frisch aus. Die Muskel- und Sehnenansätze sind wenig entwickelt. Die Form der Schädelcapsel ist chamaedolichocephal (Breiten-Index 70.3, Höhen-Index 69.3). Die Länge ist vorzugsweise durch die ungewöhnliche Occipitalentwickelung bedingt: die gerade Länge des Hinterhauptes beträgt 34.8 Procent der Gesammtlänge und das Foramen magnum ist weit nach vorn gerückt (Fig. 3). Neben ihm jederseits ein Processus paramastoideus. Das Gesicht, dem leider der Unterkiefer fehlt, erscheint nach dem Ansehen und dem Mittelgesichts-Index (74.7) schon mehr der Leptoprosopie genähert; die Orbitae sind hyperhypsikonch (Index 90.0). Die Nase schmäler und länger, jedoch auch noch platyrrhin (Index (53.1); die Nasenbeine stark eingebogen, ohne Rückenbildung. Mässiger Prognathismus, aber gewaltiger, sehr tiefer Gaumen, daher leptostaphyliner Index (66.0).

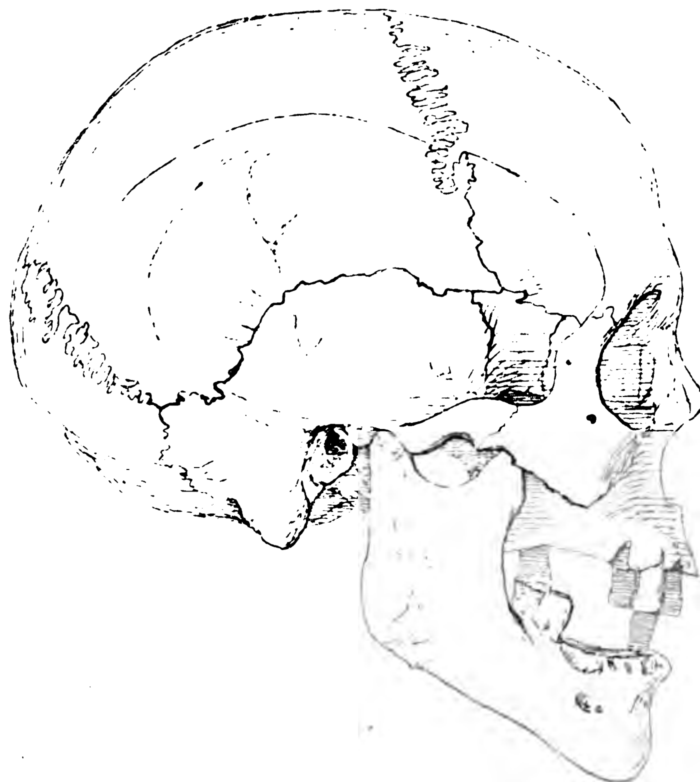
Der dritte Schädel, Nr. 5 (Fig. 4), der einzige, bei dem auch der Unterkiefer mitgekommen ist, gehörte einem älteren Individuum

Fig. 3.



an: die Zähne sind tief abgeschliffen, die hinteren fehlen und ihre Alveolen sind obliterirt. Das zugehörige Becken (Nr. 6) ist klein, zeigt aber ausgeprägt männliche Form: der Schamwinkel ist klein, die Darmbeinschaufeln stehen steil, das Kreuzbein ist fast gerade. Der Schädel zeichnet sich zugleich durch Länge und Schmalheit aus. Er ist hyperdolichocephal (Index 69.8) und nach hinten stark entwickelt; leider lässt sich die gerade Occipitallänge nicht messen, weil der Rand des Foramen magnum etwas verletzt ist. Dem Höhen-Index (72.1) nach ist dieser Schädel orthocephal zu nennen. Das Gesicht ist ausgemacht leptoprosop (Index 101.6, Mittelgesicht 79.1). Die Jochbogen und Wangenbeine anliegend. Orbitae hoch und tief, Index hypsikonch (89.7). Nase leptorrhin (46,2), die Stirnnasennaht hoch gelegen, die Nasenbeine breit, stark vortretend, am vorderen Ende synostotisch, die Wurzel nicht eingebogen. Interorbitaldistanz schmal. Tiefe Fossae caninae, grosse Foramina infraorbitalia. Mässiger Prognathismus. Oberkiefer hoch, bei starker Entwickelung des Gaumens, der einen leptostaphylinen Index (66.6) hat. Unterkiefer mässig kräftig,

Fig. 4.



breite Äste, gut ausgebildetes, jedoch etwas plumpes Kinn mit gerundetem Rande.

Die Gestaltung der Uniamwesi-Schädel zeigt also gewisse Verschiedenheiten der einzelnen unter sich, die wohl auf eine weitergreifende Mischung hinweisen. Insbesondere an dem weiblichen Schädel Nr. 3, jedoch auch in der Nasenbildung von Nr. 4, treten nigritische Elemente in die Erscheinung. Im Übrigen erkennt man die Bantu-Verwandtschaft, namentlich bei dem Schädel des älteren Mannes, Nr. 5. Die geringe Capacität desselben harmonirt mit der Kleinheit des Beckens und dürfte wohl auf eine geringere Körperentwickelung des Individuums hindeuten. —

Die beiden noch übrigen Schädel lassen sich kürzer erledigen, da sie als solitäre Funde eine grosse Zurückhaltung bei der Beurtheilung erfordern:

Nr. 1 zeigt sowohl an der Stirn, als am Hinterkopf je 2 Schussöffnungen, vorn die Eingangs-, hinten die Ausgangsöffnungen. Der Mann, der von Usegua gewesen sein soll, hat einen orthobrachycephalen Schädel (Breiten-Index 80.1, Höhen-Index 72.7). Trotz seiner ge-

ringen Capacität (1340^{ccm}) macht der letztere, hauptsächlich wegen seiner grossen Breite und seiner mehr kugligen Form, einen volleren Eindruck. Er besitzt jederseits einen Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, namentlich ist der rechte stark entwickelt. Das Gesicht ist niedriger (Mittelgesicht-Index ungefähr 66.3); Orbitae hypsikonch (86.8), Nase platyrrhin (56.5).

Der Unguru-Schädel No. 2. ist hyperdolichocephal (Breiten-Index 70.9, Höhen-Index 76.6). Er zeigt die geringste Occipital-Entwickelung von allen: die gerade Länge des Hinterhauptes beträgt uur 23.4 Procent der Gesammtlänge des Schädels. Jederseits ein grosser Stirnfortsatz der Schläfenschuppe und ein Processus paramastoideus. Die Stirnnasennaht sehr hoch gelegen, die Nasenwurzel voll. An dem isolirten Oberkiefer wenig entwickelter Prognathismus.

Auf eine weitere Besprechung dieser Schädel wird vielleicht zurückzukommen sein, wenn eine von Hrn. Stuhlmann schon angekündigte neue Sendung von Schädeln der Eingeborenen von Zanzibar selbst eingetroffen sein wird. Für diesmal will ich nur auf einen Punkt noch besonders hinweisen: die ungemein grosse Häufigkeit des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe. Ich habe dieses Verhältniss in einer, den Abhandlungen der Akademie im Jahre 1875 einverleibten Mittheilung »Über einige Merkmale niederer Menschenrassen am Schädel« ausführlich erörtert. Damals stand mir nur wenig Material aus Afrika zur Verfügung. Seitdem habe ich, wie andere Forscher, mehrfach Gelegenheit gehabt, die Existenz dieses in der That pithekoiden Merkmals bei central-afrikanischen Rassen nachweisen zu können. Hier zeigt sich, von den Uniamwesi abgesehen, dass unter 5 Schädeln 3 (1 Massaï, 1 Usegua, 1 Unguru) jederseits den Stirnfortsatz, und zwar beiderseits in vollständiger Ausbildung, besitzen. Ein in der That recht auffälliges Vorkommniss.

Hrn. Dr. Stuhlmann sage ich für seine freundliche und ganz aus eigener Initiative hervorgegangene Gabe meinen besten Dank. Möge sein Beispiel bald Nachfolger finden, damit das deutsche Schutzgebiet in Ostafrika in Bezug auf die wissenschaftliche Kenntniss seiner Bewohner wenigstens einigermaassen aufgeschlossen werde. Der Umstand, dass gerade hier, wie es scheint, die Grenzen der nördlichen und der südlichen Ostafrikaner, oder anders ausgedrückt, der Bedjah- und der Bantu-Stämme, zusammenstossen, ergiebt Probleme von ganz besonderem anthropologischem Interesse.

Schädel	Usegua	Unguru	Uniamwesi			Massaï		
	1 ♂	2 ♀	3 ♀	4 ♂	5 ♂	8 ♂	9 ♂	10 ♂
I. Messzahlen.								
Capacität	1340	1230	1270	1370	1230	—	—	1200
Grösste Länge	176	175	180	192	179	183	—	180
" Breite	141 t	124 pi	136 pt	135 t	125 p	131 t	—	128 pt
Gerade Höhe	128	134	126	133	129	125?	—	130
Ohrhöhe	111	108	109	107	112	105	118	110
Gerade Hinterhauptslänge	51	41	48	67	—	51	—	43
Entfernung des (Ohrloches) von der Nasenwurzel	(105)	(100)	(106)	(103)	(108)	—	(106)	(105)
Entfernung des Hinterhauptsloches von der Nasenwurzel	96	100	101	100	103	—	—	—
Horizontalumfang	505	485	506	520	494	502	—	493
Verticalumfang	302	293	298	294	293	283	—	298
Stirnbreite	99	94	99	91	88	95	95	98
Gesichtshöhe A	—	—	—	—	124	—	—	—
" B	63?	—	66	71	72	—	72	—
Gesichtsbreite a	135	—	128	127	122	—	—	—
" b	95	—	95	95	91	—	95	—
" c	—	—	—	—	85	—	—	—
Orbita, Höhe	33	—	33	36	35	—	36	—
" Breite	38	—	40	40	39	—	39	—
Nase, Höhe	46	—	46	47	54	—	51	—
" Breite	26	—	27	25	25	—	28	—
Gaumen, Länge	—	—	56	56	54	—	62	—
" Breite	38	—	40	37	36	—	40	—
II. Berechnete Indices.								
Längenbreiten-Index	80.1	70.9	75.5	70.3	69.8	71.6	—	71.1
Längenhöhen-Index	72.7	76.6	70.0	69.3	72.1	68.3?	—	72.2
Ohrhöhen-Index	63.1	61.7	60.5	55.7	62.6	57.3	—	61.1
Hinterhaupts-Index	28.9	23.4	26.6	34.8	—	27.9	—	23.8
Gesichts-Index A	—	—	—	—	101.6	—	—	—
" " B (:b)	66.3?	—	69.4	74.7	79.1	—	75.7	—
Orbital-Index	86.8	—	82.5	90.0	89.7	—	92.3	—
Nasen-Index	56.5	—	58.6	53.1	46.2	—	54.9	—
Gaumen-Index	—	—	71.4	66.0	66.6	—	64.5	—

Ausgegeben am 9. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.
XXV.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

9. Mai. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

1. Hr. Sachau las: Neuarabische Volkslieder.

Die Mittheilung erscheint in den Abhandlungen.

2. Hr. Conze erstattete den Jahresbericht über das Kaiserlich deutsche archaeologische Institut; derselbe wird später hier gedruckt erscheinen.

3. Hr. Schmidt überreichte sein Werk: Die Pluralbildungen der indogermanischen Neutra. Weimar 1889.

4. Hr. Diels legte im Namen der Aristoteles-Commission den von Hrn. Gustav Heylbut herausgegebenen neuen Band der Aristoteles-Commentatoren vor: Aspasii in Ethica Nicomachea quae supersunt commentaria. Berlin 1889.

Experimentaluntersuchungen über elektrische Figuren auf lichtempfindlichen Platten.

Von Dr. G. Sieben
in Lichterfelde.

(Vorgelegt von Hrn. von Bezold am 4. April [s. oben S. 289].)

Hierzu Taf. II.

Seit einiger Zeit bin ich mit der Herstellung der sogenannten Lichtenberg'schen Figuren auf Bromsilber-Gelatineplatten beschäftigt. Hierbei ergaben sich Gebilde von eigenthümlicher Gestalt, die in vieler Beziehung von den seither bekannten Formen grosse Verschiedenheiten zeigten.[1] Es waren besonders die negativen Entladungsfiguren, welche durch die Mannigfaltigkeit ihres Aussehens meine Aufmerksamkeit auf sich zogen und mich bestimmten eine Reihe von Untersuchungen anzustellen, deren Resultate ich im Folgenden mitzutheilen mir erlaube.

Die vorliegende Arbeit war beendet, als ich durch das Februarheft der Beiblätter zu Wiedem. Annal. Kenntniss von zwei Abhandlungen ähnlichen Inhalts erhielt.[2] Nach Durchsicht derselben ergab sich, dass, obwohl sich unsere Untersuchungen über elektrische Entladungen auf lichtempfindlichen Platten erstreckten, wir doch zu wesentlich anderen Resultaten gekommen sind, weil der dieselben leitende Gedanke ein durchaus verschiedener war. Jene beiden Experimentatoren beschreiben im Allgemeinen die Erscheinungen, welche auf Trockenplatten oder Eastmanpapier eintreten, wenn Elektricitäten hoher Spannung darauf entladen werden, während ich mir die Aufgabe stellte, die sehr complicirten Entladungsfiguren der negativen Elektricität auf einfachere zurückzuführen.

Bevor ich zur Beschreibung der hierher gehörigen Versuche übergehe, bemerke ich noch, dass die positiven Figuren fast durchweg

[1] Man sehe hierüber die umfassenden Untersuchungen von von Bezold, Pogg. Annal. Bd. 140, S. 145 und Bd. 144 S. 336, 526.

[2] Brown, Philos. Mag. 26, pag. 502. Trouvelot, Compt. Rend. 107, pag. 684, 784; 108, pag. 346.

ihr bekanntes charakteristisches Aussehen auch hier behalten. Man erhält solche schon auf sehr einfache Weise, indem man die Platte in die Hand nimmt und auf die Gelatineseite einen Funken von dem Conductor einer Elektrisirmaschine oder dem Knopfe einer Leydener Flasche überspringen lässt, dann in der gewöhnlichen Weise entwickelt und fixirt. Um diese aber untereinander oder mit negativen Figuren zu vergleichen, wird man einen isolirt befestigten Metallstab als Zuleiter nehmen müssen. Die Gebilde ändern ihr Aussehen nicht, wenn man Quecksilber- oder Wassertropfen, Spitzen oder Kugeln auf die Platte setzt und durch sie die Elektricität zuführt.

Die Versuche mit negativer Elektricität beschreibe ich nun in der Reihenfolge, in welcher sie angestellt wurden.

I. Elektricitätsquelle: Leydener Flasche.

1. Zuleiter: Quecksilbertropfen. Je nach der Zahl der aus dem Knopfe der Flasche überspringenden Funken erhält man Gebilde, wie sie die Figuren 1, 2, 3, 4 und 5 zeigen. Es ist besondere Vorsicht nöthig, wenn man den Übergang von einfachen Strahlen zu fächerartigen Ausströmungen erhalten will, weil die Tropfen gar leicht von der Platte herunterlaufen. In Fig. 1 wurde der Tropfen, nachdem er geladen, von dem auf's neue genäherten Knopfe abgestossen und bewegte sich über die Platte hin. Letztere lag auf Holz, während bei 2, 3, 4 und 5 eine Zinkscheibe als Unterlage diente.

2. Ringförmige Zuleiter mit eben polirtem Rande, welche berührend auf die Platte gesetzt werden, liefern Gebilde von der Form wie Fig. 6. Es sprangen mehrere Funken über, in Folge dessen an einer Stelle eine fächerartige Ausströmung zu sehen ist.

3. Spitzen als Zuleiter, die senkrecht auf die Platte gesetzt werden, geben oft schon bei einem einzigen Funken fächerförmige Gebilde, wie Fig. 7 zeigt. Zum Vergleich ist in Fig. 8 eine auf dieselbe Weise erhaltene positive Entladungsfigur beigefügt.

Unter Anwendung einer Holtz'schen Influenzmaschine, der Art, dass der positive Conductor mit der leitenden Unterlage, der negative mit dem Zuleiter verbunden wird, erhält man grössere, farnkrautartige Figuren und Funkenwege mit ebensolchen Verästelungen. Gerade mit diesen Versuchen wäre zu beginnen, wenn man mit der Praxis des Photographirens weniger vertraut ist und die beschriebenen Erscheinungen wahrnehmen will. Man sieht im Dunkeln die charakteristischen Lichtbilder, und die Platte entwickelt sich leichter, als unter Anwendung eines einzigen Fünkchens.

Gebilde der eben beschriebenen Art waren es, welche mich veranlassten, da man es offenbar bei den angewandten Elektricitätsquellen mit nicht einfachen Entladungen zu thun hat, einmal Versuche mit der Reibungs-Elektrisirmaschine zu machen, bei welcher man durch vorsichtiges Drehen das Überspringen der Funken in dem eingeschalteten Mikrometer genau nach Zahl und Länge controliren kann.

II. Elektricitätsquelle: Reibungs-Elektrisirmaschine.

Bei allen folgenden Versuchen war der Zuleiter ein mit polirter Spitze versehener Messingstab von 4^{mm} Dicke. Über die Spitze konnte eine Kugel von etwa 16^{mm} Durchmesser geschraubt werden. Der Stab wurde an einer gut isolirenden Handhabe gefasst und in einem Stativ senkrecht zur Ebene der Platte gedreht. Letztere lag auf einer Metallscheibe aus Zink. Die Funkenweite betrug überall 7^{mm}, und es wurde dafür Sorge getragen, dass nur ein Funke in dem eingeschalteten Mikrometer übersprang.

Führte diese Vorsicht allein schon zu recht einfachen, charakteristischen negativen Figuren, so genügte sie doch nicht, um in die Vorgänge während des Entladens tiefere Klarheit zu bringen. Ein Mittel, welches hier wesentlich fördernd eingriff, war das Bestäuben der Platten mit einem feinen Pulver vor dem Zuführen der Elektricität. Wurde dann noch in passender Weise der Druck der den Zuleiter umgebenden Luft verändert, so waren dieses die Bedingungen, unter welchen die jetzt folgenden Untersuchungen gemacht wurden.

a. Versuche unter gewöhnlichem Luftdruck auf staubfreien Platten.

Ist der Zuleiter eine Spitze, so entstehen, einerlei ob sie berührend aufgesetzt wird oder in geringem Abstand von der Platte sich befindet, ob letztere isolirt oder abgeleitet ist, kreisförmige Gebilde mit Ringen verschiedener Helligkeit, durchzogen von geraden, scharfbegrenzten, dunklen, radialen Strahlen, deren Länge gleich dem Radius der ganzen Figur ist (Fig. 9, 10, 11).

Wählt man als Zuleiter eine Kugel, so wird ein Gebilde mit äusserst feinem Strahlenkranz hervorgerufen (Fig. 12), welches sich häufig in viele Lichtsectoren spaltet (Fig. 13).

In der negativen Entladungsfigur tritt sehr oft noch eine kleine positive auf, besonders dann, wenn die Unterlage recht gut leitend oder wenn mehr als ein Funke übergesprungen ist. Diese durch die

unvermeidlichen Mängel der Isolation oder zufälligen Ausstrahlungen hervorgerufenen positiven Verästelungen häufen sich mit wachsender Funkenzahl und bilden schliesslich einen mit der negativen Figur concentrischen hellen Lichtkreis, aus welchem sie noch in grosser Anzahl hervortreten. Die Anfänge eines solchen Gebildes zeigt Fig. 10. In Fig. 11 findet schon bei einem Funken eine fächerartige Ausströmung statt.

Ich habe Fig. 13 beigefügt, weil diese und ähnliche mich vermuthen liessen, dass das negative Gebilde (eines einzigen Funkens) aus nichts anderem, als aus einzelnen sich gegenseitig abstossenden Büscheln bestehe, die zwischen sich die beschriebenen geraden, dunklen Wege lassen, und dass es wohl gelingen müsse diese einzelnen Büschel noch weiter aufzulösen.

Die dunklen Strahlen, welche ich mir für einen Augenblick als Knotenlinien nach Art derjenigen in Klangfiguren gedacht, glaubte ich, müssten auch dann sichtbar werden, wenn die Platte vor dem Zuleiten der Elektricität mit einem recht feinen Pulver bestreut würde.

b. Versuche unter gewöhnlichem Luftdruck auf bestäubten Platten.

Nachdem ich auf die lichtempfindliche Seite gleichmässig Lycopodium gestreut und durch eine Spitze die Elektricität zugeführt hatte, war aber von diesen Strahlen nichts wahrzunehmen. Die entstandene vertiefte Staubfigur hatte ferner nicht die geringste Ähnlichkeit mit den oben beschriebenen Gebilden, und es erschienen beim Entwickeln Figuren, welche viel grösser waren und durch ihre zahlreichen Verästelungen sehr den positiven glichen. Bild 14 stellt eine solche durch negative, Bild 15 eine durch positive Elektricität erzeugte dar.

Weitere Versuche über die Wirkung verschiedener Pulversorten und über die Streuhöhe führten zu dem Ergebniss, dass es weder auf die Art des Pulvers, noch auf die Dicke der Streuschicht wesentlich ankommt, dass also für bestäubte Platten und gewöhnlichen Luftdruck die Figuren 14 und 15 den Grundtypus bilden.

Man wird bei dem Streuen zu beachten haben, dass das Pulver eine gewisse Höhe nicht überschreitet, weil sonst kein Bild entsteht. Hierbei macht man die Wahrnehmung, dass in Schichten gleicher Dicke negative Elektricität noch eindringt, während eine positive Figur nicht oder nur äusserst schwach entsteht.

Es sind von mir folgende Pulver untersucht worden: Lycopodium, ein Gemisch von Schwefel und Mennige, Kieselsäure, Holz-

kohle, Eisen, Kaliumbichromat, Magnesia usta und Bariumsulfat, welche theils durch Musselin, theils durch ein Eisensieb aufgestreut wurden.

Am besten gelingen die Figuren mit Lycopodium. Man streut dasselbe dünn auf und entfernt durch senkrechtes Aufstossen der Platte den nicht haftenden Staub.

Die negativen Figuren 16 und 17 wurden durch Bestäuben mit Kieselsäure und Kaliumbichromat erhalten.

Auf vorher bestäubten Platten sind also beide Entladungsfiguren, sowohl in ihrem Aussehen, als in ihrer Dimension einander sehr nahe gerückt, so dass das Resultat der Entladung durch das aufgestreute Pulver für positive und negative Elektricität ein nahezu gleiches geworden ist.

Ich habe allerdings eine Annäherung beider Figuren erwartet, aber mehr in den Grenzen der Fig. 9. Da ich dieselbe immer noch zu finden hoffte, ging ich zu Versuchen im luftverdünnten Raume über.

c. Versuche im luftverdünnten Raum auf staubfreien Platten.

Die Platten lagen bei allen Versuchen auf einer Zinkscheibe, die auf einer Kupferspiralfeder ruhte, welche sie zugleich mit den Metalltheilen der Luftpumpe leitend verband. Der als Zuleiter dienende zugespitzte Messingstab wurde durch die im Recipienten befindliche Öffnung senkrecht auf die Platte gesetzt.

Negative Elektricität. Mit Druckverminderung tritt auf staubfreien Platten eine Vergrösserung der negativen Figuren ein; die Anzahl der gradlinigen, dunklen Strahlen wird geringer, und es werden in dem Lichtkreis eine grosse Zahl sehr schwacher radialer dunkler Streifen bemerkbar. (Im Negativ deutlich zu sehen.) Die Fig. 18 zeigt ein solches Gebilde, in welchem nur noch einer der scharfbegrenzten Strahlen deutlich sichtbar ist; es wurde unter einem Druck von 100^{mm} Quecksilber hergestellt. Geht man in der Luftverdünnung weiter, so verschwinden zuletzt alle scharfbegrenzten Strahlen und der Lichtkreis sieht fast gleichmässig radial gestreift aus.

Positive Elektricität. Die positiven Figuren werden unter geringerem Druck ebenfalls grösser, aber das Wachsen geschieht rascher, als das der negativen. Zugleich nimmt man wahr, dass sich die verästelten Lichtlinien zuerst vom Centrum aus verdicken und dann allmählich zu einem immer grösser werdenden Lichtkreis zusammenschmelzen, von dessen Peripherie Lichtstrahlen ausgehen. Die Fig. 19 stellt ein solches Gebilde, unter einem Druck von 390^{mm}

erzeugt, dar. Ist der Druck etwa 200^{mm}, so entsteht ein Lichtkreis von 30^{mm} Durchmesser, dessen Randstrahlen ebenfalls 30^{mm} lang sind, so dass die ganze Figur einen Durchmesser von 90^{mm} besitzt. Bei weiterer Verdünnung wächst der Durchmesser des Kreises rascher als die Länge der Randstrahlen, so dass letztere bei einem Druck von 40^{mm} etwa eine Länge von nur 10^{mm} besitzen, während der Durchmesser des Kreises etwa 90^{mm} beträgt.

Die positive Figur im luftverdünnten Raum auf nicht bestäubten Platten erinnert also an eine negative unter gewöhnlichem Druck — Lichtkreis mit Strahlenkranz — (Fig. 12), doch sind die Wege zwischen den Strahlen nicht geradlinig, da die Lichtstrahlen selbst die der positiven Figur charakteristischen Schlängelungen beibehalten haben.

Um die Versuchsreihe zu vervollständigen blieb noch übrig festzustellen, wie sich beide Elektricitäten im luftverdünnten Raume auf bestäubten Platten entladen.

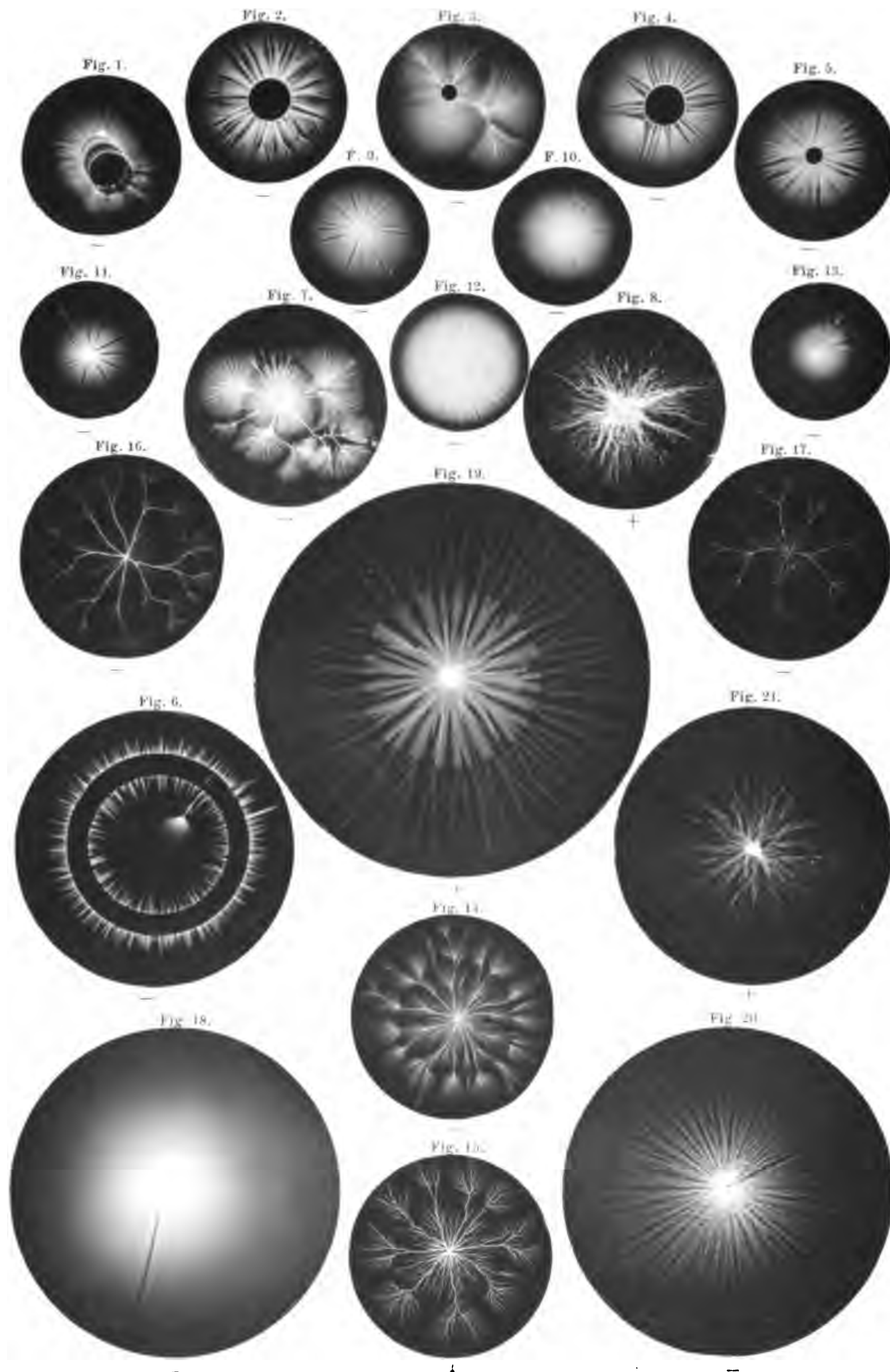
d. Versuche im luftverdünnten Raum auf bestäubten Platten.[1]

Negative Elektricität. — Auch hier nimmt die Dimension der Figuren mit vermindertem Druck zu, aber das Aussehen ist ein ganz anderes als auf nicht bestäubten Platten. Fig. 20 stellt ein solches Gebilde dar. Der Druck unter dem es entstand betrug 100^{mm}. Man glaubt eine Auflösung des radial gestreiften Lichtkreises der Fig. 18 zu bemerken. Wenn man das entstandene Bild jetzt mit Fig. 9 u. f. vergleicht, so sieht man, dass die Lichtsektoren sich in Bündel aufgelöst haben, welche aus gedrillten zarten Fäden zu bestehen scheinen, die an positive Verästelungen erinnern. Die Bündel selbst lassen zwischen sich gerade, dunkle Wege.

Geht man in der Verdünnung noch weiter, etwa bis zu 28^{mm}, so bemerkt man im Dunkeln eine eigenthümliche, wellenartige Entladung. Beim Entwickeln entsteht ein Bild der eben beschriebenen Art, welches aber noch von einem Lichtkreis umgeben ist, der den peripherischen Ausströmungen der Fig. 6 gleicht.

Positive Elektricität. — Mit dem Hervorrufen einer positiven Figur auf bestäubter Platte im luftverdünnten Raum hat es einige Schwierigkeit, einmal, weil die positive Elektricität, wie früher schon erwähnt, nicht so leicht einzudringen vermag, dann aber auch, weil

[1] Als Streupulver verwendete ich Lycopodium und erwähne noch einmal, dass dasselbe gleichmässig aufgestreut, dann durch senkrechtes Aufstossen der Platte das nicht haftende Pulver entfernt wurde, so dass von einer Bestäubung eigentlich wenig zu sehen war.



SIEBEN phot.

SIEBEN: Elektrische Figuren.

Naturl. Grösse.

LICHTDRUCK VON STENGEL & MARKERT IN DRESDEN.

das positive Licht wenig chemisch wirksame Strahlen zu enthalten scheint. Die Bilder werden sehr dünn und lassen sich nur durch besondere Verrichtungen entwickeln. Sie haben jedoch keinen centralen Lichtkreis, wie die auf staubfreien Platten und vermindertem Druck, sondern die Verästelungen sind einzeln bis ins Centrum zu verfolgen. Die Figur wächst auch hier mit abnehmendem Druck rascher als die negative. Bild 21 ist auf die beschriebene Weise erhalten; der Druck unter dem Recipienten betrug 390^{mm}.

Die Hauptresultate dieser Untersuchung lassen sich nun, wie folgt, zusammenfassen:

1. Der Unterschied in der Dimension und dem Aussehen der positiven und negativen Figuren verschwindet in dem Falle ihrer Erzeugung unter gewöhnlichem Druck auf vorher bestäubten Platten nahezu vollständig (Fig. 14 und 15).

2. Auf bestäubten und nicht bestäubten Platten unter vermindertem Druck ist die Dimension der positiven Figuren grösser als die der negativen, und die Grösse wächst für die positiven mit abnehmendem Druck rascher als für die negativen.

3. Auf nicht bestäubten Platten verschmilzt die positive Figur unter abnehmendem Druck in einen Lichtkreis mit peripherischen Verästelungen (Fig. 19), während die negative die charakteristischen gradlinigen dunklen Strahlen verliert und in einen schwach radial gestreiften Lichtkreis übergeht (Fig. 18).

4. Auf bestäubten Platten und unter geringer werdendem Druck behält die positive Figur ihre charakteristische Form bei (radiale Verästelungen) (Fig. 21), während der radial gestreifte Lichtkreis der negativen Figur sich in einzelne Lichtbüschel auflöst, die jeder für sich aus feinen gedrillten Fäden (Reisigbündel) zu bestehen scheinen, welche einzeln den positiven Verästelungen sehr ähnlich sind (Fig. 20).

Es schien mir zweckmässig, mich vorerst auf die Mittheilung des rein Thatsächlichen zu beschränken, da Versuche, die Erscheinungen zu erklären, jetzt noch unbedingt als verfrüht zu bezeichnen wären.

Ausgegeben am 16. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.

XXVI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

16. Mai. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Roth las über die Veränderungen, welche die Gesteine durch Blitzwirkungen, Erdbrände und Contact mit Eruptivgesteinen erleiden.

Die Mittheilung wird nebst einer Fortsetzung in einem späteren Berichte erscheinen.

2. Hr. Pringsheim legte eine Mittheilung des Hrn. Dr. Friedrich Oltmanns, Docenten in Rostock, vor: Beiträge zur vergleichenden Entwickelungsgeschichte der Fucaceen.

Die Mittheilung wird in einem der nächsten Stücke veröffentlicht.

Die Dielektricitäts-Constante des Wassers.

Von Prof. E. COHN
in Strassburg i. Els.

(Vorgelegt von Hrn. KUNDT am 2. Mai [s. oben S. 379].)

Für die Dielektricitäts-Constanten (D. C.) einer Anzahl von Flüssigkeiten haben sich aus neueren Untersuchungen[1] Werthe ergeben, welche aus dem Grössengebiet, — etwa 1 bis 5 — dem alle früher nach zuverlässigen Methoden bestimmten D. C. angehören, in auffälliger Weise heraustreten. Zu ihnen gehört an erster Stelle die D. C. des Wassers; sie wurde von ARONS und mir zu 76, von TERESCHIN zu 84 bestimmt. Diese Zahlen sind mittels einer Methode gewonnen, welche die elektrischen Kräfte zwischen geladenen Leitern, die sich in der fraglichen Flüssigkeit befinden, vergleicht mit den Kräften, die sie unter gleichen Umständen in Luft aufeinander ausüben würden. Nach den Ergebnissen der mannigfach variirten Versuche wird nicht bezweifelt werden können, dass hier eine charakteristische Constante der Flüssigkeit bestimmt wurde. Es konnte aber gegenüber dem befremdend hohen Zahlenwerth die Frage aufgeworfen werden, ob dieselbe identisch sei mit der D. C., wie sie aus Capacitätsmessungen definirt wird, oder ob etwa in der gemessenen Grösse der Einfluss einer anderen, bisher nicht genügend bekannten Eigenschaft des Körpers sich geltend mache. — Ich wünschte deshalb, die Constante auch gemäss ihrer ursprünglichen — FARADAY'schen — Definition zu messen.

Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe. — Relaxationszeit. — Resultat.

Für einen Leiter der Elektricität, wie ihn auch das reinste Wasser thatsächlich darstellt, ist die einfache Methode, nach der man für gute Isolatoren die D. C. aus Condensator-Ladungen bestimmt, nicht anwendbar. Wohl aber kann man dieselbe aus der Verfolgung des Ladungsverlaufs ableiten. Derselbe lässt sich nämlich durch Capa-

[1] COHN und ARONS, WIED. Ann. 33, S. 13 (1888). TERESCHIN, WIED. Ann. 36, S. 792 (1889).

cität und Widerstand des »Wassercondensators« darstellen, sobald man nur annimmt, dass auch für einen Leiter der Elektricität eine bestimmte D. C. existirt, und dass sich Ladung (»Verschiebung«) und Leitung in der von MAXWELL angenommenen einfachsten Weise superponiren. Dass diese Annahme berechtigt ist, wurde für einige Flüssigkeiten von sehr schwachem, aber doch messbarem Leitungsvermögen experimentell erwiesen.[1] — Damit diese Methode einer gegebenen Substanz gegenüber anwendbar sei, darf eine für die Substanz charakteristische Zeitgrösse, die man entsprechend ihrer Bedeutung als »elektrische Relaxationszeit« bezeichnen kann,[2] zum mindesten nicht wesentlich kleiner sein, als der kleinste Zeittheil des Ladungsvorganges, den man noch zu messen im Stande ist.

Die Relaxationszeit für einen homogenen und isotropen Körper ist diejenige Zeit, in welcher Potentialdifferenzen, die durch äussere elektrische Kräfte in ihm hervorgerufen wurden, auf $\frac{1}{e}$ ihres Betrages herabsinken, nachdem der Körper der Einwirkung dieser Kräfte entzogen — sich selbst überlassen — ist. Dieses Erlöschen der elektrischen Spannungen setzt keine elektrodynamischen Kräfte in's Spiel, da während desselben elektrische Verschiebung und Leitungsstrom fortwährend entgegengesetzt gleich sind, der elektrodynamisch wirksame Gesammtstrom also gleich Null ist. Der Vorgang wird folglich durch Selbstinduction nicht beeinflusst.

Der Begriff der Relaxationszeit (T) wird in den Grundlagen einer systematischen Darstellung der Elektricitätslehre aufzunehmen sein. Sie bildet zusammen mit der »kritischen Geschwindigkeit« (V) die beiden einzigen »inneren« elektrischen Constanten eines homogenen und isotropen Mediums: dasselbe ist, so lange es für sich allein gedacht wird, durch sie in elektrischer Hinsicht vollständig definirt. Alle übrigen elektrischen Constanten — D. C., Leitungsvermögen, Magnetisirungsconstante u. s. w. — kommen erst in Betracht, sobald mindestens ein anderes Medium in elektrische Beziehung zu dem gegebenen tritt; sie können nur definirt werden, indem man eine bestimmte Substanz als Vergleichsobject willkürlich festsetzt.[3]

Es steht im engsten Zusammenhang hiermit, dass V und T Grössen von bekannten Dimensionen sind, während wir alle anderen

---

[1] COHN und ARONS, WIED. Ann. 28, S. 454 (1886).

[2] Vergl. WIED. Ann. 38, S. 24 f.

[3] Vorstehende Sätze sind eine Verallgemeinerung dessen, was HERTZ — unter Voraussetzung einer unendlich grossen Relaxationszeit — bezüglich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausgesprochen hat. WIED. Ann. 23, S. 102 (1884).

elektrischen Constanten erst gleichzeitig mit der »Elektricitätsmenge« ihrer Dimension nach kennen lernen können.

Der Werth der Relaxationszeit für eine gegebene Substanz ist

$$T = \frac{\mu}{4\pi\lambda} = cr, \tag{1}$$

wenn μ ihre D. C., λ ihr Leitungsvermögen, r und c den Widerstand, bez. die Condensator-Capacität zwischen zwei beliebigen Aequipotentialflächen für diese Substanz als Zwischenmedium bezeichnen. Die erste Form der Gleichung zeigt, dass T thatsächlich eine Constante des Materials — unabhängig von Form und gegenseitiger Lage der Elektrodenflächen — ist.

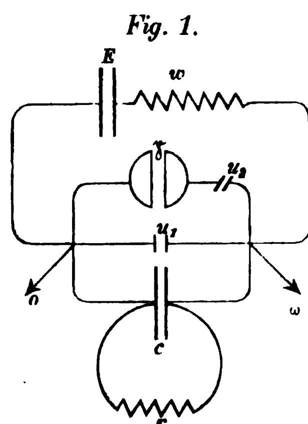
Der zu verificirende Werth für die D. C. des Wassers und die Angaben über das niedrigste erreichbare Leitungsvermögen liessen zum Voraus erkennen, dass für Wasser nur ein rohes Resultat von der in's Auge gefassten Methode zu erwarten war. Vergl. S. 410. Auch ein solches erschien aus dem angeführten Grunde nicht ohne Werth.

Die Messungen des Ladungsverlaufs, über die im Folgenden berichtet wird, sind in völliger Übereinstimmung mit dem Resultat der früheren Methode. Sie lassen sich am besten darstellen unter der Annahme einer D. C., die nahe gleich 80 ist; — sie schliessen, — wenn man den weitesten Spielraum lassen will, — unzweideutig jeden Werth unter 50 aus. — Den zuverlässigsten Werth wird man nicht von dieser, sondern von der Methode der Kraftmessung zu erwarten haben.

Versuchsanordnung und Apparate.

In nebenstehender Figur 1 ist schematisch ein Stromkreis dargestellt, der aus einer galvanischen Batterie E, einem Widerstand w, und der Wasserzelle $c\,r$ gebildet ist; neben die letztere ist das Quadrantelektrometer γ geschaltet. — (E soll gleichzeitig den Werth der elektromotorischen Kraft, w und r sollen die Werthe der Widerstände, c und γ der Capacitäten bedeuten.) Der eine Pol von E, und mit ihm die eine Elektrode von $c\,r$ und das eine Quadrantenpaar von γ sind dauernd zur Erde abgeleitet; mit dem abgeleiteten Punkt ist zunächst auch die zweite Elektrode nebst dem zweiten Quadrantenpaar durch einen Kurzschluss verbunden. Letzterer

Fig. 1.



enthält bei u_1 einen Contacthebel. Durch das fallende Pendel eines Helmholtz'schen Pendelunterbrechers wird derselbe aufgeschlagen und die Ladung des Elektrometers beginnt. Sie wird nach wenigen Milliontel Secunden dadurch beendet, dass das Pendel einen zweiten Contacthebel, der sich bei u_2 befindet, zurückwirft. Der Ausschlag der Elektrometernadel misst das Potential ω, zu welchem in der Zwischenzeit Elektrometer und Wassercondensator geladen wurden.

Diese Versuchsanordnung ist derjenigen ähnlich, die in dem bereits erwähnten Aufsatz (Wied. Ann. 28) beschrieben ist; auf letzteren kann bezüglich aller Einzelheiten, insbesondere auch einiger nothwendigen Vorsichtsmaassregeln verwiesen werden. Nur ist im vorliegenden Fall die Flüssigkeit neben — statt hinter — das Elektrometer geschaltet; dies war nothwendig, damit nicht vor Beginn der Ladung die Wasserzelle von einem constanten Strom durchsetzt und polarisirt würde.[1]

Im Übrigen werden folgende Angaben genügen: der Widerstand w bestand aus einer dünnen Graphitschicht auf Glas, damit die Selbstinduction des Stromkreises ohne Einfluss sei, und die in Betracht kommenden Capacitäten ausschliesslich der Wasserzelle und dem Elektrometer angehörten. Sein Werth betrug rund 9000 S. E. — E bestand aus 4—7 Leclanché-Elementen. — Die Wasserzelle war gebildet von zwei platinirten Platinblechen von etwa 18^{qcm} Fläche, die sich in einem ziemlich weiten Glasgefässe gegenüberstanden. Der mittlere Abstand betrug in den drei ersten Versuchsreihen ungefähr $3/4^{mm}$, vor der letzten Reihe wurden die Platten einander soweit genähert, dass der Widerstand, bei der gleichen Flüssigkeit, auf rund $2/5$ seines vorigen Werthes sank (und folglich die Capacität auf $5/2$ stieg). Dieses Widerstandsgefäss — sowie mehrere andere, welche zur Aichung des ersten dienten — verdanke ich der Freundlichkeit von Hrn. Prof. F. Kohlrausch; es war für mich sehr werthvoll, dass das Glas dieses Gefässes von destillirtem Wasser auch bei längerem Stehen nicht wahrnehmbar angegriffen wurde. So war es möglich, das durch sorgsamste Destillation gewonnene reine Wasser während der ganzen Versuchsdauer bei dem geforderten sehr geringen Leitungsvermögen zu erhalten. Dasselbe betrug in den verschiedenen Versuchsreihen 1.4 bis $1.7 \cdot 10^{-10}$, bezogen auf Quecksilber. — Die Zeiten endlich, welche zwischen dem Aufschlagen der beiden Contacte verfliessen, werden am getheilten Kopf einer Mikrometerschraube abgelesen, welche

[1] Bezüglich der Polarisation, die der Ladungsstrom selbst hervorbringt, siehe den letzten Abschnitt.

den einen Contact zu verschieben gestattet. Der Zeitwerth eines Theiles ist nach früheren Untersuchungen:[1]

$$x = 1.17 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

Diese Grösse giebt zugleich nach allen an dem Instrument gemachten Erfahrungen ungefähr die Grenze an, bis zu welcher in Folge unregelmässigen Abschlagens der Contactstifte die Zeitmessungen unsicher sein mögen.

Berechnung der Beobachtungen. Controlversuche.

Die Ladungszeit, in der sich das Potential ω herstellt, sei t. Alle Grössen mögen in absolutem elektrostatischem Maass (cm., gr., sec.) ausgedrückt sein. Man leitet dann leicht ab:

$$(2) \qquad \omega = E \frac{r}{r+w} \left(1 - e^{-\frac{t}{(c+\gamma)\frac{wr}{w+r}}} \right).$$

Bezeichnet Ω den Endwerth von ω, ferner τ die Ladungszeit, in Mikrometertheilen gemessen, so dass man also hat:

$$(3) \qquad \begin{cases} E \dfrac{r}{r+w} = \Omega \\ t = x\tau, \end{cases}$$

und setzt man noch

$$(4) \qquad x \cdot lg \text{ vulg } e = a,$$

so kommt:

$$(5) \qquad \frac{wr}{w+r}(c+\gamma) = aq,$$

wo

$$(6) \qquad q = \frac{\tau}{lg \text{ vulg } \dfrac{\Omega}{\Omega - \omega}}.$$

Jede Versuchsreihe besteht in der Aufsuchung einer Anzahl zusammengehöriger Werthe von ω und τ, die man nach einander durch Verstellen der Mikrometerschraube erhält; aus ihnen und dem constanten Ω soll sich q als Constante ergeben. Sind dann noch die Widerstände w und r gemessen, so berechnet sich aus (5): $c + \gamma$. Eine zweite Reihe, bei welcher die Zelle entfernt, also $c = 0$, $r = \infty$ ist, liefert in gleicher Weise γ; dasselbe ergab sich als eine gegen c kleine Grösse, — 5 bez. 2 Procent der letzteren in den verschiedenen Versuchsreihen. — So erhält man c. Daraus lässt sich nun die

[1] WIED. Ann. 28, S. 470.

D. C. auf zwei Wegen finden. Erstens kann man die Zelle mit einer Flüssigkeit von bekannter D. C. μ_x füllen und den Versuch — mit einem geeigneten grösseren w — wiederholen; ergiebt sich jetzt die Capacität c_x, so ist:

$$(7) \qquad \frac{\mu}{\mu_x} = \frac{c}{c_x}.$$

Zweitens aber erhält man μ aus c mit Hülfe der Gleichung (1):

$$(8) \qquad \mu = 4\pi\lambda \cdot cr.$$

Es ist dann ausser der Relaxationszeit cr, welche das Ergebniss der Pendelbeobachtungen bildet, noch das specifische Leitungsvermögen des Wassers zu bestimmen; — d. h. neben dem Widerstand r, den das destillirte Wasser im Gefäss besitzt, noch der Widerstand einer Flüssigkeit von bekanntem Leitungsvermögen im gleichen Gefäss.

Ich habe beide Wege eingeschlagen: der Widerstandswerth der Zelle wurde bestimmt durch Vermittelung zweier anderer Gefässe von jedesmal steigendem Widerstandswerth, deren letztes mit einer Kochsalzlösung geaicht wurde. Als die Flüssigkeit x der Gleichung (7) diente Xylol, dessen D. C. nach verschiedenen Methoden zu 2.36 bis 2.37 sicher bestimmt ist.[1] Auf diese Weise ergiebt sich eine Controle, die zweckmässig so geführt wird, dass man aus (7) und (8) die Grösse μ_x berechnet:

$$\mu_x = 4\pi\lambda \cdot r \cdot c_x$$

und das Resultat mit dem bereits bekannten Werth vergleicht. Es fand sich so: $\mu_x = 2.40$ in genügender Übereinstimmung. Dies beweist, dass die Ladungszeit thatsächlich nur durch die Capacität $(c + \gamma)$ bestimmt wird, — dass weder die Selbstinduction, noch eine fremde Capacität im Stromkreise sich geltend macht. — Ein weiterer Beweis hierfür liegt in der Übereinstimmung der Beobachtungen, die verschiedenen Capacitäten des Wassercondensators entsprechen (s. unten).

Die einzige und freilich grosse Unsicherheit der Methode wird durch die Beobachtung von τ herbeigeführt. Die Relaxationszeit für Wasser vom Leitungsvermögen 1.4 bis $1.7 \cdot 10^{-10}$ (gegen Quecksilber) berechnet sich mit $\mu = 80$ zu 4.8 bis 3.9 Milliontel Secunden. Daraus folgt, dass das Zeitintervall, welches für Messungen zur Verfügung steht, — dasjenige nämlich, in welchem ω noch messbar von seinem Endwerth Ω verschieden ist, — ebenfalls nur wenige Milliontel Secunden beträgt. Diesen Grössen gegenüber ist die Unsicherheit der Zeitmessung eine sehr beträchtliche. — Es sind daher, um ein Urtheil über den Werth der Versuchsergebnisse zu ermöglichen, in der

[1] Wied. Ann. 33, S. 30.

folgenden Tabelle nicht die D. C. μ aus den Beobachtungsdaten entwickelt, sondern umgekehrt unter der Annahme $\mu = 80$ aus (5) die Constanten q, und aus diesen mittels der beobachteten ω und Ω nach (6) die Mikrometertheile τ berechnet. Subtrahirt man dieselben vom Nullpunkte der Scala, so erhält man die als »berechnet« bezeichneten Mikrometer-Ablesungen u, denen die beobachteten gegenübergestellt sind. Das specifische Leitungsvermögen des Wassers und der Widerstand desselben im Gefässe ist den einzelnen Versuchsreihen beigefügt; in Reihe 4 ist die Capacität 2.4 mal so gross, wie in den früheren.

Versuchsreihe	1.		2.		3.		4.	
λ/λ_{Hg}:	$1.6 \cdot 10^{-10}$		$1.7 \cdot 10^{-10}$		$1.4 \cdot 10^{-10}$		$1.4 \cdot 10^{-10}$	
r/S. E.:	2600		2500		3000		1300	
	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
u	305	305.3	306	304.9	305	304.5	309	309.0
	3	3.7	4	3.8	3	2.8	7	6.9
	1	0.5	2	2.7	1	1.1	5	5.5
	299	298.5	0	0.3	299	299.4	3	3.1
			298	298.2			1	0.3

Diese Darstellung enthält noch eine Willkürlichkeit: Der Nullpunkt der Scala, — welcher dem gleichzeitigen Aufschlagen beider Contacte entspricht, — kann nach der Natur der Sache nur eingegrenzt werden. Frei von jeder Willkür sind dagegen die Differenzen δu zwischen den auf einander folgenden berechneten u. Indem man dieselben mit den beobachteten vergleicht, wird man die gemachte Annahme $\mu = 80$ nicht im Widerspruch mit den Thatsachen finden.

Um einen schnellen Überblick über die Ergebnisse einer anderen Annahme für μ zu gewinnen, hat man nur zu beachten, dass die δu, sofern man γ gegen c vernachlässigt, den μ einfach proportional sind. — Die genaue Ausrechnung ergiebt, dass unter der Annahme: $\mu < 50$ alle berechneten δu kleiner als die beobachteten ausfallen würden.

Zur Beurtheilung der gewonnenen Zahlen mögen noch folgende Angaben dienen: Berechnet man μ aus den 4 Reihen so, dass sich jedesmal das Gesammtintervall am Mikrometer (6 bez. 8 Scalentheile) mit den Beobachtungen übereinstimmend ergiebt, so findet sich

aus Reihe:	1.	2.	3.	4.
$\mu =$	71	95	94	74

Rechnet man ebenso mit der Summe aller Intervalle, so ergiebt sich: $\mu = 82$.

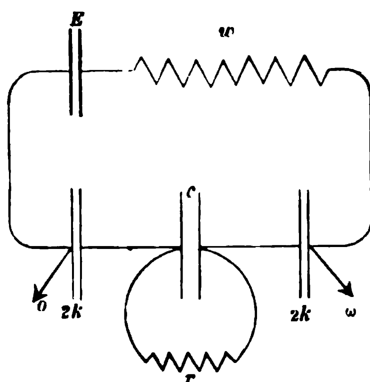
Handelt es sich nur darum, nachzuweisen, dass die D. C. des Wassers diejenige der meisten bisher untersuchten Körper weit übersteigt, so ist vielleicht folgender rein qualitativer Versuch am über-

zeugendsten: Man ersetze im Widerstandsgefäss das Wasser durch Xylol; man schalte, da das letztere ein sehr vollkommener Isolator ist, neben dasselbe einen Graphitwiderstand, welcher dem Widerstand des Wassers im Gefässe an Grösse gleich ist. Die jetzige Anordnung unterscheidet sich dann von der früheren nur durch die proportional der D. C. veränderte Capacität. Der Versuch ergiebt nun Folgendes: bei einer bestimmten Stellung des Mikrometers ist der Elektrometer-Ausschlag noch gleich Null, — u_2 wird noch vor u_1 aufgeschlagen; — man schiebt die Schraube um einen Scalentheil vor: das Elektrometer zeigt jetzt bereits denselben Ausschlag, den es bei beliebig grossen Ladungszeiten erhält.

Die Polarisation der Elektroden.

Durch den Ladungsstrom, welcher die Potentialdifferenz ω zwischen den Elektroden der Wasserzelle hervorbringt, werden dieselben polarisirt. Es soll im folgenden gezeigt werden, dass dieser Umstand ohne Einfluss auf die Messungen ist. Von F. Kohlrausch[1] ist bewiesen worden, dass die elektromotorische Kraft der Polarisation von Platin-Elektroden in verdünnter Schwefelsäure, welche durch kleine Elektricitätsmengen hervorgebracht wird, den letzteren proportional ist. Der Vorgang kann daher rechnerisch so behandelt werden, als wenn an den Grenzen von Flüssigkeit und Elektrode je ein Condensator in den Stromkreis eingeschaltet wäre. Die Capacität dieses fictiven Doppelcondensators ergiebt sich aus den Angaben von Kohlrausch zu 0.13 Mikrofarad für jedes Quadratmillimeter einer Elektrode, (beide Elektroden als gleich gross vorausgesetzt). Dies gilt für blanke Platin-Elektroden; für platinirte würde die Zahl viel grösser sein; gerade deshalb sind platinirte Elektroden von Kohlrausch in die Widerstandsmessungen eingeführt worden. Es soll im Folgenden mit der obigen Zahl, die ein zu ungünstiges Resultat ergiebt, gerechnet werden. Die Versuchsanordnung würde sich jetzt, (wenn man zur Vereinfachung der Rechnung das Elektrometer unterdrückt), schematisch durch Fig. 2 darstellen, wo $2k$ die beiden neu einge-

Fig. 2.



[1] Pogg. Ann. 148. S. 143 (1873).

führten Condensatoren andeuten soll. Wenn, wie es den thatsächlichen Verhältnissen entspricht, k als sehr gross gegen c behandelt wird, so findet man für ω die Gleichung:

$$\omega = E\frac{r}{r+w}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) + E\frac{w}{r+w}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

wo

$$T_1 = c\frac{wr}{w+r}, \quad T_2 = k(w+r).$$

Der erste Summand ist der bisher für ω benutzte Werth (2). Bezüglich des zweiten ist zu bemerken, dass T_2 sich mit der angeführten Zahl von Kohlrausch zu rund 2 Secunden ergiebt. (In Wahrheit ist es noch sehr viel grösser.) Daraus folgt, dass der zweite Summand von ω sich während der Dauer der untersuchten Ladungsvorgänge, — t wenige Milliontel Secunden, — nicht zu einer messbaren Grösse erhebt.

Umgekehrt hat für Zeiten t, welche dem zweiten Glied einen messbaren Werth ertheilen, das erste bereits seinen constanten Endwerth erreicht. Man wird deshalb bei der Untersuchung der Polarisation durch kurzdauernde Ströme von der hier behandelten Ladung des »Wassercondensators« ebensowenig gestört, wie das Umgekehrte der Fall ist.

Ausgegeben am 23. Mai.

1889.
XXVII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

16. Mai. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

Hr. Schmoller las über das Fremdenrecht in seiner historischen Entwickelung und handelspolitischen Bedeutung.

Die ritterlichen Provinzialstatthalter.

Von Otto Hirschfeld.

(Vorgetragen am 2. Mai [s. oben S. 363].)

Die Reform des römischen Ritterstandes, durch welche Augustus sich einen eigenen vom Senate unabhängigen Beamtenstand schuf, ist auch für die Provinzialverwaltung von tiefgreifender Bedeutung geworden. Sofort bei der Begründung des Principates ward ausser den noch nicht befriedeten Provinzen Gallien, Syrien und dem Tarraconensischen Spanien, die der Kaiser zunächst auf zehn Jahre mit den daselbst stationirten Legionen in seiner Hand behielt, das kurz vorher eroberte Aegypten dauernd dem Princeps reservirt und der Senat von jeder Einmischung in die Verwaltung des Landes, ja selbst von jeglicher Berührung mit demselben in geradezu befremdender Schroffheit ausgeschlossen. Über die Gründe, die ihn zu dieser Maassregel bestimmten, hat sich Augustus selbst wahrscheinlich niemals ausgesprochen; zu den *arcana dominationis* rechnet sie Tacitus, der kurz und treffend diese im Widerspruch mit den Institutionen der Republik vollzogene Neuerung im Eingang seines ersten Geschichtswerkes folgendermaassen motivirt: *Aegyptum copiasque, quibus coerceretur, iam inde a divo Augusto equites Romani obtinent loco regum: ita visum expedire, provinciam aditu difficilem, annonae fecundam, superstitione ac lascivia discordem et mobilem, insciam legum, ignaram magistratuum, domi retinere.*[1] Entscheidend ist für Augustus ohne Zweifel die Nothwendigkeit gewesen, in Aegypten als Nachfolger der Lagiden das absolute und theokratische Königsregiment fortzuführen, das mit den constitutionellen Formen des Principats unvereinbar war,[2] und es ist für den Gegensatz zwischen Aegypten und dem übrigen römischen Reich bezeichnend, dass Nero, als bereits Alles in Rom für ihn ver-

[1] Tacitus hist. I, 11, vergl. ann. II, 59. Ähnlich, vielleicht in Erinnerung an Tacitus, spricht sich Dio 51, 17 aus. Bereits von Caesar wird berichtet (Suetonius Caes. c. 35), er habe sich gescheut, Aegypten zur Provinz zu machen: *ne quandoque violentiorem praesidem nacta novarum rerum materia esset.*

[2] Vergl. Mommsen Röm. Gesch. 5 S. 554 ff.

loren war, sich noch mit dem Gedanken getragen haben soll, vom Volke die Herrschaft über dieses Land zu erbitten.[3]

Die gesammte civile und militairische Verwaltung übt als Stellvertreter des Princeps ein Praefect aus dem Ritterstande, dem nach Angabe eines späteren Juristen ein *imperium ad similitudinem proconsulis* und zwar durch einen Volksschluss übertragen worden ist,[4] und der demgemäss eine Mittelstellung zwischen den Magistraten senatorischen Standes und den kaiserlichen Procuratoren, denen er im weiteren Sinne angehört, eingenommen hat.[5] Es war ein bedeutungsvoller und folgenreicher Schritt, dass hier zum ersten Mal Legionen — es standen damals drei in Aegypten, die mit ihren Auxiliartruppen ganz entsprechend der Vertheilung der Praetorianer in Italien unter Augustus zu einem Drittel bei der Stadt, zu zwei Dritteln im Lande stationirt waren, — dem Commando eines Ritters unterstellt wurden, doch sind, wie neuere Funde lehren, diese Legionen ausschliesslich aus Orientalen, die erst beim Eintritt in das Heer das Bürgerrecht erhielten, hauptsächlich aus Galatien und Aegypten selbst rekrutirt[6] und demgemäss den übrigen Legionen, wenigstens im Occident, nicht als ebenbürtig angesehen worden.[7]

Die Criminalgerichtsbarkeit hat der Praefect, ohne Zweifel von vornherein in weitestem Umfang ausgeübt,[8] und auch die freiwillige Gerichtsbarkeit ist ihm bereits unter Augustus durch kaiserlichen Erlass übertragen worden.[9] In wie weit er sich sonst an der Civilgerichtsbarkeit betheiligt hat, ist fraglich; für die Mehrzahl der Fälle ist dieselbe nach Strabo's leider zu lakonischem Zeugniss[10] einem ebenfalls dem Ritterstande angehörigen, vom Kaiser bestellten und durch den Praefecten nicht absetzbaren[11] *iuridicus* oder δικαιοδότης übertragen,

[3] Suetonius Nero c. 47: *varie agitavit, Parthosne an Galbam supplex peteret an .... vel Aegypti praefecturam concedi sibi oraret* (anders Dio 63, 27). Nero hat, wenn der Bericht Glauben verdient, wohl nicht an die Statthalterschaft, sondern an die königliche Gewalt in Aegypten gedacht.

[4] Ulpianus digg. I, 17, 1: *praefectus Aegypti non prius deponit praefecturam et imperium, quod ad similitudinem proconsulis lege sub Augusto ei datum est.*

[5] Vergl. z. B. Ulpian. digg. 26, 5, 1 pr.; Paulus digg. 4, 6, 35, 2-3.

[6] Vergl. Mommsen: Hermes 19 S. 1 ff., eph. epigr. 5 S. 5 ff.

[7] Mommsen: Hermes a. O. S. 22, röm. Gesch. 5 S. 593. Vielleicht lässt sich so erklären, dass Nemausus trotz der wahrscheinlich unter Augustus vollzogenen Deduction aegyptischer Veteranen nicht Colonialrecht erhalten zu haben scheint: C. I. L. XII S. 381 fg. und dazu S. 833.

[8] So sagt Philo von dem Praefecten Flaccus (εἰς Φλάκκον §. 18): ὁ πρὸ μικροῦ κύριος ὢν τῆς ἑκάστου ζωῆς.

[9] Digg. 40, 2, 21.

[10] Strabo 17, 1, 12 p. 797: ὁ δικαιοδότης ὁ τῶν πολλῶν κρίσεων κύριος.

[11] Vergl. die allerdings einer viel späteren Zeit angehörige Verfügung Cod. J. I, 37, 2 (a. 395): *praefectus Augustalis ordinariorum sub se iudicum examinandi flagitia et*

dem das Recht der Vormundschaftsbestellung jedoch erst durch Verfügung des Marcus[12] und die freiwillige Gerichtsbarkeit vielleicht auch erst im Laufe der Kaiserzeit[13] übertragen worden ist. Er hat ebenfalls seinen Sitz in Alexandria; doch wurden, wie jetzt als erwiesen gelten darf, Processe aus ganz Aegypten vor sein Forum gebracht.[14]

Nach dem Beispiele Aegyptens haben Augustus und seine Nachfolger ähnliche Erwerbungen behandelt. Bei der kurzen Übersicht über die Reichsverhältnisse nach Nero's Tode spricht Tacitus[15] von den *duae Mauretaniae, Raetia, Noricum, Thracia et quae aliae procuratoribus cohibentur;* von diesen sind Raetia und Noricum bereits unter Augustus, Mauretanien unter Gaius, Thracien unter Claudius zum römischen Reiche geschlagen worden. Nicht erwähnt sind die See- und die Cottischen Alpen, die beide bereits unter Augustus das gleiche Schicksal hatten, wenn auch in den letzteren vorübergehend die Königsherrschaft wiederhergestellt worden ist; ferner das im Jahre 6 n. Chr. dem Reiche einverleibte Judaea, wo aber damals Vespasianus als Legat commandirte; Cappadocia, das, seit Tiberius procuratorische Provinz, bereits im Jahre 70 einem consularischen Legaten überwiesen wurde; Epirus, das allem Anschein nach zu Achaia gehörig, vielleicht bei der Freiheitserklärung durch Nero zu einer selbständigen procuratorischen Provinz gemacht worden ist, als welche es unter Trajan erscheint;[16] der Hellespont, der vielleicht erst unter den Flaviern vorübergehend als procuratorische Provinz verwaltet worden ist.[17] Auch Corsica hätte von Tacitus genannt werden können, da es bei der Rückgabe Sardiniens an den Senat, das ebenfalls in den Jahren 6—67 und wiederum seit dem Ende des zweiten Jahrhunderts unter einem ritterlichen Statthalter gestanden hat,[18]

---

super his referendi, non amovendi vel puniendi habeat potestatem. Doch gilt dasselbe von dem Verhältniss der Proconsuln zu ihren Legaten.

[12] Ulpian. digg. I, 20, 2.

[13] Ulpian a. a. O. §. 1: *adoptare quis apud iuridicum potest, quia data est* (ursprünglich?) *ei legis actio.* Die Legaten der Proconsuln haben nicht die freiwillige Gerichtsbarkeit: Digg. I, 15, 2-3.

[14] Mommsen R. G. 5 S. 567 A. 1 und St. R. 3 S. 753 A. 2. Wilcken *observationes ad historiam Aegypti* p. 8 ff.

[15] Histor. 1 c. 11.

[16] Marquardt St.-Verw. 1 S. 331; Mommsen R. G. 5 S. 234 Anm. 1.

[17] CJL. V. 875 vom J. 105; doch scheint die *procuratio provinciae Hellesponti* spätestens unter Domitian verwaltet zu sein. Die Einrichtung dieser wohl nur ephemeren Provinz dürfte auf Vespasianus zurückgehen, dem Rufus auch die *provincia insularum* zuschreibt (vergl. Marquardt St.-V. 1 S. 348). — Sicher verschieden von jenem Procurator ist der *proc(urator) Aug(usti) reg(ionis) Chers(onesi)*: C. I. L. III 726 (Trajan's Zeit), mit dem ihn Marquardt a. O. S. 313 A. 2 für möglicherweise identisch hält.

[18] Mommsen in C. I. L. X p. 777, der die nur auf einem (nach Mommsen) späteren

procuratorische Provinz geblieben[19] und allem Anschein nach bereits seit dem Jahre 6 als selbständige Provinz von Sardinien losgelöst worden ist.[20] Vorübergehend ist im ersten Jahrhundert ferner Bithynien von einem Procurator verwaltet worden und zwar nicht nur gegen Ende der Regierung Vespasians, welcher Zeit die bithynischen Münzen mit der Aufschrift ἐπι Λ. Ἀντωνίου Νάσωνος ἐπιτρόπου || Βιθυνία angehören,[21] sondern bereits unter Claudius finden wir als Procurator von Pontus und Bithynien in den Jahren 48 und 49 Junius Cilo, der an Stelle des im Jahre 48 abberufenen und wegen Erpressungen verklagten Proconsul Cadius Rufus als selbständiger Statthalter getreten und in dieser Stellung mit den consularischen Insignien belohnt worden ist; demnach muss die Provinz bereits damals vorübergehend in kaiserliche Verwaltung genommen worden sein.[22] Auch unter Nero scheint im Jahre 57/58, in dem der Kaiser die Strasse von Apamea nach

---

Zusatz zu zwei Vespasianischen Meilensteinen (X 8023-4) beruhende Ansicht widerlegt, dass Sardinien von Vespasian bis gegen das Ende des zweiten Jahrhunderts wieder eine procuratorische Provinz gewesen sei. Allerdings ist kein Zeugniss für die Verwaltungsform der Provinz in dieser Epoche erhalten.

[19] Mommsen in C. I. L. X p. 838; die Zeugnisse sind freilich dürftig, beweisen aber doch, wie Mommsen mit Recht geltend macht, dass Corsica unter Vespasian eine procuratorische Provinz gewesen ist. Wäre es aber im dritten Jahrhundert mit Sardinien wieder vereint worden, so würde sein Name schwerlich in dem Titel der sardinischen Praefecten fehlen.

[20] Strabo 17, 3, 25 sagt allerdings, dass Augustus es mit Sardinien zusammen zu einer praetorischen Provinz gemacht habe; doch ist sehr wohl denkbar, dass er bei Umwandlung derselben in eine procuratorische Anstand genommen habe, beide Inseln vereint unter dem Commando eines Ritters zu belassen. Auch gehört die Inschrift des *praefectus Corsicae* L. Vibrius Punicus: C. I. L. XII n. 2455 den Buchstabenformen nach der ersten Kaiserzeit an.

[21] Vergl. Borghesi *oeuvres* I p. 510, der nicht mit Recht Naso nur für einen temporären Stellvertreter des Proconsuls hält. Seine Zeit wird genauer durch eine neuerdings gefundene Wege-Inschrift aus dem Jahre 78 bestimmt: Eph. epigr. 5 n. 96 = C. I. L. III suppl. n. 6993.

[22] Tacitus ann. 12, 21 (z. J. 49): *traditus posthac Mithridates vectusque Romam per Junium Cilonem procuratorem Ponti... consularia insignia Ciloni decernuntur;* vergl. Suetonius Claudius c. 24: *ornamenta consularia etiam procuratoribus ducenariis indulsit.* Dio 60, 33 (z. J. 50): οἱ Βιθυνοὶ, δικάζοντος τοῦ Κλαυδίου, Ἰουνίου Κίλωνος τοῦ ἄρξαντος σφῶν πολλὰ κατεβόησαν, ὡς οὐ μετρίως δωροδοκήσαντος, worauf Narcissus dem schwerhörigen Kaiser vorgespiegelt habe, die Bithynier wären zur Danksagung für Cilo's Verwaltung gekommen und Claudius habe ihnen daraufhin zugesagt, er wolle ihn ihnen noch weitere zwei Jahre als Procurator lassen; demnach ist er ohne Zweifel im Jahre 48 nach Bithynien an Stelle des spätestens in diesem Jahre (auf seinen Münzen ist noch Messalina abgebildet) abberufenen und wegen Erpressungen im Jahre 49 verurtheilten Cadius Rufus (Tacitus ann. 12, 22) gesandt worden. Auf ihn bezieht Eckhel mit Wahrscheinlichkeit das in Rom gefundene Dankdecret der bithynischen Städte: C. VI, 1508; selbstverständlich wird er auch auf Münzen, ebenso wie der ebenfalls wegen Erpressungen im Jahre 61 verurtheilte Proconsul von Bithynien M. Tarquitius Priscus, als Patron der Bithynier gefeiert: Eckhel II p. 402.

Nicaea durch seinen Procurator C. Julius Aquila herstellen lässt,[23] was in einer Senatsprovinz kaum zulässig erscheint, Bithynien unter procuratorischer Verwaltung gestanden zu haben; es spricht dafür ferner, dass Aquila, der bereits im Jahre 49 aus Anlass eines ausserordentlichen militairischen Commandos im Bosporus mit den praetorischen Insignien belohnt worden war,[24] schwerlich acht Jahre später als einfacher Finanzprocurator nach Bithynien geschickt worden wäre. Man sieht, dass bereits im ersten Jahrhundert die Missstände in dieser Provinz, insbesondere die Erpressungen der Proconsuln, ein strafferes kaiserliches Regiment immer wieder nothwendig machten, ein Vorspiel zu der ausserordentlichen Mission des Plinius unter Trajan und der definitiven Verwandlung Bithyniens in eine legatorische Provinz.[25] Ob der in einer Inschrift des dritten Jahrhunderts[26] als δουκηνάριος τοῦ Σεβαστοῦ Πόντου καὶ Βειθυνίας bezeichnete P. Sallustius Sempronius Victor, der unter Severus Alexander und Maximinus Procurator in Mauretanien war,[27] als Statthalter zu fassen ist, bleibt zweifelhaft; da jedoch kurz vorher an Stelle der Legaten wieder Proconsuln in Bithynien auftauchen,[28] so ist es keineswegs undenkbar, dass dieselben, wie im ersten Jahrhundert, zeitweise von Procuratoren abgelöst worden sind. — Der Pontus Polemoniacus hat dagegen niemals eine selbständige Provinz gebildet.[29]

Zu diesen procuratorischen Provinzen ist dann unter Septimius Severus Mesopotamia mit Osrhoene getreten. Nach der kurzen Occupation Mesopotamiens unter Trajan ist bekanntlich dasselbe von seinem Nachfolger sofort aufgegeben und erst von L. Verus wieder erobert worden; doch dürfte auch diese Eroberung, von der nur ein Zeugniss zweifelhaften Werthes berichtet,[30] wenn sie überhaupt vollzogen worden ist, nicht dauernd gewesen sein, und erst Septimius Severus scheint Mesopotamien zum römischen Reiche geschlagen zu haben.[31] Dass dasselbe zu einer procuratorischen Provinz gemacht worden ist, bezeugt sowohl Dio,[32] mit den allerdings von seinem

---

[23] Vergl. Eph. epigr. 5 p. 41.

[24] Tacitus ann. 12, 15 und 21.

[25] MARQUARDT a. O. S. 352 ff.

[26] C. I. Gr. 2509.

[27] C. I. L. VIII n. 8828. 10438; Eph. V n. 1316-7.

[28] MARQUARDT a. O. S. 354.

[29] Vergl. PERROT: de Galatia provincia p. 53 Anm. 1; bei MARQUARDT a. O. S. 360 A. 9 ist der Irrthum der ersten Auflage nur zum Theil berichtigt.

[30] Ruf. Festus breviar. c. 14: *sub Antoninis duobus, Marco et Vero, ac Severo Pertinaci ceterisque principibus Romanis ... quater amissa, quater recepta Mesopotamia est.*

[31] MARQUARDT a. O. S. 436.

[32] epit. 75, 3.

Epitomator verkürzten Worten: ὁ δὲ Σεβῆρος, ἀξίωμα τῇ Νισίβει δοὺς, ἱππεῖ ταύτην ἐπέτρεψεν, wo ταύτην schwerlich auf Nisibis, sondern auf die Provinz von Dio bezogen worden ist, als auch eine der Zeit des Severus angehörige Inschrift eines *procurator sexagenarius provinciae Mesopotamiae*, der zwischen den Jahren 198—209 gestorben ist,[33] also wohl unmittelbar nach der Eroberung dieses Amt bekleidet hat. An seine Stelle sind später ritterliche Praefecten getreten, die noch gegen Ende des dritten Jahrhunderts erwähnt werden.[34]

Auch Osrhoene hat bereits, wie eine neuerdings gefundene Inschrift erweist,[35] unter Septimius Severus einen Procurator als Statthalter gehabt, wird daher wohl zugleich mit Mesopotamien, nicht erst, wie allgemein angenommen wird, unter dem Sohne des Kaisers, wenigstens vorübergehend zur Provinz gemacht worden sein. Jedoch scheint Severus den König von Osrhoene Abgaros bald wieder eingesetzt zu haben, da, wie berichtet wird, Caracalla sich in hinterlistiger Weise seiner Person und seines Reiches bemächtigte, das erst unter Gordianus III. wieder einen König desselben Namens erhalten hat.[36]

Ausser diesen dauernd oder zeitweise von ritterlichen Statthaltern verwalteten Provinzen, denen nach einer nicht beweisbaren Vermuthung Mommsen Numidien in der Zeit von Gordianus bis Valerianus zuzuzählen geneigt ist,[37] sind in gleicher Weise einzelne Theile grösserer Provinzen vorübergehend verwaltet worden, so das zu Dalmatien gehörige Liburnia, dessen *procurator centenarius iure gladii* in einer nachhadrianischen Inschrift erscheint,[38] anscheinend ferner unter Vespasian und wohl mindestens bis auf Trajan die zur Tarraconensis gehörigen Asturia et Callaecia,[39] schliesslich im Beginn der Kaiserzeit die bar-

---

33 C. I. L. VIII n. 9760, vergl. n. 9757.

34 Marquardt a. O. S. 437.

35 C. I. L. XII n. 1856; Procuratoren von Osrhoene aus unbestimmter Zeit: C. I. L. II n. 4135; VI n. 1644 add.

36 von Gutschmid, Untersuchungen über die Geschichte des Königreichs Osroene (Petersburg 1887) S. 34 ff., der jedoch die Inschrift des in Rom gestorbenen *Abgar Prahates filius rex principis Orrhenoru(m)* (C. I. L. VI n. 1797, vergl. die Anmerkung) wohl nicht mit Recht auf Abgar XI statt auf Abgar X bezieht; vergl. die griechische Grabschrift seines im Alter von 26 Jahren in Rom verstorbenen gleichnamigen Sohnes, von dessen Bruder Antoninus gesetzt: C. I. Gr. 6196.

37 C. I. L. VIII praef. p. XXI. Vergl. dagegen Pallu de Lessert in Recueil de Constantine 25 (1888) p. 148 ff.

38 C. I. L. III n. 1919 und add. p. 1030.

39 C. I. L. II n. 2477 (im Jahre 79); da sein Name neben dem Kaiser und den Prinzen, dem Statthalter und dem Legionscommandanten im Ablativ zur Datirung verwandt wird, so ist er kaum als einfacher Finanzprocurator zu fassen. Spätere Procuratoren von Asturia et Callaecia und Praefecten der getrennten Landschaften bei Marquardt a. O. S. 254 A. 10; doch tritt bereits unter Antoninus Pius ein *leg. Aug. iuridicus Asturiae et Callaeciae* auf: C. I. L. VIII n. 2747.

barischen Gebiete von Moesien, wo unter Claudius ein *praefectus civitatium Moesiae et Treballiae* bezeugt ist.[40] Doch wird man eine solche Abzweigung eigener procuratorischer Districte von consularischen Provinzen nur als eine durch besondere Verhältnisse hervorgerufene Ausnahme anzusehen berechtigt sein.

Die Qualification für die procuratorische Statthalterschaft sollte nach Augustus' Absicht die Zugehörigkeit zum Ritterstande bilden und dementsprechend sagt Strabo,[41] der Kaiser schicke in seine Provinzen *εἰς ἃς μὲν ὑπατικοὺς ἄνδρας, εἰς ἃς δὲ στρατηγικοὺς, εἰς ἃς δὲ καὶ ἱππικούς.* Die interimistische Stellvertretung des Praefecten von Aegypten durch einen kaiserlichen Freigelassenen unter Tiberius[42] wird man kaum als eine Ausnahme von dieser Regel ansehen dürfen, da derselbe ohne Zweifel mit dem Commando der dort stationirten Legionen nicht betraut worden ist. Erst Claudius hat gewagt, einen als Sclav geborenen zum Procurator von Judaea zu machen und ihm das Commando der Truppen in dieser Provinz zu übertragen:[43] den bekannten Antonius Felix, den Bruder des allmächtigen Finanzministers Pallas; doch wird man auch bei ihm, schon seiner vornehmen Ehen wegen, eine vorhergegangene Erhebung in den Ritterstand annehmen dürfen. Wenn Tacitus[44] dies nach seiner Gewohnheit verallgemeinert: *Claudius . . Judaeam provinciam equitibus Romanis aut libertis permisit,* so ist dagegen doch zu bemerken, dass Felix unter den jüdischen Procuratoren der einzige unfreier Geburt ist. Aber auch unter der grossen Zahl von Praesidialprocuratoren überhaupt finden wir nur einen oder höchstens zwei Freigelassene, und auch diese in nicht ganz unbedenklichen Documenten[45], während man sich nicht gescheut hat, dieselben zu Verwaltern von Inseln und kleineren Districten, besonders

---

[40] C. I. L. V n. 1838-39.

[41] Strabo 17, 3, 25 p. 840.

[42] Dio 58, 19. Vergl. Philo *εἰς Φλάκκον* c. 1.

[43] Die Übertragung des Militaircommandos an einen Freigelassenen betont Suetonius Claud. c. 28 besonders scharf: *Felicem, quem cohortibus et alis provinciaeque Iudaeae praeposuit,* wo unter den *cohortes et alae* wohl die in Judaea stationirten zu verstehen sind.

[44] Tacitus histor. 5, 9.

[45] C. I. L. X n. 6081 (= J. N. n. 4083, wo sie als verdächtig bezeichnet wird): *Acasto Aug. lib. procuratori provinciae Mauretaniae et tractu(s) Campan(iae).* Die Überlieferung der Inschrift (Sirmond, Maza) schliesst nach Mommsen's Ansicht den Gedanken an Fälschung aus; Befremden erregt jedoch, dass Mauretania ohne Zusatz steht, die Bezeichnung von Campania als *tractus,* auch das Fehlen der Altersangabe in einer Grabschrift ist bemerkenswerth. — Das andere Beispiel eines *Rufinus lib. procos.* (sic) *provinciae Mauretaniae Tingitanae* (C. I. L. XI n. 8: a. 196) geht nur auf eine Abschrift zurück (*'ex membrana velusta'*); es ist daher sehr zweifelhaft, ob für *procos.* nicht ein anderes Amt als *procurator* gestanden hat. Für gefälscht hält beide Inschriften Pallu de Lessert *bibliothèque des antiquités Africaines* 1885 p. 137 und 150.

in Africa[46] zu machen. Begreiflicherweise nahm man zu solchen Stellen meist gediente Officiere, die in der Regel vorher eine *ala* commandirt oder ein Tribunat bei den Praetorianern bekleidet hatten;[47] ja selbst die Finanzprocuratoren in den von senatorischen Statthaltern verwalteten Provinzen sind durchgehends aus dem Ritterstande genommen und nur unter dem schwachen Regiment des Marc Aurel, der auch in den grossen Hofämtern wieder auf die vorhadrianische Praxis der Besetzung mit Freigelassenen zurückgriff,[48] treten unter den provinzialen Finanzprocuratoren so zahlreiche Freigelassenen auf, dass wir darin geradezu ein verändertes Princip bei Besetzung dieser Stellen in jener Zeit erkennen müssen.[49]

Über den Rang und die Besoldung der Praesidialprocuratoren habe ich an einem anderen Orte[50] gehandelt. Hier genüge die Bemerkung, dass die Finanzprocuratoren in den grösseren Provinzen an Rang und Gehalt denselben keineswegs nachgestanden, sondern grossentheils sie übertroffen haben, ja dass die Praesidialprocuratoren zum Theil den niedrigsten Gehaltstufen angehören.[51] Doch hat die Stellung der procuratorischen Provinzen nach den Zeitverhältnissen vielfach gewechselt und eine Rangordnung derselben ist um so weniger aus den Inschriften zu geben, als uns meistens sowohl die Zeit dieser Urkunden, als die näheren Verhältnisse der Provinzen zu kennen versagt ist.[52]

---

[46] Vergl. Mommsen C. I. L. VIII praef. p. XVII und Eph. epigr. 5 p. 112. Vergl. betreffs der Inseln C. I. L. X n. 6785 (mit Mommsen's Anmerkung), wonach ein kaiserlicher Freigelassener Metrobius als Praefect von Pandataria: *praefuit hic longum tibi Pandotira per aevom, providaque in melius iura dedit populo* und n. 7494: *Chrestion Aug. lib. proc. insularum Melit(ae) et Gaul(i).*

[47] Vergl. meine Untersuchungen S. 251-2.

[48] Freigelassene *a rationibus*: Friedlaender Sittengeschichte I[6] S. 174-5; *ab epistulis*: I[6] S. 187.

[49] Zu den von Liebenam *quaestiones epigraphicae* (Bonn 1882) S. 11 zusammengestellten Beispielen ist hinzuzufügen C.I. L. VI n. 8568: *T. Ael. Augg. lib. Restitutus proc. [S]yriae Palaest(inae)*; VI n. 8569: *T. Ael. Aug. lib. Saturo proc. pr[ov .... et ....] Aug. lib. Luciano proc. provin. Narbonensis;* X n. 6571: *M. Aurelius Philippus Aug. lib. proc. Asiae.* Auch der *M. Ulpius Augg. lib. Probus proc. prov. Pannoniae superioris et Africae reg(ionis) Thevest(inae)*: C. I. L XIV n. 176 gehört trotz seines Namens (*M. Ulpius*) doch wohl dieser Zeit an. — Unrichtig zieht Liebenam hierhin auch den Freigelassenen und Procurator des Severus Alexander: Theoprepes (C. I. L. III n. 536); dieser war *proc. rat(ionis) purpurarum* in Achaia Epirus Thessalia, aber nicht Procurator dieser Provinzen selbst. Dass der Freigelassene des Augustus, der berüchtigte Licinus in Gallien, den Titel *procurator prov. Galliae* (bez. *Lugudunensis*) geführt habe, ist mir nicht wahrscheinlich.

[50] Untersuchungen I S. 260 ff.

[51] Meine Untersuchungen I S. 261 A. 1-2.

[52] Ich bemerke dies gegen die von Liebenam: Beiträge zur Verwaltungsgeschichte des römischen Kaiserreichs S. 134 ff. aufgestellte Tabelle, nach der beispielsweise der Procurator der Alpes Atrectianae im Range über dem Procurator von Noricum gestanden haben soll.

Der Titel der in diese Provinzen gesandten Statthalter ist in der ersten Kaiserzeit nicht *procurator*, sondern gleichwie in Aegypten, *praefectus* oder *praefectus civitatium* gewesen.[53] So bezeichnet sich im Jahre 745/6 Cottius, der Sohn des Königs Donnus, als *praefectus ceivitatium quae subscriptae sunt* und dementsprechend dieselben sich als *ceivitates quae sub eo praefecto fuerunt*[54]. Ebenso finden wir in den Seealpen in zwei unter Claudius gesetzten Inschriften desselben Mannes[55] einen *praef(ectus) civitat(ium) in Alpib(us) Maritimis* und in derselben Inschrift einen *praef(ectus) civitatium Moesiae et Treballiae*. Zu vergleichen ist ferner der *praefectus* [I] *cohortis Corsorum et civitatum Barbariae in Sardinia* in einer Praenestinischen Inschrift aus Tiber's Zeit[56], wie auch der derselben Zeit angehörige *praefectus Raetis Vindolicis vallis Poeninae*[57] unzweifelhaft als Vorläufer des Procurators von Rätien anzusehen ist. Vielleicht hat auch der Statthalter von Noricum ursprünglich den Titel *praefectus civitatium in Norico* geführt, wenigstens ist beachtenswerth, dass in den oben erwähnten Inschriften[58] der Titel lautet *procurator Ti. Claudi Caesaris Aug. Germanici in Norico*, nicht wie später gewöhnlich *regni Norici* oder *provinciae Noricae*. Offenbar hat Augustus schon durch den Titel ausdrücken wollen, dass diese Praefecten nicht als Statthalter von Provinzen, sondern als Commandanten in barbarischen Districten, ähnlich wie die Praefecten der *gentes* und *nationes* in Africa,[59] gelten sollten, entsprechend der Angabe Strabo's[60]: ἐπὶ δὲ τοὺς ὀρεινοὺς (nämlich in die Alpen) πέμπεταί τις ὕπαρχος τῶν ἱππικῶν ἀνδρῶν, καθάπερ καὶ ἐπ' ἄλλους τῶν τελέως βαρβάρων. Insbesondere in Sardinien, wo es sich im Gegensatz zu den neu annectirten Barbarenländern um die Übernahme fast der ältesten römischen Provinz handelte, mochte Augustus den Schein vermeiden wollen, als ob er dieselbe dauernd als Privatbesitz verwalten zu lassen beabsichtige; auch lag in dem militairischen Titel wohl ausgedrückt, dass die dort ansässigen römischen Bürger der Jurisdiction des Praefecten nicht unterstanden. Diesen rein

[53] Über den Titel *praefectus* vergl. HENZEN *ann. d. inst.* 1860 S. 44 ff. MOMMSEN St.-R. 3 S. 557 mit A. 3 und HERMES B. 24 S. 250.

[54] C. I. L. V n. 7231 mit MOMMSEN's Bemerkungen p. 809.

[55] C. I. L. V n. 1838 und die sehr verstümmelte Dedication an denselben n. 1839, wo vielleicht in der letzten Zeile [*co*]*ns*[*is*]*te*[*ntes*] zu ergänzen ist. Die Praefecturen in Moesien und in den Alpen fallen wohl noch vor Claudius.

[56] C. I. L. XIV n. 2954; über die Barbaria (heute Barbargia oder Barbagia) genannte Gegend im Osten der Insel vergl. C. I. L. X p. 818.

[57] C. I. L. IX n. 3044 und dazu MOMMSEN eph. epigr. 5 p. 518 ff.

[58] C. I. L. V n. 1838-1839.

[59] Vergl. die Beispiele bei HENZEN a. O. S. 51 und MOMMSEN Hermes 24 S. 250 A. 2.

[60] Strabo IV, 6, 4 p. 203.

militairischen Charakter betont auch Dio[61] bei der Übernahme Sardiniens in kaiserliche Verwaltung: καὶ γὰρ λησταὶ συχνὰ κατέτρεχον, ὥστε τὴν Σαρδὼ μήτ᾽ ἄρχοντα βουλευτὴν ἔτεσί τισι σχεῖν, ἀλλὰ στρατιώταις τε καὶ στρατιάρχαις ἱππεῦσιν ἐπιτραπῆναι, wonach man vielleicht annehmen darf, dass noch ein zweiter Cohortenpraefect neben dem obengenannten in dem westlichen Theil von Sardinien stationirt gewesen ist. Ob der Statthalter von Judaea sofort den Titel *procurator* erhalten hat, ist demnach keineswegs so sicher, als gemeinhin angenommen wird. Auf die Nomenclatur des Josephus, der zwischen ἔπαρχος, ἐπίτροπος und ἡγεμών abwechselt, ist selbstverständlich nichts zu geben und auch die Autorität des Tacitus,[62] der den Pilatus als *procurator* bezeichnet, wiegt in dieser Hinsicht nicht schwer; in den Evangelien und der Apostelgeschichte wird der Statthalter regelmässig ἡγεμών genannt, was dem lateinischen *praeses* entspricht;[63] aber ein inschriftliches Zeugniss, das hier entscheidend wäre, existirt merkwürdigerweise für keinen der jüdischen Statthalter bis auf Vespasian.[64] Dass unter Claudius der Titel *procurator* gelautet habe, wird man allerdings aus dem von Josephus[65] mitgetheilten Erlass dieses Kaisers an die Juden, an dessen Echtheit zu zweifeln kein Grund vorliegt, annehmen dürfen, da es in demselben heisst: ἔγραψα δὲ περὶ τούτων καὶ Κουσπίῳ Φάδῳ τῷ ἐμῷ ἐπιτρόπῳ und denkbar wäre es, dass mit Rücksicht auf die eigenthümlichen Verhältnisse in Judaea dieser Titel dort schon früher dem Statthalter verliehen worden ist; doch führt die Analogie von Aegypten und der übrigen Ritterprovinzen, wie auch die allerdings wenig beweisende Bezeichnung bei dem frühesten Zeugen, Philo: Πιλάτος ἦν τῶν ὑπάρχων (vergl. Strabo an der oben S. 425 citirten Stelle) ἐπίτροπος ἀποδεδειγμένος τῆς Ἰουδαίας[66] eher zu der Annahme, dass auch in Judaea in der ersten Kaiserzeit der Titel *praefectus* gelautet habe. Unter Claudius sind dann aber auch in den anderen Provinzen vielfach Procuratoren an die Stelle der militairischen Praefecten getreten,[67] wie auch der letzte ritterliche

---

[61] Dio 55, 28. Betreffs des der ersten Kaiserzeit angehörigen *praefectus Corsicae* s. ob. Anm. 20.

[62] Tacitus ann. 15, 44.

[63] Eckhel IV p. 243 ff.

[64] Die Ergänzungen der Inschrift von Arados C. I. Gr. 4536 f. ἔπαρχον [ἔ]θ[νους Ἰουδαί]ων und ἐπά]ρχου [τ]οῦ Ἰουδαϊ[κοῦ ἔθνους] sind mit Recht von Mommsen im Hermes 19 S. 644 ff. zurückgewiesen.

[65] Josephus antiq. 20, 1, 2.

[66] Philo leg. ad Gaium §. 38; allerdings gebraucht Philo sowohl ὕπαρχος, als ἐπίτροπος auch für den Statthalter von Syrien (vergl. z. B. §. 31 und 42), wie auch von dem *praefectus Aegypti*.

[67] Vergl. meine Untersuchungen I, S. 288.

Statthalter Sardiniens unter Nero in dem Decret des Proconsuls Helvius Agrippa als Procurator bezeichnet wird,[68] eine Veränderung, die einerseits durch die inzwischen erfolgte Civilisirung der Barbarenländer hervorgerufen war, mehr aber wohl noch dadurch, dass Claudius oder seine Freigelassenen die staatsrechtlichen Bedenken des Augustus nicht theilten, und diese Länder als thatsächliches Eigenthum des Kaisers verwaltet sehen wollten. Doch tritt in einzelnen Provinzen bez. Districten, wie Mesopotamia, Asturia und Callaecia, auch in späterer Zeit der Titel *praefectus* allein oder, wie in Sardinien im dritten Jahrhundert, mit *procurator* vereint[69] nicht selten auf.

Der Titel *praeses*, der ohne Zweifel in der Anrede bereits früh den procuratorischen Statthaltern gegenüber gebraucht sein und daher ihnen auch in Dedicationen, allerdings erst in Marc Aurel's Zeit,[70] ausnahmsweise selbst dem unter den Finanzprocuratoren eine hervorragende Stellung einnehmenden[71] Procurator von Gallia Belgica beigelegt wird, erscheint als officielle Titulatur allein oder vereint mit dem Titel *procurator* erst seit dem Beginn des dritten Jahrhunderts[72], eine Neuerung, die wahrscheinlich auf Septimius Severus oder seinen Sohn zurückgeht und vielleicht mit der allgemeinen Ertheilung des Bürgerrechts unter Caracalla in einem gewissen Zusammenhang steht. Diese ritterlichen Praesides hat Macer in seiner etwa dieser Zeit angehörigen Schrift *de officio praesidis* bei seiner bekannten Definition[73] im Auge: *praesidis nomen generale est eoque et proconsules et legati Caesaris et omnes provincias regentes, licet senatores sint, praesides appellantur; proconsulis appellatio specialis est,* wo jedoch meines Erachtens, voraus-

---

[68] C. I. L. X n. 7852.

[69] Vergl. Mommsen in C. I. L. X p. 77 und 1121.

[70] So wird ein Procurator von Raetien unter M. Aurel als *praeses optimus et sanctissimus* von den ihm untergebenen *decuriones alarum* bezeichnet: C. I. L. V n. 8660; ähnlich ein Procurator von Mauretania Caesariensis von den *veterani et pagani* in zwei fast gleichlautenden Inschriften derselben Zeit: Eph. epigr. 5 n. 955 und 1302.

[71] C. I. L. III n. 5215; vergl. Commentationes Mommsenianae S. 443 A. 42.

[72] Praesides der Alpes Maritimae: C. I. L. XII n. 7 (wahrscheinlich a. 213), XII n. 78 (Ende des 3. Jahrh.) *proc.* [*et*] *prae*[*s.*] (wohl nicht *prae*[*f.*] zu ergänzen) *Alpium Maritimar*(*um*), C. I. Gr. 6771: *ἐπίτροπος καὶ ἡγεμὼν τῶν παραθαλασσίων* Ἄλπεων, C. I. L. V n. 7880-81. Alpes Cottiae: V n. 7248-9. 7250-1; Mauretaniae: VIII n. 9002, vergl. n. 9371. Sardinia: C. I. L. VI n. 1636, X n. 8013, C. I. Gr. n. 2509: *ἡγεμὼν καὶ δουκηνάριος Σαρδονίας.* Die *ἡγεμόνες* auf thrakischen Münzen sind dagegen nicht, wie Eckhel annahm, Praesidialprocuratoren, sondern kaiserliche Legaten; vergl. Borghesi III p. 278; Marquardt St.-V. I S. 314 A. 5.

[73] Digg. I, 18, 1; die überlieferte Lesart vertheidigt Mommsen zu Borghesi *oeuvres* V S. 405 A. 5 und St.-R. II S. 240 A. 2. Scialoia in Bull. dell' istit. di diritto Romano I p. 98 ff. will *senatoriae* schreiben; doch halte ich, abgesehen von anderen Bedenken, diese Bezeichnung für Senatsprovinzen nicht für zulässig.

gesetzt dass die Stelle nicht interpolirt ist,[74] nicht ohne Grund HOTOMANNUS vor *sint* den Ausfall eines *non* angenommen hat. Denn der Titel *praeses* wird noch von Ulpian[75] speciell für die kaiserlichen Legaten, im Gegensatz zu dem Proconsul und Procurator, verwendet und ist erst in der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts technisch für die ritterlichen Statthalter geworden.[76]

Von diesen Praesidialprocuratoren sind selbstverständlich die Finanzprocuratoren zu scheiden, die in proconsularischen und legatorischen Provinzen an Stelle des gestorbenen oder abwesenden Statthalters vorübergehend die Vertretung desselben ausüben und daher den Titel *procurator vice praesidis* oder in Senatsprovinzen *procurator vice proconsulis* führen. In den letzteren ist, dem Grundgedanken der Augustischen Verfassung entsprechend, zu einer solchen Stellvertretung der Procurator eigentlich überhaupt nicht, sondern nur der Legat, beziehungsweise der Quästor des Proconsuls berufen und sicherlich hat man in der ersten Kaiserzeit daran festgehalten.[77] Aber bereits unter Domitian finden wir einen ritterlichen *procurator provinciae Asiae quam mandatu principis vice defuncti proconsulis rexit*, der nach einer wahrscheinlichen Vermuthung WADDINGTON's den von Domitian in seinem Proconsulate getödteten Civica Cerialis zu ersetzen hatte.[78] Doch ist dies das einzige bekannte Beispiel in den ersten

---

[74] Hr. Dr. GRADENWITZ ist (nach einer mir während der Correctur gemachten Mittheilung) der Ansicht, dass die Worte *et omnes—praesides* als Interpolation, die sich besonders in der Wiederholung des Wortes *praesides* verrathe, zu tilgen sind. Ist diese Annahme, wie ich glauben möchte, begründet, so fällt der Anlass zur Änderung der Überlieferung natürlich fort.

[75] Ulpianus digg. XXVI, 5, 1 pr. (nach MOMMSEN's Restitution, der jedoch die Stelle für interpolirt hält): *sive proconsul sive praeses sive etiam praefectus Aegypti sive [procurator qui praesidatum] optineat provinciae vel temporis causa praeside defuncto vel quia ipsi provincia regenda commissa est, tutorem dare poterit.*

[76] Das hebt MOMMSEN selbst hervor im St.-R. II S. 240 A. 2: 'eigentlich titular aber ist die Benennung *praeses* erst in der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts mit dem Schwinden der senatorischen *legati* und dem Umsichgreifen der nichtsenatorischen Statthalter, und mit der Trennung des Commandos von der Verwaltung im Provinzialregiment geworden, was dann in der diocletianischen Ordnung sich weiter entwickelt'. In diesem späteren Sinne ist zu verstehen die Nachricht in der vita Alex. Sev. c. 24: *provincia[s] legatorias praesidiales plurimas fecit*; vergl. MOMMSEN zu BORGHESI III S. 277 A. 2.

[77] Die zeitweise Übernahme einer Senatsprovinz in procuratorische Verwaltung (s. oben S. 420 über Bithynien) ist davon natürlich verschieden; so berichtet auch Dio 55. 28 im Anschluss an die Sendung von ritterlichen στρατιάρχαι nach Sardinien im Jahre 6: καὶ πόλεις οὐκ ὀλίγαι ἐνεωτέριζον, ὥστε καὶ ἐπὶ δύο ἔτη τοὺς αὐτοὺς ἐν τοῖς τοῦ δήμου ἔθνεσι καὶ αἱρετούς γε ἀντὶ τῶν κληρωτῶν ἄρξαι. Vielleicht hat Dio Dalmatien dabei im Auge.

[78] C. I. L. V n. 875; die Inschrift ist im Jahre 105 gesetzt, doch hat C. Minicius Italus nach der Procuratur von Asien noch drei Ämter bekleidet. Vergl. WADDINGTON *fastes Asiatiques* p. 162.

beiden Jahrhunderten; erst im Jahre 202/3 und dann wieder um das Jahr 260 wird eine solche Vertretung für Africa,[79] etwa unter Severus Alexander für Asien[80] und in einer Inschrift unbestimmter Zeit, die aber gewis ins dritte Jahrhundert fällt, für Macedonien[81] bezeugt. Man darf daher wohl annehmen, dass die Kaiser bis auf Septimius Severus sich gescheut haben, in dieser Weise in die Verwaltung der Senatsprovinzen einzugreifen, so dass auch hierin die veränderte Praxis dieses Kaisers und des dritten Jahrhunderts überhaupt zu erkennen ist. — In den legatorischen Provinzen bestanden diese staatsrechtlichen Bedenken nicht; aber auch hier sind derartige Stellvertretungen in den ersten beiden Jahrhunderten mit Ausnahme der ausserordentlichen Laufbahn des Marcius Turbo, der unter Hadrian als Ritter, nach Verwaltung von Mauretanien, zeitweise Statthalter von Pannonien und Dacien war: *titulo Aegyptiacae praefecturae, quo plus auctoritatis haberet, ornatus*[82] und eines wohl vor Septimius Severus fallenden *procurator Aug(usti) provinciae Iudaeae v(ices) a(gens) l(egati)*[83] gänzlich unbezeugt,[84] und erst im dritten Jahrhundert, dann aber auch in grosser Zahl, treten die *procuratores vice praesidis* oder *agentes vices praesidis* oder *partibus praesidis fungentes* in kaiserlichen Erlassen[85] und Inschriften[86] auf. In älterer Zeit wird man diesen Rittern das

---

[79] Acta martyr. (ed. RUINART) p. 83: *Hilarianus procurator qui tunc loco proconsulis Minucii Timiniani defuncti ius gladii acceperat* und p. 231: *rapti sumus ad procuratorem qui defuncti proconsulis partes administrabat.*

[80] Inschrift des Timesitheus in Lyon (WILMANNS n. 1293): *proc. prov. Asiae ibi vice XX et XXXX itemq(ue) vice proco(n)s(ulis)*; vergl. WADDINGTON a. O. S. 264.

[81] C. I. L. VI n. 1638: [*proc. prov.*] *Maced(oniae), proc. pro[v.....] ubiq(ue) vic(e) praes[idis]*. Dagegen ist der angebliche Procurator von Lykien, der in der *passio Leonis et Paregorii* an Stelle des noch nicht angekommenen Proconsuls Lollianus *'tunc administrabat rempublicam'* vielleicht als Curator von Patara zu fassen, vergl. §. 2 (RUINART p. 478): *cum eo tempore penes procuratorem urbis, qui erat Pataris, regimen foret.*

[82] Vita Hadriani c. 6-7.

[83] C. I. L. III n. 5776; für eine nicht zu späte Abfassung spricht der Name Judaea statt Syria Phoenice.

[84] Dass in Britannien die bedrängten Veteranen in Camulodunum im Jahre 61: *quia procul Suetonius aberat, petivere a Cato Deciano procuratore auxilium* (Tacitus ann. 14, 32), braucht nicht auf officielle Vertretung des Statthalters gedeutet zu werden.

[85] Verordnungen Caracallas: Cod. J. III, 26, 3 und IX, 47, 2; Gordians: Cod. J. III, 3, 1 und IX, 20, 4. Vergl. Papinian digg. 49, 1, 23 §. 1: *procurator Caesaris, qui partibus praesidis non fungebatur;* Ulpian digg. 26, 5, 1 pr. (s. ob. Anm. 74) und *Mos. et Rom. leg. coll.* 14, 3, 2-3.

[86] Den bei MARQUARDT St.-Verw. I S. 556 A. 8 zusammengestellten Beispielen sind zuzufügen: C. I. L. III n. 1464 (nach dem Jahre 205): *proc. Aug[us]ti [prov.] Daciae Apulensis a(gens) v(ices p(raesidis)*; III n. 1625 (wahrscheinlich aus derselben Zeit): *proc. Augg. nn.* (in Dacien) *agens v(ices) p(raesidis)*; WILMANNS n. 1293 (etwa unter Severus Alexander): *vice praesid(is) prov(inciae) German(iae) inferior(is)*; C. I. L. VIII 8328 add. (unbestimmte Zeit): *proc. ..... partes praes(idis) agens [per] Numid(iam)*;

Commando der Legionstruppen zu übergeben Anstand genommen und daher die Vertretung des Statthalters ihren senatorischen Unterbeamten und Begleitern, insbesondere, soweit solche vorhanden waren, den *iuridici* übertragen haben. Auch in dieser Hinsicht sind die Tendenzen des dritten Jahrhunderts von der früheren Zeit sehr verschieden, und so bildet die immer häufiger werdende temporäre Verwendung der Procuratoren als Vicestatthalter in den mit Legionen belegten Provinzen das Vorspiel zu der definitiven Verdrängung der Senatoren von den grossen Militaircommandos, die sich in der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts vollzogen hat.

Es bleibt hier noch der Titel *procurator pro legato* zu erwägen, der in der Regel als ausführlichere, also eigentlich officielle Titulatur des Praesidialprocurator aufgefasst wird.[87] Dieser Auffassung kann ich nicht beitreten; denn einerseits sind die Praesidialprocuratoren keineswegs den Legaten nachgebildet, so dass sie gewissermaassen als Ersatzmänner derselben hätten bezeichnet werden können, andererseits tritt dieser Titel so selten auf, dass er nicht als der für die Praesidialprocuratoren officielle angesehen werden kann. Er findet sich nämlich, abgesehen von dem als Stellvertreter des Legaten der Tarraconensis für einen Sprengel dieser Provinz bestellten und daher mit den Statthaltern selbständiger Provinzen nicht auf gleicher Linie stehenden *praef(ectus) pr[o] legato insular(um) Baliarum*,[88] nur in einem einzigen Beispiel[89] für die Provinz Raetien und in zwei Inschriften für Mauretania Tingitana bezeugt,[90] schliesslich in einer verstümmelten Inschrift,[91] die wohl ebenfalls auf die letztgenannte Provinz zu ergänzen sein dürfte. Die Inschrift des *procur(ator) Augustor(um) et pro leg(ato) provinciai Raitiai et Vindelic(iai) et vallis Poenin(ai)* dürfte trotz des sonst nur unter Claudius bezeugten archaisirenden *ai* der Zeit des Marcus Aurelius und Lucius Verus zuzuweisen sein, also der Zeit des Ausbruches des Marcomanenkrieges, in Folge dessen Raetien die legio III

VI n. 1638 (unbestimmte Provinz). Auch der *procurator ducenarius* von Hispania Tarraconensis, der etwa um das Jahr 250 das Christenverhör leitet (Cyprianus epp. 67, 6), ist vielleicht Stellvertreter des Statthalters gewesen. Der späteren Gestaltung, in der die Senatoren überhaupt von den Statthalterschaften ausgeschlossen waren, gehören bereits an der *v(ir) e(gregius) a(gens) v(ices) p(raesidis)* in Pannonia inferior im Jahre 267: C. I. L. III n. 3424, ebenso wie in der Senatsprovinz Baetica der *v(ir) p(erfectissimus) a(gens) v(ices) p(raesidis)* unter Florianus und Probus: C. I. L. II n. 1115-16.

[87] Marquardt I S. 557.

[88] Orelli n. 732 = C. I. L. XI n. 1331 (im Jahre 66); die Insel diente im ersten Jahrhundert der Kaiserzeit als Verbannungsort (Beispiele bei Hartmann: de exilio p. 53 A. 4); dieser Umstand dürfte die Stationirung dieses Praefecten veranlasst haben.

[89] C. I. L. V n. 3936.

[90] C. I. L. VIII n. 9990; XII n. 1856.

[91] C. I. L. IX n. 4678.

Italica als Besatzung und einen senatorischen Legaten als Statthalter erhielt. Ich möchte daher glauben, dass der obengenannte *procurator pro legato* den Übergang zu dieser neuen Verwaltungsform gemacht hat, indem man die nothwendig gewordenen Legionstruppen zunächst seinem Commando unterstellte und erst als sich ergab, dass die Donaugrenze hier dauernd eine starke Legionsbesatzung erheischte, ihn definitiv durch den Legaten ersetzte. Ähnliche Verhältnisse haben aber auch in der von Aufständen fortwährend heimgesuchten Mauretania Tingitana obgewaltet; denn hier hat einerseits, von Gordianus bis auf Valerianus, eine Legion (die XXII. Primigenia) oder doch ein Theil derselben gelegen und zeitweise ein Legat als Statthalter beider Mauretanien fungirt;[92] andererseits wird ein Procurator der Tingitana gegen Ende der Regierung des M. Aurel als *fortissimus dux* im Kampfe gegen die Mauren in Hispania Baetica gefeiert[93] und wiederum sind mehrmals von Spanien aus ausserordentliche Hülfstruppen zur Bezwingung der Aufständigen nach der Tingitana dirigirt worden.[94] Daher möchte ich die beiden inschriftlich bezeugten *procuratores pro legato* der Tingitana, die der Zeit des Trajan und des Septimius Severus angehören, als Procuratoren mit ausserordentlicher Competenz, d. h. wahrscheinlich vorübergehend mit dem Commando von Legionstruppen betraut ansehen, entsprechend dem Titel des in Stellvertretung des Legaten commandirenden *tribunus militum pro legato*.[95]

Von diesen ausserordentlichen Fällen abgesehen, stehen unter dem Commando dieser ritterlichen Procuratoren durchaus nur Auxiliartruppen, die grossentheils im Lande selbst ausgehoben sind; daneben die Provinzialmilizen, die aus der waffenfähigen Mannschaft *(iuventus)* der Provinz gebildet werden. Die Eigenart dieser nicht zu den Reichstruppen gehörigen Mannschaften ist kürzlich[96] von Hrn. Mommsen zuerst

---

[92] Es ist der in zwei Inschriften genannte Sex. Sentius Caecilianus *leg. pr. pr. utriusq. Mauretan.*: C. I. L. IX n. 4194 (vergl. add. p. 698) und VIII n. 10165. Mommsen C. I. L. VIII praef. p. XX möchte ihn in die Zeit des Gordianus III. bez. seiner nächsten Nachfolger setzen, doch spricht dagegen, dass die erstere Inschrift *'litteris pulchris'* geschrieben ist; auch weist die Ämtercarriere auf eine ältere Zeit hin; wenn auf die Copie von X n. 10165 etwas Verlass wäre, so möchte man Z. 2 zu *V[espas]ia[no]* ergänzen. Dass übrigens auch in der Zeit von Gordianus bis auf Valerianus die Statthalter von Mauretanien Procuratoren, nicht Legaten waren, weist Pallu de Lessert: bibl. des antiquités Africaines 1885 p. 103 nach und bestätigt die neugefundene Inschrift: Eph. epigr. VII n. 674.

[93] C. I. L. II n. 1120 und 2015; Mommsen R. G. 5 S. 639 A. 3.

[94] Inschriften des T. Varius Clemens (C. I. L. III n. 5211 ff.), der bei dem Maurenaufstande unter Pius *praefectus auxiliariorum tempore expeditionis in Mauretaniam Tingitanam ex Hispania missorum* war. Vergl. auch Pallu de Lessert a. O. p. 103 ff., der ebenfalls den Titel *procurator pro legato* als ausserordentlichen erklärt.

[95] C. I. L. III n. 605 mit Mommsen's Anmerkung.

[96] Hermes 22 S. 547 ff.

in das richtige Licht gestellt worden; ich beschränke mich daher an dieser Stelle darauf, eine kurze Übersicht über die in den procuratorischen Provinzen stehenden Streitkräfte zu geben.

Die stärkste Besatzung haben die beiden Mauretanien, Raetia und Noricum gehabt. In den Mauretanien standen im Jahre 69 nach Tacitus 19 Cohorten, 5 Alen und die einheimische Miliz: *ingens Maurorum numerus per latrocinia et raptus apta bello manus*,[97] in Noricum in demselben Jahre mindestens eine Ala, 8 Cohorten und die heimische Miliz, während im Jahre 153 nach Ausweis eines kürzlich in Regensburg gefundenen Militairdiploms, wenn dasselbe sich, wie es den Anschein hat, auf Noricum und nicht auf Raetia bezieht, die Besatzung auf 4 Alen und 14 Cohorten erhöht worden war.[98] In Raetien werden im Jahre 69 allgemein *alae cohortesque et ipsorum Raetorum iuventus, sueta armis et more militiae exercita* von Tacitus[99] erwähnt; näheren Aufschluss geben die Militairdiplome, nach denen im Jahre 107: 4 Alen und 11 Cohorten, im Jahre 166: 3 Alen und 13 Cohorten standen.[100] In den Seealpen befand sich ausser den einheimischen Milizen[101] eine im Lande ausgehobene *cohors I Ligurum* und eine ebenfalls wohl aus Einheimischen bestehende *cohors nautarum*;[102] über die Besatzung der Cottiae und Poeninae ist nichts bekannt, doch sind letztere bekanntlich, wenigstens zeitweise mit Raetien vereinigt gewesen.[103] In Sardinien stand, wie schon früher bemerkt ist,[104] die *cohors I Corsorum* und wahrscheinlich von vornherein noch eine zweite Cohorte; wenigstens finden wir unter Domitianus und Nerva, als Sardinien wieder Senatsprovinz geworden war, dort die *cohors I gemina Sardorum et Corsorum* und die *cohors II gemina Ligurum et Corsorum* nebst einer Station der Misenensischen Flotte.[105]

---

[97] Tacitus hist. 2, 58; vergl. Mommsen im C. I. L. VIII p. XXII über die in Mauretanien stationirten Truppen. Verstärkung der daselbst stationirten Truppen ist offenbar häufig gewesen; für die Verpflegung der Truppen in Mauretanien bei der Pacificirung des Landes unter Claudius wird der Proconsul von Baetica verantwortlich gemacht: Dio 60, 24.

[98] Eph. epigr. IV p. 502 ff.

[99] Tacitus hist. I, 68.

[100] Diplom. 24 (C. I. L. III p. 866) und 61 (Eph. epigr. II p. 460); vergl. C. I. L. V n. 8660.

[101] Tacitus hist. 2, 12: *concita gente — nec deest iuventus — arcere provinciae finibus Othonianos intendit.*

[102] Mommsen in C. I. L. V. p. 903.

[103] S. oben S. 425.

[104] S. oben S. 425.

[105] Mommsen in C. I. L. X p. 777. Über die im Jahre 19 nach Sardinien verbannten Juden: *quattuor milia libertini generis coercendis illic latrociniis* vergl. Tacitus ann. 2, 85.

Eine solche gab es auch in Corsica,[106] wo von anderen regulären Truppen nichts erwähnt wird; vielmehr lässt der Bericht des Tacitus[107] über den Abfall des Procurators Pacarius Decumus von Otho darauf schliessen, dass ihm nur Provinzialmilizen zur Verfügung gestanden haben, da er *iuvare Vitellium Corsorum viribus statuit, inani auxilio, etiam si provenisset;* darauf werden erst Aushebungen gemacht und die ungeschlachten Recruten *(inconditi homines)* gedrillt, die *laborem insolitum perosi infirmitatem suam reputabant;* sie machen dann geltend: *direptos vastatosque classe etiam quos cohortes alaeque protegerent*, d. h. also doch, dass in Corsica *alae* und *cohortes* nicht standen. Doch wäre denkbar, dass der zugleich mit dem Befehlshaber der Flottenstation von Pacarius getödtete Ritter Quintius Certus dort ein Commando über Auxiliartruppen geführt habe. In Thracien standen zu Nero's Zeit von Reichstruppen nur 2000 Mann, also wahrscheinlich zwei *cohortes miliariae*.[108] In Cappadocien nennt Tacitus zum Jahre 51 die *auxilia provincialium*, die später als τὸ συμμαχικόν oder τὸ στρατιωτικόν wiederkehren.[109] In Judaea endlich steht ein aus Caesariensern und Sebastenern gebildete *ala*: die *ala I gemina Sebastenorum* und 5 Cohorten, die ebenfalls sämmtlich im Lande ausgehoben zu sein scheinen[110] und wahrscheinlich theilweise auch von Offizieren orientalischer Herkunft commandirt worden sind.[111] Die als Escorte des Apostels Paulus mitgeschickten 200 δεξιολάβοι[112] haben schwerlich eine besondere Truppe gebildet; doch ist auch hier im Bedarfsfalle aus den Samaritern eine Provinzialmiliz gebildet worden, die in dem Streite der Galiläer und

---

[106] Mommsen in C. I. L. X p. 838.

[107] Tacitus hist. 2, 16.

[108] Josephus b. J. II, 16, 4 z. J. 66.

[109] Mommsen im Hermes 22 S. 550 fg.

[110] Mommsen im Hermes 19 S. 217 A. 1 über die Namen dieser Cohorten. Die Angabe der acta apostolorum 10, 1, dass eine *cohors Italica* (vergl. darüber Marquardt St.-Verw. 2 S. 467 fg.) in Judaea gestanden habe, hält Schuerer in Zeitschrift für wissensch. Theologie 18 (1878) S. 425 für die Zeit vor Vespasian für unglaubwürdig.

[111] Der Name des Tribunen der in Jerusalem stationirten Cohorte, Claudius Lysias (act. apost. c. 23 §. 26), weist auf griechisch-orientalischen Ursprung; dazu würden die vielleicht authentischen oder doch sicher den Verhältnissen jener Zeit entsprechenden Worte des Tribuns an Paulus passen (c. 22 §. 28): ἐγὼ πολλοῦ κεφαλαίου τὴν πολιτείαν ταύτην ἐκτησάμην. Auch der Tribun Celer, den Claudius δεσμώτην ἀναπέμψας εἰς Ἱεροσόλυμα παραδοθῆναι Ἰουδαίοις πρὸς αἰκίαν ἐκέλευσε, καὶ περισυρέντα τὴν πόλιν οὕτω τὴν κεφαλὴν ἀποκοπῆναι (Josephus b. J. II, 12, 7, vergl. antiq. 20, 6, 3) ist gewiss kein geborener Römer oder Italiker gewesen.

[112] Acta apostol. c. 23 §. 23; dieselben werden auch bei Constantinus Porphyrog. περὶ θεμάτων I, 1 neben τοξοφόροι und πελτασταί und bei Theophylactos hist. 4, 1 erwähnt. Es sind wohl Schleuderer zu verstehen; vergl. Meyer krit.-exeg. Handbuch über die Apostelgeschichte (3. Aufl. 1861) S. 448; Egli in Ztschr. für wissensch. Theologie 27 (1883) S. 21.

Samariter im Jahre 51/52 von dem Procurator Ventidius Cumanus in's Treffen geführt wird.[113]

Dies sind, soweit wir unterrichtet sind, die Besatzungen der procuratorischen Districte gewesen, lauter Auxiliartruppen, entsprechend dem Charakter dieser Provinzen, mit Ausnahme der dem Oberbefehl des Praefecten unterstellten Legionen in Aegypten und, wie wir hinzufügen müssen, in Mesopotamien, das, obschon es von Septimius Severus als procuratorische Provinz constituirt wurde, doch die erste und dritte der von ihm neugeschaffenen Parthischen Legionen als Besatzung erhielt.[114] Sollte hier aber wirklich, im Widerspruch mit der Organisation aller übrigen Provinzen gleicher Art, neben dem *procurator* oder später dem *praefectus*, die sicher als Praesides zu fassen sind, ein bez. zwei Legionslegaten commandirt haben? Ich glaube, man wird dies von vornherein verneinen müssen und eine Prüfung der allerdings spärlichen Zeugnisse, die für die dritte Parthische Legion leider gänzlich versagen, ergiebt das eigentlich nicht überraschende Resultat, dass diese Legionen nach dem Muster der aegyptischen nicht von Legaten, sondern von ritterlichen Praefecten commandirt worden sind. Das beweist die Viennenser Inschrift des Pacatianus,[115] der unter Septimius Severus nach Bekleidung der ritterlichen Officierstellen *proc. provinc. O[sr]hoenae, praefectus legionis Parthicae* wurde, ein Commando, das er ohne Zweifel gleichzeitig mit der Procuratur ausgeübt hat; demnach muss diese Legion (vielleicht die erste) damals in Osrhoene stationirt gewesen sein. Nicht minder spricht dafür die in Bostra gefundene Dedication aus der Zeit der Philippi,[116] gewidmet *Julio Juliano v. e. ducenar. praef. leg. I Parthicae Philippianae duci devotissimo* von einem *praef. alae novae Firmae (miliariae) catafract(ariorum) Philippianae praeposito optimo*, was auch nur auf den Commandirenden der Legion bezogen werden kann. Auch Flavius Heracleo unter Severus Alexander, von dem Dio[117] erzählt, dass seine Soldaten (τοὺς μὲν εν τῇ Μεσοποταμίᾳ) τολμῆσαι τὸν ἄρχοντα σφῶν ἀποκτεῖναι wird Praefect einer Parthischen Legion gewesen sein, und wenn auch der Ausdruck ἄρχων zu allgemein ist, um ihn als Beweis für ritterliche Qualität zu verwenden, so ist doch bemerkens-

---

[113] Josephus antiq. 20, 6, 1: (Cumanus) ἀναλαβὼν τὴν τῶν Σεβαστηνῶν ἴλην καὶ πεζῶν τέσσαρα τάγματα, τούς τε Σαμαρείτας καθοπλίσας, ἐξῆλθεν ἐπὶ τοὺς Ἰουδαίους.

[114] Dio 55, 24; vergl. Eckhel d. n. III p. 518.

[115] C. I. L. XII n. 1856.

[116] C. I. L. III n. 99.

[117] Dio ep. 80, 3. - - Der C. I. L. III n. 1651 add. erwähnte *m(iles) leg III P(arthicae) s(ingularis) co(n)s(ularis)* ist wohl als *singularis* des Statthalters von Moesia superior zu fassen.

werth, dass Dio[118] ihn gleichfalls für den Commandanten der zweiten in Albano stationirten Parthischen Legion anwendet: *τὸν Τριкκιανόν ... τότε τοῦ Ἀλβανίου στρατοπέδου ἄρχοντα*, den Henzen[119] mit Recht identificirt mit dem in der vita Caracallae[120] unter den Anstiftern des Kaisermordes genannten *Recianus, qui praefectus legionis secundae Parthicae militabat et qui equitibus extraordinariis praeerat.* Schon die Verbindung des Commandos dieser Legion mit dem über die *equites extraordinarii*, unter denen wohl die den Kaiser auf seiner Orientalischen Expedition begleitenden und in Rom dem Commando der Praetorianerpraefecten unterstehenden[121] *equites singulares* zu verstehen sein werden, zeigt, dass es sich hier um eine Rittercharge handelt und demnach auch die zweite Parthische Legion nicht unter einem Legaten, sondern einem Praefecten gestanden hat. Darnach wird man vielleicht auch den Schluss der allerdings schlecht überlieferten Dedication der *milites leg(ionis) II Parth(icae)* an den Kaiser Philippus und seine Gemahlin:[122] *cura(m) age[n]te Pompon. Juliano.* R. *leg. eius* zu ℞*(aefecto) leg(ionis) eius* ergänzen dürfen. Diese *milites Albanii* oder *Albanii* allein, wie sie der gleichzeitige und competente Dio nennt,[123] sind demnach nicht als rechte Legionstruppen, sondern als Verstärkung der kaiserlichen Leibwache, mit der sie gemeinsam den Kaiser auf Expeditionen begleiten,[124] aufzufassen; ihr Praefect ist daher ohne Zweifel von den Praefecti praetorio abhängig gewesen,[125] wie auf die enge Verbindung auch die Inschrift[126] eines *stra(tor) pr(aefectorum) pr(aetorio) c(larissimorum) v(irorum) ex leg. II P(arthica)* hinweist und auch Dio auf dieses Verhältniss in der Rede des Pseudo-Maecenas anzuspielen scheint.[127]

---

[118] Dio epit. 78, 13; vergl. 79, 4: *ὁ δὲ δὴ Τριкκιανὸς διὰ τοὺς Ἀλβανίους, ὧν ἐγκρατῶς ἐπὶ τοῦ Μακρίνου ἡγεῖτο.*

[119] Henzen ann. d. J. 1867 p. 73 ff., wo eingehend über die im Jahre 1866 unterhalb Aricia aufgefundene Grabstätte der Legion (C. I. L. VI n. 3367 ff.) gehandelt ist.

[120] c. 6 §. 7.

[121] Annali d. J. 1885 p. 254-5 (a. 142-3); C. I. L. VI n. 228 (a. 205). Vergl. Mommsen St. R. II³ S. 1119 A. 1.

[122] C. I. L. VI n. 793.

[123] *οἱ Ἀλβάνιοι στρατιῶται*: Dio 78, 34, 2 und 79, 2, 4; *οἱ Ἀλβάνιοι*: 78, 34, 5 und 79, 4, 3; *τὸ Ἀλβάνιον στρατόπεδον*: 78, 13, 4.

[124] Vita Carac. c. 6; vergl. C. I. L. VI p. 792.

[125] Das ist bereits früher, aber, so weit ich sehe, nur auf Grund der unten angeführten Ps.-Maecenatischen Rede vermuthet worden.

[126] C. I. L. VI n. 3408.

[127] Dio 52, 24: die Praetorianer-Praefecten *ἀρχέτωσαν δὲ δὴ τῶν τε δορυφόρων καὶ τῶν λοιπῶν στρατιωτῶν τῶν ἐν τῇ Ἰταλίᾳ πάντων, ὥστε καὶ θανατοῦν τοὺς ἀδικοῦντας αὐτῶν πλὴν τῶν τε ἑκατοντάρχων καὶ τῶν ἄλλων τῶν τοῖς ἐκ τοῦ βουλευτικοῦ ἄρχουσι προστεταγμένων ... τῶν δὲ ἄλλων τῶν ἐν τῇ Ἰταλίᾳ στρατιωτῶν οἱ ἔπαρχοι ἐκεῖνοι προστα-*

Die Thatsache, dass Septimius Severus den Oberbefehl über die drei von ihm neu geschaffenen Legionen ritterlichen Praefecten übertragen hat, ist charakteristisch und bedeutsam für die gesammte Politik dieses die Macht des Senates systematisch vernichtenden Kaisers. Es ist der erste Schritt zu der mehr als ein halbes Jahrhundert später durchgeführten Ausschliessung der Senatoren von dem Commando der Legionen; wir erkennen ferner, warum die Stellung der *praefecti legionis*, auch bei den übrigen von senatorischen Legaten befehligten Legionen, durch Severus wesentlich an Bedeutung gewonnen hat,[128] da jetzt Männer ihres Standes und Titels nicht nur an der Spitze der aegyptischen, sondern auch der drei neugeschaffenen parthischen standen, wir sehen aber auch, dass die Verlegung der zweiten Legion nach Albano nicht ein so entschiedener Bruch mit der Vergangenheit war, als gemeinhin angenommen wird, da diese ausschliesslich aus Barbaren recrutirte[129] und von einem ritterlichen Praefecten commandirte Legion ihrer Organisation nach füglich als eine Verstärkung der von Severus reformirten Praetorianer angesehen werden konnte.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zu den Procuratoren zurück, so möge am Schlusse der Besprechung ihrer militairischen Functionen nur noch die Bemerkung eine Stelle finden, dass sie in ihrer Eigenschaft als Truppencommandanten *beneficiarii* haben,[130] die übrigens auch den Finanzprocuratoren in legatorischen Provinzen nicht fehlen;[131] ja sogar sind von letzteren auch *cornicularii*[131] und, wenigstens von dem Procurator der Lugdunensis, auch *exacti* bezeugt,[132]

τείτωσαν ὑπάρχους ἔχοντες. Zu diesen ὕπαρχοι ist neben den *praefecti classium* und *vigilum*, an die mit Mommsen St. R. II³ S. 1119 A. 1 in erster Linie zu denken sein wird, vielleicht auch der *praefectus legionis II Parthicae* mit einer für diese Rede charakteristischen Anticipation zu zählen; unter den von der Gerichtsbarkeit der Praefecten eximirten und dem Commando von Senatoren unterstellten Soldaten sind wohl ausschliesslich die cohortes urbanae zu verstehen und für das, besonders mit Rücksicht auf das folgende τῶν δ' ἄλλων τῶν ἐν τῇ Ἰταλίᾳ στρατιωτῶν anstössige ἄλλων an jener Stelle wahrscheinlich zu lesen ἀστικῶν. Die allein maassgebenden Handschriften, der Venetus A und Vatic. A, geben nach freundlicher Mittheilung des Hrn. Prof. Boissevain in Groningen 'nichts anderes als die Vulgata; der Med. B hat, wie alle andern Handschriften überhaupt keinen Werth; das von ihm eingefügte, wohl aus Dittographie entstandene τοῦ (nach τοῖς) muss also gänzlich ignorirt werden'.

[128] Wilmanns eph. epigr. I p. 104; vergl. meine Untersuchungen I S. 249 A. 5.

[129] Das zeigen die Namen der Grabschriften.

[130] Besonders häufig sind die *beneficiarii* der Procuratoren von Noricum bis auf Marc Aurel, vergl. C. I. L. III index p. 1156. — Den von Cauer eph. epigr. IV p. 388 ff. zusammengestellten ist hinzuzufügen der βενεφ(ικιάριος) ἐπάρχου Αἰγύπτου: Borghesi *oeuvres* 8 p. 308.

[131] Mommsen eph. epigr. IV p. 534.

[132] Cauer a. O. p. 431.

die bei jenen nicht nachweisbar sind. Doch ist die Zahl der den Finanzprocuratoren zur Verfügung gestellten Soldaten noch unter Trajan, wie wir aus Plinius' Briefen[133] ersehen, eine sehr beschränkte und auch die Benutzung dieser wahrscheinlich erst seit Claudius ihnen gestattet worden; wenigstens wird im Jahre 23 dem Procurator von Asien: Capito, die Anwendung von Soldaten bei Eintreibung der Steuern von dem Kaiser als arge Überschreitung seines Mandats vorgehalten.[134]

Die Functionen des Praesidialprocurators werden in einem Gedichte eines von seinem Posten scheidenden Procurators der Graischen Alpen[135] mit den Worten bezeichnet: *dum ius guberno remque fungor Caesarum.* Rechtsprechung und Finanzverwaltung liegen ihm neben dem Truppencommando, das in der späteren Kaiserzeit an Bedeutung zurücktritt, ob. Über die Erhebung der Steuern und die Verwaltung der kaiserlichen Domainen wird passender in anderem Zusammenhang zu handeln sein, da diese Functionen nicht minder den Finanzprocuratoren zukommen. Die Jurisdiction geht dagegen ursprünglich den Finanzprocuratoren überhaupt ab[136] und ist ihnen bekanntlich erst durch Claudius, jedoch mit Beschränkung auf die Fiscalprocesse überwiesen worden.[137] Übergriffe in die dem senatorischen Statthalter reservirte Rechtsprechung, selbst auf dem Gebiete der Criminaljustiz,[138] müssen

---

[133] MOMMSEN eph. epigr. IV p. 534.

[134] Tacitus ann. 4, 15: *magna cum adseveratione principis non se ius nisi in servitia et pecunias familiares dedisse; quod si vim praetoris usurpasset manibusque militum usus foret, spreta in eo mandata sua.* Vergl. Dio 57, 23 über denselben Fall: Tiberius bestraft ihn mit Verbannung ἐγκαλέσας αὐτῷ ὅτι καὶ στρατιώταις ἐχρήσατο καὶ ἄλλα τινὰ ὡς καὶ ἀρχὴν ἔχων ἔπραξεν· οὐ γὰρ ἐξῆν τότε τοῖς τὰ αὐτοκρατορικὰ χρήματα διοικοῦσιν πλέον οὐδὲν ποιεῖν ἢ τὰς νενομισμένας προσόδους ἐκλέγειν καὶ περὶ τῶν διαφορῶν ἔν τε τῇ ἀγορᾷ καὶ κατὰ τοὺς νόμους ἐξ ἴσου τοῖς ἰδιώταις δικάζεσθαι. Die veränderte Stellung der Procuratoren rührt bekanntlich von Claudius her.

[135] C. I. L. XII n. 103.

[136] Vergl. Anm. 134.

[137] BETHMANN-HOLLWEG Civilprocess II S. 75 und 183; MOMMSEN St. R. II^{3} S. 1022 mit A. 2.

[138] Erlässe gegen die Competenzüberschreitungen der *procuratores qui vice praesidis non funguntur*: Cod. J. III, 26, 6 (a. 197); III, 13, 1 (a. 214); III, 26, 3 (a. 215); IX, 20, 4 (a. 239); III, 3, 1 (a. 242); III, 22, 2 (a. 250): *procuratores nostros status causas examinare non posse omnibus notum est.* Betreffs der *multae dictio*: Cod. J. I, 54, 2 (a. 228): *procuratores meos, id est rationales* (Finanzprocuratoren), *indicendae multae ius non habere saepe rescriptum est,* vergl. X, 8, 1 (a. 216); betreffs der *iudicis datio* vergl. Papinianus digg. 49, 1, 23 §. 1. Für das Criminalrecht vergl. Cod. J. IX, 47, 2 (a. 212): *procurator meus, qui vice praesidis non fungebatur, exilii poenam tibi non potuit inrogare, ac propterea frustra vereris sententiam quae nulla iuris ratione subnixa est.* — Ulpian in der Collatio XIV, 3, 1 betreffs der *legis Fabiae cognitio*: *quamquam [eam] quidam procuratores Caesaris usurpaverint, [t]am Romae [qu]am in provinciis.* Vergl. Callistratus digg. I, 19, 3: *[pro]curatores Caesaris ius deportandi non habent .... neque redire cuiquam permittere possunt.*

aber, wie zahlreiche Erlasse des dritten Jahrhunderts zeigen, besonders wohl unter den senatsfeindlichen Kaisern Commodus und Septimius Severus nicht selten gewesen sein. Den Praesidialprocuratoren steht die Civilgerichtsbarkeit in gleicher Weise, wie den übrigen Statthaltern zu, wie auch die *tutoris datio* ihnen verstattet ist.[139] Auch die Criminalgerichtsbarkeit ist ihnen in Judaea bereits unter Augustus[140] in vollem Umfange eingeräumt worden und wird unter dem Namen *ius gladii* im dritten Jahrhundert allen Provinzialstatthaltern ausdrücklich zugesprochen,[141] tritt daher bei denselben titular nur in seltenen Fällen auf.[142] Da dieselbe, wie neuerdings mit Recht hervorgehoben worden ist,[143] von der Militairgerichtsbarkeit ausgeht, so ist dabei in Betracht zu ziehen, dass römische Bürgertruppen in den procuratorischen Provinzen überhaupt nicht standen und dieselbe sich daher hauptsächlich auf Peregrine erstreckte, während die in diesen Provinzen lebenden römischen Bürger, vielleicht selbst gewisse bevorzugte Classen der Einheimischen[144] Anspruch darauf hatten, dem Kaiserspruche in Rom überwiesen zu werden. Das Verfahren gegen Christus einerseits und

---

[139] Ulpianus digg. 26, 5, 1 pr. (vergl. Anm. 74).

[140] Josephus übersetzt das *ius gladii* im bell. Iud. II, 8, 1: *μέχρι τοῦ κτείνειν λαβὼν παρὰ τοῦ Καίσαρος ἐξουσίαν* besser als in der entsprechenden Stelle antiq. 18, 1, 1: *τῇ ἐπὶ πᾶσιν ἐξουσίᾳ*. Vergl. Evang. Joann. 19, 10: *λέγει Πιλᾶτος .... ἐξουσίαν ἔχω ἀπολῦσαί σε καὶ σταυρῶσαί σε*. Ausübung desselben (abgesehen von der Hinrichtung Christi): Joseph. antiq. 20, 1, 1: Cuspius Fadus bestraft einen Aufrührer mit dem Tode, zwei mit Exil; 20, 5, 2: *Ἰάκωβος καὶ Σίμων, οὓς ἀνασταυρῶσαι προσέταξεν ὁ Ἀλέξανδρος*. Vergl. auch b. J. II, 13, 2.

[141] Ulpianus digg. I, 18, 6 §. 8, vergl. Mommsen St. R. II S. 270.

[142] Mommsen St. R. II S. 270 A. 4-6; den dort angeführten Beispielen von Procuratoren *iure gladii*: C. I. L. IX, 5439: *proc. Alpium Atractianar(um) et Poeninar(um) iur(e) glad(ii)* und C. I. L. II, 484 (zweifelhafter Lesung): *proc. prov. M[oe]siae inferioris, eiusdem provinciae ius gladii* sind hinzuzufügen C. I. L. III, 1919 add.: *proc. centenarius prov. Li[burniae] iure gladii* und ein *praeses* (Mauretaniae Caesariensis) *iure gla[dii]*: C. I. L. VIII, 9367, vergl. Eph. epigr. 5 n. 968. In der ersten und vierten Inschrift ist der Zusatz wohl nur pleonastisch (es sind private Dedicationen), denn derselbe Statthalter von Mauretanien wird in zwei anderen officiellen Inschriften (C. I. L. VIII, 9354-5: Dedicationen an Severus Alexander und seine Gemahlin) nur als *proc. Aug. praeses provinciae* bezeichnet; die Procuratoren von Moesia und Liburnia haben dagegen ohne Zweifel nur ausnahmsweise Capitaljurisdiction ausgeübt. Einen *procurator vice proconsulis* (*Africae*) *iure gladii* s. Anm. 79. Vergl. auch Sulpicius Severus dialog. II, 11, 4: *imperator decreverat tribunos summa potestate armatos ad Hispanias mittere, qui haereticos inquirerent.*

[143] Mommsen St. R. II[3] S. 270 A. 2 mit Berufung auf Dio 53, 13: *ἄλλῳ γὰρ οὐδενὶ οὔτε ἀνθυπάτῳ οὔτε ἀντιστρατήγῳ οὔτε ἐπιτρόπῳ ξιφηφορεῖν δέδοται, ᾧ μὴ καὶ στρατιώτην τινὰ ἀποκτεῖναι ἐξεῖναι νενόμισται.*

[144] Wenigstens schickt der Procurator Felix einige jüdische Priester zur Verantwortung vor den Kaiser nach Rom: Josephus vita §. 3 und auch von Quadratus heisst es, er habe zwar mehrere Juden ans Kreuz schlagen lassen, *τοὺς δὲ περὶ Ἀνανίαν τὸν ἀρχιερέα καὶ τὸν στρατηγὸν Ἄνανον δήσας εἰς Ῥώμην ἀνέπεμψε περὶ τῶν πεπραγμένων λόγον ὑφέξοντας Κλαυδίῳ Καίσαρι*: Joseph. ant. 20, 6, 2, vergl. b. J. II, 12, 6.

den Apostel Paulus andererseits zeigt deutlich zugleich den Umfang, wie auch die Grenzen dieser Criminalgerichtsbarkeit, die freilich schon in Neronischer Zeit von dem das Recht mit Füssen tretenden Procurator Gessius Florus überschritten worden sind: *ὃ γὰρ μηδεὶς πρότερον*, sagt Josephus von ihm,[145] *τότε Φλῶρος ἐτόλμησεν, ἄνδρας ἱππικοῦ τάγματος μαστιγῶσαι πρὸ τοῦ βήματος καὶ σταυρῷ προσηλῶσαι· ὧν εἰ καὶ τὸ γένος Ἰουδαῖον, ἀλλὰ τὸ γοῦν ἀξίωμα Ῥωμαῖον ἦν.* Im dritten Jahrhundert ist dagegen die Capitalgerichtsbarkeit sämmtlicher Statthalter auch auf die römischen Bürger mit Ausnahme einzelner privilegirter Classen erstreckt worden,[146] doch ist bemerkenswerth, dass noch Caracalla, der in Folge seiner allgemeinen Verleihung des römischen Bürgerrechts sich zu einer umfassenden Regelung dieser Verhältnisse gezwungen sehen musste, den Praesidialprocuratoren die Gerichtsbarkeit über römische Bürger nur für gewisse Criminalprocesse gestattet zu haben scheint.[147]

Das Recht der Begnadigung hat dem Procurator sicherlich ebensowenig, wie den übrigen Statthaltern[148] zugestanden; die in den Evangelien berichtete Freigebung des Barabbas müsste daher, wenn sie nicht vielmehr als ein zur Entlastung des Pilatus hinzugefügter Zug anzusehen ist, auf eine besondere, an jüdische Gebräuche[149] anknüpfende kaiserliche Ermächtigung zurückgeführt werden.

---

[145] Josephus b. J. II, 14, 9.

[146] Ulpian. digg. I, 18, 6 §. 8: *qui universas provincias regunt, ius gladii habent et in metallum dandi potestas eis permissa est.* Vergl. Mommsen St. R. II³ S. 270.

[147] Ulpianus in der Collatio XIV, 3, 3: *nec aliter procuratori Caesaris haec cognitio iniungitur, quam [si] praesidis partibus in provincia fungatur. Plane post sententiam de Fabia latam procuratoris partes succedunt [huiusce. At]tamen procurator, qui illam provinciam regit, licet de capitalibus causis cognoscere nec soleat, tamen ut de lege Fabia possit cognoscere, imperator Antoninus constituit. Item legis Juliae de adulteriis coercendis constitutione imperatoris Antonini quaestionem accepit.* So (*huiusce attamen*) nach Mommsen's mir freundlich mitgetheilter Restitution für das überlieferte *huius certe ad tamen;* Blume schreibt *huiuscemodi*, doch findet sich *modi* nur in einer Handschrift zweiten Ranges von zweiter Hand hinzugefügt; Huschke setzt willkürlich *vice praesidis* ein. 'Es wird', setzt Mommsen hinzu, 'der Procurator, der nur die financielle Execution hat, weil er neben dem Statthalter steht, von dem, *qui illam* (d. h. *eam de qua agitur*) *provinciam regit*, geschieden.'

[148] Auch die Restitution des Verurtheilten oder Veränderung der festgesetzten Strafe steht dem Statthalter nicht zu; vergl. Digg. XLII, 1, 45 § 1; XLVIII, 18, 1 § 27.

[149] Vergl. besonders Evangel. Joannis 18, 39: *ἔστιν δὲ συνήθεια ὑμῖν ἵνα ἕνα ἀπολύσω ὑμῖν ἐν τῷ πάσχα.* Jedesfalls handelt es sich, wie auch das *ὑμῖν* zeigt, um eine jüdische, nicht, wie H. Grotius zum Evangel. Matth. 27 v. 15 anzunehmen geneigt ist, römische Sitte, doch ist dies das einzige Zeugniss für Losgebung eines Gefangenen bei den Juden am Paschafeste; vergl. A. B. von Walther, 'jurist.-histor. Betrachtungen über die Geschichte vom Leiden und Sterben Jesu Christi'. 2. Aufl. (Breslau 1777) S. 189 ff. und Winer, bibl. Realwörterbuch II³ S. 202 s. v. Pascha. Über ähnliche *indulgentiae paschales* im römischen Reich seit Valentinianus I. vergl. Gothofredus zu Cod. Th. IX, 38, 3.

Die Stellung der Provinzialprocuratoren mit dem Schwertrecht ist der der übrigen Statthalter ebenbürtig; in Bithynien erscheint sogar ein Procurator, gleich dem Proconsul, auf Münzen[150] und man kann selbst von einer gewissen Eponymie derselben innerhalb ihres Sprengels sprechen.[151] Es ist daher von vornherein nicht gerade wahrscheinlich, dass dieselben sämmtlich, wie neuerdings mehrfach angenommen worden ist,[152] zu dem Statthalter der nächstgelegenen kaiserlichen Provinz in einer geradezu abhängigen Stellung gestanden haben und man muss gestehen, dass die für die occidentalischen Provinzen angeführten angeblichen Belege nicht die geringste Beweiskraft besitzen. Etwas anders scheint es freilich mit dem Procurator von Judaea zu stehen, auf dessen Verhältniss zum Statthalter von Syrien daher auch von den Vertretern jener Ansicht das Hauptgewicht gelegt wird. Bekannte Thatsachen, wie die Absetzung oder wenigstens Suspendirung des Pilatus und Einsetzung eines provisorischen Verwalters in Judaea durch den Statthalter Syriens L. Vitellius mit dem bindenden Befehl (τοῦ Οὐιτελλίου πειθόμενος ἐντολαῖς, οὐκ ὂν ἀντειπεῖν fügt Josephus seinem Bericht[153] hinzu), nach Rom zur Verantwortung vor dem Kaiser zu gehen, ferner die Urtheilsfällung des Ummidius Quadratus über die jüdischen Procuratoren Felix und Cumanus, die für letzteren zu dem gleichen Ausgang führte, scheinen allerdings auf den ersten Blick jene Annahme zu rechtfertigen. Aber Hoeck[154] und neuerdings Mommsen[155] heben dagegen mit Recht hervor, dass beide Fälle ausserordentlicher Art sind, da einerseits Vitellius nicht nur mit der Statthalterschaft von Syrien, sondern, wie später Corbulo und Avidius Cassius,[156] mit einem höheren, sich über die benachbarten Provinzen des Orients erstreckenden Imperium betraut war, andererseits Quadratus für diesen bestimmten Fall nach Tacitus Angabe[157] das *ius statuendi etiam de procuratoribus* von Claudius erhalten, demnach dasselbe auf Grund seiner Statthalterschaft vorher nicht besessen hatte.

Von einer directen Unterordnung des Procurators von Judaea unter den Statthalter von Syrien wird man daher nicht sprechen

---

[150] S. oben S. 420; die angebliche Procuratorenmünze des Antonius Felix beruht nur auf einem Missverständniss Schiller's (Nero S. 211 A. 3).

[151] Vergl. für den *procurator Asturiae et Callaeciae*: C. I. L. II n. 2477 (a. 79); die Datirung im Evangel. Lucae III, 1 beweist allerdings nichts.

[152] Vergl. besonders Zumpt *stud. Rom.* S. 105 und 139, dem sich die Neueren meist angeschlossen haben; ähnlich spricht sich auch Borghesi *oeuvres* III S. 274 aus. Dagegen Mommsen C. I. L. III p. 707 und betreffs Judaea: Röm. Gesch. 5 S. 509 Anm.

[153] Josephus antiq. 18, 4, 2.

[154] Hoeck, Röm. Gesch. I, 2 S. 202 ff.

[155] Mommsen, Röm. Gesch. 5 S. 509 Anm.

[156] Vergl. Mommsen St. R. II S. 853.

[157] Tacitus ann. 12, 54.

können; nur dem Kaiser steht die Bestrafung desselben für etwaigen Missbrauch seiner Amtsgewalt zu. Aber andererseits wird man nicht in Abrede stellen, dass zwischen Judaea und Syrien ein engeres Verhältniss bestanden hat, als zwischen den procuratorischen Provinzen im Occident und den an sie grenzenden Kaiserprovinzen. Mag man auch auf das Zeugniss des immer nur die thatsächlichen Verhältnisse ins Auge fassenden Josephus, der Judaea zwar nicht als Theil, aber doch als Appendix von Syrien bezeichnet,[158] nicht grosses Gewicht legen, so sagt doch auch Tacitus[159] von der Neuordnung unter Claudius im Jahre 49: *Ituraei et Judaei defunctis regibus Sohaemo atque Agrippa provinciae Suriae additi*; es lag ferner nahe, wie der Statthalter von Syrien naturgemäss die Aufsichtsbehörde für den jüdischen König gebildet hatte, auch den an seine Stelle getretenen Procurator in ein ähnliches Verhältniss zu demselben zu setzen und ihm mit diesem Aufsichtsrecht zugleich die Verpflichtung aufzuerlegen, erforderlichen Falls direct einzugreifen und mit seinem Heer in Judaea einzurücken. So finden wir unter Claudius den syrischen Statthalter Cassius Longinus mit zahlreichen Truppen in Jerusalem, um einen Aufstand zu verhüten, wo er dann gemeinsam mit dem Procurator den Juden verstattet, eine Gesandtschaft an den Kaiser zu schicken;[160] so kommt unter Nero Cestius Gallus zur Orientirung über die Verhältnisse und zur Beschwichtigung des Volkes nach Jerusalem,[161] an ihn bringen dann, nach seiner Rückkehr nach Syrien, sowohl die Juden, als der Procurator ihre Beschwerden und er entsendet, gegen den in seinem Kriegsrathe aufgetauchten Vorschlag, sofort mit einem Heere nach Jerusalem zu ziehen, zunächst einen Tribunen zur Berichterstattung.[162]

Hätten die Verhältnisse in Raetien und Noricum sich in ähnlicher Weise entwickelt, wie in Judaea, so würden wahrscheinlich die Statthalter von Germanien oder Pannonien ebenfalls zum Einschreiten autorisirt worden sein, wenn man nicht, was man offenbar in Judaea so lange als möglich vermeiden wollte, vorgezogen hätte, diesen

---

[158] Joseph. antiq. 18, 1, 1: *Ἰουδαίαν προσθήκην τῆς Συρίας γενομένην*, vergl. 17, 13, 5; dagegen MOMMSEN a. a. O. Die Angabe des Josephus (19, 9, 2), Claudius habe nach dem Tode des Herodes Agrippa (im J. 44) die Verwaltung Judaea's aus Rücksicht auf den Verstorbenen nicht dem mit ihm verfeindeten Statthalter von Syrien Vibius Marsus, sondern einem Procurator übergeben, verdient allerdings um so weniger Glauben, als Marsus unmittelbar darauf abberufen wurde (20, 1, 4).

[159] Tacitus ann. 12, 23.

[160] Josephus antiq. 20, 1, 1.

[161] Josephus b. J. II, 14, 3; er giebt den Juden die Versicherung, *ὡς πρὸς τὸ μέλλον αὐτοῖς τὸν Φλῶρον κατασκευάσειε μετριώτερον*.

[162] Josephus b. J. II, 16, 1.

Provinzen überhaupt ihre Selbstständigkeit zu nehmen. Aber es lagen eben die Verhältnisse in Judaea vollständig anders, wo eine alte, hoch entwickelte, aber durchaus fremdartige Cultur und Religion den Römern entgegentrat und bei dem Fanatismus des Volkes ernste Conflicte unausbleiblich waren. Bei der geringen Zahl und schlechten Qualität der dem Procurator zur Verfügung stehenden Truppen konnte derselbe, trotz seiner äusserlich unabhängigen und den Juden gegenüber mit fast unbeschränkter Competenz ausgestatteten Stellung der Anlehnung an den syrischen Statthalter selbst am wenigsten entrathen, wie andererseits die Juden begreiflicherweise ihre Wünsche und Klagen zunächst an ihn und erst in zweiter Linie an den fernen Kaiser richteten. Das harte und dabei unzulängliche Regiment dieser kleinen Herren, die der Mangel an Autorität und thatsächlicher Macht zu immer schrofferem Auftreten nothwendig treiben musste, und die, wie Tacitus von einem derselben treffend sagt,[163] fast ohne Ausnahme ihr Königsrecht in sclavischem Geiste ausübten, hat den Vernichtungskrieg heraufbeschworen und die für Barbaren berechnete Institution der Praesidialprocuratoren hat sich in Judaea ebenso machtlos, als unheilvoll erwiesen.

[163] Tacitus hist. 5, 9.

Ausgegeben am 23. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1889.

XXVIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

23. Mai. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

1. Hr. Munk las den Schluss seiner Mittheilungen über die centralen Organe für das Sehen und das Hören bei den Wirbelthieren.

Die Mittheilung erscheint in einem der nächsten Sitzungsberichte.

2. Von der physikalisch-mathematischen Classe ist zur Unterstützung wissenschaftlicher Arbeiten folgende Bewilligung gemacht: von 1000 Mark für Hrn. Dr. Stuhlmann zur Zeit in Sansibar zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die faunistische Erforschung von Sansibar. Ferner von der philosophisch-historischen Classe: von 2000 Mark zur Fortführung einer Prosopographie der römischen Kaiserzeit; von 3000 Mark zur Herausgabe der Commentatoren des Aristoteles; von 2000 Mark für die Supplemente zum Corpus inscriptionum Latinarum; von 6000 Mark für die Herausgabe der politischen Correspondenz König Friedrich's II.; von 3000 Mark zu den Vorarbeiten für ein Corpus nummorum; von 300 Mark an Hrn. Oberlehrer Dr. Kühlewein in Ilfeld a. H. zu einer wissenschaftlichen Reise nach Florenz, behufs einer Ausgabe des Hippokrates; 1000 Mark der

